[illegible]
9 7/8 x 6 3/16
Inside
9 5/8 x 6

QK1
.S66
1909
v.33

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-TROISIÈME ANNÉE, 1908-1909

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1909

SHOUT
SHARE
IT

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Cette revue, publiée en exécution de l'article 3 des statuts, paraît tous les 3 mois, depuis janvier 1877, par livraison de 350 pages environ. Elle forme chaque année deux forts volumes in-8°.

Le prix d'abonnement est de 20 francs par an, pour tous les pays de l'Union postale.

Les membres de la Société ont droit à une réduction de 25 %.

ON S'ABONNE

au secrétariat de la Société scientifique de Bruxelles

11, rue des Récollets, 11

LOUVAIN

Le volume des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE : **M. Paul Mansion,** *6, quai des Dominicains. Gand.*

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-TROISIÈME ANNÉE, 1908-1909

PREMIER FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1909

D 4.00

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Statuts 5

Règlement pour l'encouragement des recherches scientifiques . . . 6

Lettres pontificales 11

Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles, année 1909. 17

Session du 29 octobre 1908, à Anvers. — Séances des Sections. . .

Première Section 65

Deuxième — 82

Troisième — 86

Quatrième — 103

Cinquième — 105

Sixième — 105

Assemblée générale 106

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

L'Électricité considérée comme forme de l'énergie. Électrostatique, par M. le Lieut. Colon. Ariès 1

Potentiel du temps de parcours, par M. Haton de la Goupillière . . 108

Le volume des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la REVUE et des ANNALES, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique,* au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : **M. Paul Mansion,**
6, quai des Dominicains, Gand.

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Louvain. — Imprimerie F. & R. Ceuterick
60, rue Vital Decoster, 60

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

> *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.*
> CONST. DE FID. CATH., C. IV.

TRENTE-TROISIÈME ANNÉE, 1908-1909

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1909

BOT GARDEN
1910

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

Article premier. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de *Société scientifique de Bruxelles,* avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* » (*).

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche (**).

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (***).

Art. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

(*) Const. de Fid. cath., c. IV.

(**) Dans sa séance du 18 février 1907, le Conseil a décidé de ne plus publier des travaux trop étendus qui sont plutôt des livres que des mémoires.

(***) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de Revue des Questions scientifiques. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages.

Art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres renouvelable annuellement par quart à la session de Pâques. Le Conseil choisit dans son sein, le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire, le Trésorier. Toutefois, il peut choisir en dehors du Conseil, le Président ou le premier Vice-Président. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (*). En cas de décès ou de démission d'un membre du Bureau ou du Conseil, le Conseil peut lui donner un successeur pour achever son mandat (**).

Art. 6. — Pour être admis dans l'Association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les assemblées générales.

(*) Ancien art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (Cf. Annales de la Société scientifique, 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

(**) D'après une décision du Conseil du 27 novembre 1907, les membres du Conseil, sortants ou démissionnaires, en restent membres honoraires avec voix consultative, s'ils le désirent.

Art. 8. — Chaque année, il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels (*).

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise par l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en six sections : I. *Sciences mathématiques.* II. *Sciences physiques.* III. *Sciences naturelles.* IV. *Sciences médicales.* V. *Sciences économiques.* VI. *Sciences techniques* (**).

Tout membre de l'Association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Chaque section peut avoir des réunions extraordinaires, en dehors des sessions, pourvu que les travaux scientifiques auxquels ces réunions donnent lieu soient soumis à la section, pendant les sessions ordinaires de la Société (***).

(*) Ancien art. 8. — Chaque année, la Société tient quatre sessions. La principale, en octobre, pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante. Les trois autres sessions, en janvier, avril et juillet, pourront durer trois jours, et auront pour objet principal de préparer la session d'octobre (Cf. Annales, 1878, t. II, 1re partie, p. 169 ; 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

(**) Sur la création de la section des *sciences techniques*, détachée de la section des sciences mathématiques, voir les Annales, t. XXX (1906), 1re partie, pp. 79, 117, 265 et t. XXXI (1907), 1re partie, p. 307.

(***) Ce dernier paragraphe, voté par le Conseil général le 25 février 1902, a été soumis à l'Assemblée générale et approuvé le 10 avril 1902. Cf. Annales, t. XXVI (1902), 1re partie, p. 198.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'Association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué (*).

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'Association et présente dans la session de Pâques le compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'Association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

(*) Peuvent assister aux séances du Conseil, avec voix consultative : 1° Les Présidents, et, en cas d'empêchement des Présidents, les Secrétaires des sections. 2° Les membres du Conseil sortants ou démissionnaires, qui en sont restés membres honoraires.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES

1. — Le Conseil de la *Société scientifique de Bruxelles* a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — Le Conseil peut, sur la proposition de la section compétente, accorder des encouragements pécuniaires ou des médailles aux auteurs des meilleurs travaux présentés par les membres de cette section. L'ensemble de ces récompenses ne peut dépasser annuellement 1000 francs.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante, resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société ; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix sont décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné ; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année qui suit celle où a été proposée la question, est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale ; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses Annales s'il y a lieu.

LETTRES
DE
S. S. LE PAPE LÉON XIII
AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

I

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis scientificae Bruxellis constitutae

LEO PP. XIII

Dilecti Filii, salutem et Apostolicam benedictionem

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi religionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse*; quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^{a} de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes coelestibus praesidiis confirmet ac muniat; quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae, apud S. Petrum, die 15 Ianuarii 1879, Pontificatus Nostri Anno primo.

Leo PP. XIII.

A nos chers Fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles.

LÉON XIII, PAPE

Chers Fils, salut et bénédiction Apostolique

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège Apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer qu'*il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison*, comme l'a déclaré dans la Constitution IV *de fide catholica*, le Saint Concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des Saints Pères. C'est pourquoi

Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans ses statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne ; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement, de tout l'effort de leur esprit, l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'Il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction Apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'An Un de Notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

II

Dilectis Filiis, Sodalibus Consociationis Bruxellensis a scientiis provehendis, Bruxellas

LEO PP. XIII

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM

Quod, pontificatu Nostro ineunte, de Sodalitate vestra fuimus ominati, id elapso iam ab institutione eius anno quinto et vicesimo, feliciter impletum vestris ex litteris perspicimus. In provehendis enim scientiarum studiis, sive eruditorum coetus habendo, sive Annalium volumina edendo, nunquam a proposito descivistis, quod coeptum fuerat ab initio, ostendendi videlicet *nullam inter fidem et rationem dissensionem veram esse posse*. Benevolentiam Nostram ob vestras industrias testamur ; simulque hortamur, ut coeptis insistatis alacres, utpote temporum necessitati opportunis admodum. Naturae enim cognitio, si recto quidem et vacuo praeiudiciis animo perquiratur, ad divinarum rerum notitiam conferat necesse est, divinaeque revelationi fidem adstruat. Hoc ut vobis, vestraque opera, quam multis accidat, Apostolicam benedictionem, munerum coelestium auspicem, Sodalitati vestrae amantissime impertimus.

Datum Romae apud S. Petrum die 20 Martii Anno 1901, Pontificatus Nostri Vicesimo Quarto.

LEO PP. XIII.

A nos chers Fils, les Membres de la Société scientifique de Bruxelles, à Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Ce qu'au début de Notre pontificat, Nous avions présagé de votre Société, aujourd'hui, vingt-cinq ans après sa fondation, vos lettres Nous en apprennent l'heureux accomplissement. En travaillant au progrès des études scientifiques, soit par vos réunions savantes, soit par la publication de vos Annales, vous ne vous êtes jamais départis de votre dessein initial, celui de montrer que *entre la foi et la raison, aucun vrai désaccord ne peut exister*. Nous vous exprimons Notre bienveillance pour vos efforts et Nous vous exhortons en même temps à poursuivre avec ardeur votre entreprise si bien en rapport avec les nécessités actuelles. Car l'étude de l'univers, si elle est menée avec droiture et sans préjugé, doit aider à la connaissance des choses de Dieu, et établir la foi à la révélation divine. Pour que ce bonheur vous advienne et par vous à beaucoup d'autres, Nous accordons avec la plus vive sympathie à votre Société, la bénédiction Apostolique, gage des faveurs célestes.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 20 mars 1901, l'An Vingt-quatrième de Notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

LETTRE
DE
S. É. LE CARD. R. MERRY DEL VAL
Secrétaire d'État de
S. S. LE PAPE PIE X
AU PRÉSIDENT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
EN RÉPONSE A L'ADRESSE AU SAINT-PÈRE

Illmo Signore

Transmesso da Mons. Nunzio di Bruxelles, è pervenuto al Santo Padre il nobile indirizzo della Società scientifica, di cui la S. V. Illma è degno Presidente. Per incario quindi dell' Augusto Pontifice mi è grato significarle che Sua Sanctità si è vivamente compiaciuta dell'omaggio reso alla Sua Venerata Persona da cotesto illustre sodalizio, il quale stimô suo precipuo dovere di umiliare ossequio ed osservanza al Vicario di Cristo fin dalla prima assemblea tenuta sotto il novello Pontificato. La Santità Sua, bene apprezzando siffatto officio, e rilevando d'altra parte con alta soddisfazione il rettissimo ed onorevole programma della sullodata Società, la cui divisa è ispirata ai principii sanciti anche nel Concilio Vaticano, ha tributato assai volontieri un particolare encomio a Lei ed a tutti i socii, e mentre ha espressi i più caldi ringraziamenti per un atto così cortese, non ha indugiato a dichiarare che integra ed anzi di gran lungua accresciuta perdura nell' animo Suo la benevolenza, onde il detto Sodalizio fu onorato da Pio IX e da Leone XIII, di sa : me : Il Santo Padre confida inoltre, che i singoli socii, del cui sapere ama nutrire la stima più lusinghiera, si studieranno incessantemente di meritare sempre meglio della Religione e delle scienze, e mentre ha invocati su di loro gli aiuti celesti, li ha di gran cuore benedetti.

Colgo poi con piacere l'opportunità per dichiararmi con sensi di distinta stima,

Di V. S. Illma

Affmo per servirla
R. Card. Merry del Val.

Roma, 5 maggio 1904.

Illustrissime Seigneur

La noble adresse de la Société scientifique, dont Votre Seigneurie illustrissime est le digne Président, est parvenue au Saint-Père par l'entremise de Mgr le Nonce de Bruxelles. Il m'est agréable de vous faire savoir, au nom de l'Auguste Pontife, que Sa Sainteté a reçu avec grande joie l'hommage rendu à Sa Personne Vénérée par cette illustre association qui s'est fait un impérieux devoir de témoigner son humble et respectueuse soumission au Vicaire du Christ dès sa première assemblée tenue sous le nouveau Pontificat. Sa Sainteté appréciant justement cet hommage et considérant d'autre part avec une vive satisfaction le programme, si sage et si honorable, de votre Société, dont la devise s'inspire des principes mêmes sanctionnés par le Concile du Vatican, vous a très volontiers accordé, à vous et à tous les membres, un éloge spécial; et en même temps qu'Elle exprimait ses remerciements les plus chaleureux pour votre aimable attention, Elle n'a pas hésité à déclarer que la bienveillance dont Votre Société a été honorée par Pie IX et Léon XIII, de sainte mémoire, demeure entière et qu'elle s'est même de beaucoup accrue dans son cœur. Le Saint-Père a l'espoir fondé que tous les membres, pour le savoir desquels Il aime à nourrir l'estime la plus flatteuse, s'efforceront sans trêve de mériter toujours davantage de la Religion et des sciences, et tandis qu'Il invoquait pour eux les secours célestes, Il les a bénis de grand cœur.

Je saisis avec plaisir cette occasion de me déclarer, avec des sentiments de considération distinguée,

De Votre Seigneurie illustrissime

le très affectionné serviteur
R. Card. Mery del Val.

Rome, le 5 mai 1904.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

ANNÉE 1909

Liste des membres fondateurs

S. E. le cardinal Dechamps (*), archevêque de	Malines.
François de Cannart d'Hamale (*)	Malines.
Charles Dessain	Malines.
Jules van Havre (*)	Anvers.
Le chanoine Maes (*).	Bruges.
Le chanoine De Leyn (*)	Bruges.
Leirens-Eliaert	Alost.
Frank Gillis (*)	Bruxelles.
Joseph Saey	Bruxelles.
Le Chev. de Schoutheete de Tervarent (*) .	Saint-Nicolas.
Le Collège Saint-Michel	Bruxelles.
Le Collège Notre-Dame de la Paix	Namur.
Le Duc d'Ursel, sénateur (*)	Bruxelles.
Le Pce Gustave de Croÿ (*)	Le Rœulx (Hainaut).
Le Cte de T'Serclaes (*)	Gand.
Auguste Dumont de Chassart (*)	Mellet (Hainaut).
Charles Hermite, membre de l'Institut (*) .	Paris.
L'École libre de l'Immaculée-Conception .	Vaugirard-Paris.
L'École libre Sainte-Geneviève	Paris.
Le Collège Saint-Servais	Liége.
Le Cte de Bergeyck (*)	Beveren-Waes.
L'Institut Saint-Ignace	Anvers.
Philippe Gilbert (*), correspondt de l'Instit.	Louvain.

(*) Décédé.

Le R. P. PROVINCIAL de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège SAINT-JEAN BERCHMANS . . .	Louvain.
Le Collège SAINT-JOSEPH.	Alost.
Le chanoine DE WOUTERS (*)	Braine-le-Comte.
Antoine D'ABBADIE (*), membre de l'Institut	Paris.
S. É. le cardinal HAYNALD (*), archevêque de Kalocsa et Bàcs.	Kalocsa (Hongrie).
S. É. le cardinal Séraphin VANNUTELLI . .	Rome.
S. G. Mgr DU ROUSSAUX (*), évêque de . .	Tournai.
S. É. le cardinal GOOSSENS (*), archevêque de	Malines.
R. BEDEL	Marseille.
S. G. Mgr BELIN (*), évêque de	Namur.
Eugène PECHER (*)	Bruxelles.
S. É. le cardinal FERRATA	Rome.
S. É. le cardinal NAVA DI BONTIFE . . .	Catane.
S. Exc. Mgr. RINALDINI, nonce apostolique.	Madrid.
S. Exc. Mgr GRANITO DI BELMONTE, nonce apostolique	Vienne.
Éd. GOEDSEELS.	Uccle.

Liste des membres honoraires

S. A. R. CHARLES-THÉODORE, duc en Bavière	Possenhofen.
Antoine D'ABBADIE (*), membre de l'Institut	Paris.
AMAGAT, membre de l'Institut	Paris.
Mgr BAUNARD, recteur de l'Univers. cathol.	Lille.
Joachim BARRANDE (*)	Prague.
BARROIS, membre de l'Institut.	Lille.
A. BÉCHAMP (*).	Paris.
Aug. BÉCHAUX, correspondant de l'Institut.	Paris.
Le Prince BONCOMPAGNI (*) de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
BOUSSINESQ, membre de l'Institut. . . .	Paris.

(*) Décédé.

L. de Bussy (*), membre de l’Institut	Paris.
Desplats	Lille.
P. Duhem, correspondant de l’Institut	Bordeaux.
J.-H. Fabre	Sérignan.
Le docteur Foerster (*)	Aix-la-Chapelle.
J. Gosselet, correspondant de l’Institut	Lille.
C. Grand’ Eury, correspondant de l’Institut	Saint-Étienne.
Haton de la Goupillière, membre de l’Inst.	Paris.
P. Hautefeuille (*), membre de l’Institut	Paris.
Dr Heis (*)	Münster.
Charles Hermite (*), membre de l’Institut	Paris.
G. Humbert, membre de l’Institut	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières (*), membre de l’Institut	Paris.
Camille Jordan, membre de l’Institut	Paris.
A. de Lapparent (*), secrétaire perpétuel de l’Académie des sciences	Paris.
G. Lemoine, membre de l’Institut	Paris.
F. Le Play (*)	Paris.
Dr W. Lossen (*)	Heidelberg.
Le général J. Newton	New-York.
D.-P. Œhlert, correspondant de l’Institut	Laval.
Louis Pasteur (*), membre de l’Institut	Paris.
R. P. Perry, S. J. (*), de la Société Royale de Londres	Stonyhurst.
É. Picard, membre de l’Institut	Paris.
Victor Puiseux (*), membre de l’Institut	Paris.
A. Barré de Saint-Venant (*), membre de l’Institut	Paris.
Paul Sabatier, correspondant de l’Institut	Toulouse.
R. P. A. Secchi, S. J. (*), de l’Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Paul Tannery (*)	Pantin.
R. P. Wasmann, S. J.	Luxembourg.
Aimé Witz, correspondant de l’Institut	Lille.
Wolf, membre de l’Institut	Paris.
R. Zeiller, membre de l’Institut	Paris.

(*) Décédé.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1909)

Abaurrea (Luis), Molviedro, 6. — Séville (Espagne).
Adan de Yarza (Ramon), ingénieur des mines, 7, 1°, calle de Moreto. — Madrid.
d'Adhémar (V^{te} Robert), professeur aux Facultés catholiques, 14, place de Genevières. — Lille (Nord — France).
Alexis-M. Gochet (Frère), rue de Bruxelles. — Namur.
Allard (François), industriel. — Châtelineau (prov. de Hainaut).
Alliaume (Maurice), 7, avenue Victor Jacobs. — Anvers.
Amagat, membre de l'Institut, examinateur d'admission à l'École polytechnique, 19, avenue d'Orléans. — Paris.
André (J.-B.), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture, 127, avenue Brugmann. — Bruxelles.
d'Annoux (C^{te} H.), 74, boulevard Alexandre Martin. — Orléans (Loiret — France).
Arduin (Abbé Alexis), à N.-D. d'Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).
Ariès (Lieutenant-colonel), 9, boulevard du Roi. — Versailles (Seine-et-Oise — France).
Attout-Van Cutsem (E.), rue de Fer. — Namur.
Baclé (L.), ingénieur, ancien élève de l'École polytechnique, 57, rue de Châteaudun. — Paris.
Baivy (D^{r} Zénon), place Saint-Aubain. — Namur.
Balbas (Thomas), ingénieur des mines. — San-Sebastian (Espagne).
Baltus (Chan.), 11, rue des Guildes. — Bruxelles.
Barbé (Maurice), ingénieur des Arts et Manufactures, 19, rue des Saints-Pères. — Paris (VI^{e}).
Barrois, membre de l'Institut, 41, rue Pascal. — Lille (Nord — France).
Baseil (Abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe.
Baunard (Mgr), recteur de l'Université catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
Bauwens (D^{r} Isidore), rue de la Station. — Alost.
Bayet (Adrien), 33, Nouveau Marché-aux-Grains. — Bruxelles.

Beaujean (Charles), 208, avenue de la Couronne. — Ixelles (Bruxelles).

Beauvois (Eug.), à Corberon (Côte-d'Or — France).

Béchaux (Aug.), correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas. — Paris.

Bedel (Abbé René), 125, boulevard National. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

Beernaert (Auguste), Ministre d'État, membre de l'Académie royale de Belgique et associé de l'Institut de France, 11, rue d'Arlon. — Bruxelles.

Belpaire (Frédéric), ingénieur, 192, avenue du Margrave. — Anvers.

Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.

Berlingin (Melchior), directeur des laminoirs de la Vieille-Montagne. — Penchot, par Viviers (Aveyron — France).

Bertrand (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.

de Béthune (B^{on} Gaston), lieutenant au 5^{e} régiment d'artillerie, répétiteur à l'École militaire, 39, avenue de la Cascade. — Bruxelles.

de Beughem de Houtem (V^{te}), commissaire d'arrondissement à Malines. Château de Mélis, par Puers.

Bibot (D^{r}), place Léopold. — Namur.

de Bien (Fernand), 150, rue du Trône. — Bruxelles.

Bleuset, S. J. (R. P. J.), 53, Tongersche straat. — Maestricht (Hollande).

Blondel (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.

Blondel (G.), professeur à l'École des Hautes-Études commerciales, 31, rue de Bellechasse. — Paris.

de la Boëssière-Thiennes (M^{is}), 19, rue aux Laines. — Bruxelles ; ou, château de Lombise, par Lens (prov. de Hainaut).

Bolsius, S. J. (R. P. Henri), 18, A, Kerkstraat. — Oudenbosch (Pays-Bas).

Boschmans (Conego, Ricardo), Gymnasio Espirito Santo. — Jaguarâo (Estado do Rio Grande do Sul, Brazil).

Bosmans, S. J. (R. P. H.), professeur de mathématiques, Collège Saint-Michel, 22, boulevard S^{t}-Michel. — Bruxelles.

Boule, S. J. (R. P.), Maison des Jésuites. — 's Heeren-Elderen (par Tongres).

Bourgeat (Chan.), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).

Boussinesq, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, 22, rue Berthollet. — Paris.

du Boys (Paul), ingénieur en chef des ponts et chaussées. — La Combe de Lancey, par Villard-Bonnot (Isère — France).

van den Branden de Reeth (Sa Gr. Mgr), archevêque de Tyr, 82, rue du Bruel. — Malines.

Branly (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 21, avenue de Tourville. — Paris.

Breithof (F.), 14, A, place du Peuple. — Louvain.

de Briey (C^{te} Renaud), place de l'Industrie. — Bruxelles.

Brifaut (Valentin), avocat, 131, rue de Stassart. — Bruxelles.

de Brouwer (Michel), ingénieur, 14, rue d'Elverdingen. — Ypres.

van der Bruggen (B^{on} Maurice), ancien Ministre de l'Agriculture, 18, rue du Gouvernement. — Gand.

Bruylants (G.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.

Bulliot (J.), professeur à l'Institut catholique, 6, rue du Regard. — Paris.

Cabeau (Abbé Charles), professeur au Collège St-Joseph. — Virton.

Capart (Jean), 17, avenue de la Station. — Auderghem (Brabant).

Capelle (Abbé Éd.), 79, avenue de Breteuil. — Paris (XV^{e}).

Cappellen (Guillaume), commissaire d'arrondissement, 4, place Marguerite. — Louvain.

Caratheodory (Costa), 32, Venusbergweg. — Bonn (Allemagne).

Carlier (Joseph), ingénieur, 7, rue Joseph II. — Bruxelles.

Carrara, S. J. (R. P. B.), 1, via Brioseo. — Padoue (Italie).

Cartuyvels (Jules), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture, 215, rue de la Loi. — Bruxelles.

Casarès (Firmino), farmacia, 93, calle San Andrès. — La Coruña (Espagne).

Casteleix (R. P.), Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Charles, S. J. (R. P. Jean), 11, rue des Récollets. — Louvain.

S. A. R. Charles-Théodore, duc en Bavière. — Possenhofen (Allemagne).

Cirera y Salse (D^{r} Luis), profesor libre de electroterapia, 19, prâl, calle Fontanella. — Barcelone (Espagne).

Cirera, S. J. (R. P. Richard), Observatoire de l'Èbre. — Tortosa (Espagne).

Claerhout (Abbé J.), directeur des Écoles catholiques de Pitthem (Frandre occidentale).

Cocheteux (Ch^{ne}), directeur de l'Institut S^{t}-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Coffey (Denis, J.), docteur en médecine, F. R. U. I., professeur de physiologie à l'École de médecine de l'Université catholique, Medical School, Cecilia Street. — Dublin (Irlande).

Cogels (J.-B. Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.

Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — Bilbao (Espagne).

Collangettes, S. J. (R. P.), professeur de physique à l'Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).

Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Collège Saint-François-Xavier, 10 and 11, Park Street. — Calcutta (Indes anglaises, via Brindisi).

Collège Saint-Jean Berchmans, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.

Collège Saint-michel (R. P. H. Bosmans, S. J.), 22, boulevard S^{t}-Michel. — Bruxelles.

Collège Saint-Servais, 92, rue Saint-Gilles. — Liége.

Convent (Alf.), docteur en médecine. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

Conway (Arthur, W.) M. A., F. R. U. I., professeur de physique au Collège de l'Université catholique, Cosy Hook, 100, Leinster Road. — Rathmines (Dublin.Irlande).

Coomans (Léon), pharmacien, 5, rue des Brigittines. — Bruxelles.

Coomans (Victor), chimiste, 5, rue des Brigittines. — Bruxelles.

Cooreman (Gérard), 1, place du Marais. — Gand.

Coppieters de Stockhove (abbé Ch.), directeur des Dames de l'Instruction chrétienne. — Bruges.

Costanzo (R. P. Jean), barnabite, membre de l'Académie des Nuovi Lincei, Collège Saint-Louis. — Bologne (Italie).

Coulon (H.). docteur en médecine, 9, rue des Chanoines. — Cambrai (Nord — France).

Cousin (L.), ingénieur, 10, rue Simonis. — Bruxelles.

Cousot (Dr Georges), membre de la Chambre des Représentants. — Dinant.

Crame (Auguste), capitaine commandant d'artillerie, adjoint d'État-Major, 44, quai des Moines. — Gand.

Craninckx (Bon Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.

Cuylits (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

Daniels (Dr Fr.), professeur à l'Université catholique de Fribourg (Suisse).

Dardel (Jean), Aix-les-Bains (Savoie); ou, 13, avenue Auber. — Nice (Alpes Maritimes — France).

Daubresse (Paul), ingénieur, professeur à l'Université, 46, rue Vital Decoster. — Louvain.

David (P.), docteur en droit et en sciences politiques. — Stavelot.

De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.

Debaisieux (T.), professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.

De Becker (Chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.

De Bloo (Julien), ingénieur, 91, boulevard Frère-Orban. — Gand.

De Brabandère (Victor), avocat près la Cour d'Appel, 57, rue du Marteau. — Bruxelles.

De Brouwer (Chan.), curé-doyen. — Ypres.

Dechevrens, S. J. (R. P. Marc), directeur de l'Observatoire du Collège Saint-Louis. — Saint-Hélier (Jersey — Iles-de-la-Manche — Angleterre).

Declercq, ingénieur, directeur du laboratoire d'électricité à l'Université, 38, rue Neuve St-Pierre. — Gand.

De Coster (Charles), ingénieur civil des mines, 23, rue Coenraets. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Degive (A.), membre de l'Académie royale de médecine, 84, rue de Stassart. — Bruxelles.

De Grave (Dr Henri), 30, rue Thiéfry. — Bruxelles.

De Greef (Jules), conseiller au Conseil des Mines, 26, rue Breydel. — Bruxelles (Q.-L.).

De Greeff, S. J. (R. P. Henri), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

De Jaer (Jules), directeur général des mines, 16, avenue de la Floride. — Uccle (Bruxelles).

Dejardin (L.), directeur général des Mines, 124, rue Franklin. — Bruxelles.

De Jonghe, 29, rue Saint-Quentin. — Bruxelles.

De Lantsheere (Dr J.), oculiste, 215, rue Royale. — Bruxelles.

De Lantsheere (Léon), Ministre de la Justice, 83, rue du Commerce. — Bruxelles.

Delaunois (Dr G.), à Bon-Secours, par Péruwelz(prov. de Hainaut).

Delcroix (Dr A.), 18, chaussée de Louvain. — Bruxelles.

Delemer (Jules), professeur à la Faculté libre des Sciences, 24, rue Voltaire. — Lille (Nord — France).

Delétrez (Dr A.), 7, rue de la Charité. — Bruxelles.

Deleu (L.), ingénieur aux chemins de fer de l'État, 84, avenue de l'Hippodrome. — Ixelles (Bruxelles).

Delmer (Alexandre), ingénieur au Corps des mines, 14, place de la Reine. — Schaerbeek (Bruxelles).

Delvigne (Chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 18, rue de la Pacification.—Saint-Josse-ten-Noode(Bruxelles).

Delvosal (Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, astronome-adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, 84, rue Rouge. — Uccle (Bruxelles).

Demanet (Chan. S.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, 23, rue de Bériot. — Louvain.

De Moor (Dr), médecin en chef de l'Hospice Ghislain, 57, rue des Tilleuls. — Gand.

De Munnynck, O. P. (R. P.), professeur à l'Université Albertinum. — Fribourg (Suisse).

De Muynck (Chan. R.), professeur à l'Université, 9, place Saint-Jacques. — Louvain.

Denoël, ingénieur au Corps des mines, 93, rue Bois l'Évêque. — Liège.

Denys (Dr J.), professeur à l'Université, Institut bactériologique, 96, rue Vital Decoster. — Louvain.

Deploige (Mgr), Professeur à l'Université, Président de l'Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

De Preter (Herman), ingénieur, 59, rue du Marais. — Bruxelles.

Deroitte (Dr Victor), médecin de la colonie de Gheel, chef de laboratoire. — Gheel.

De Smedt, S. J. (R. P. Charles), président de la Société des Bollandistes, correspondant de l'Institut de France, Collège Saint-Michel, 22, boulevard St-Michel. — Bruxelles.

Desplats (Dr), professeur aux Facultés catholiques, 56, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Desplats (Dr René), 181, rue Nationale. — Lille (Nord — France).

Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.

De Vadder (Victor), avocat à la Cour d'appel, 16, rue Blanche. — Ixelles (Bruxelles).

De Veer, S. J. (R. P.), directeur der Vereenigingen G. en W., 70, Wijnhaven. — Rotterdam (Pays-Bas).

De Walque (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

De Wildeman (É.), conservateur au Jardin Botanique de l'État, 122, rue des Confédérés. — Bruxelles (N.-E.).

D'halluin (Dr Maurice), chef des travaux de Physiologie à la Faculté catholique de Médecine, 15, boulevard Bigo-Danel. — Lille (Nord — France).

Dierckx, S. J. (R. P. Fr.), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Dochain-Defer (Félix), industriel. — Couillet.

de Dorlodot (Chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université, 44, rue de Bériot. — Louvain.

de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux. — Floreffe (prov. de Namur).

Drion (Bon Adolphe), avocat. — Gosselies.

Dubois (Ernest), directeur de l'Institut supérieur de commerce, 36, rue de Vrière. — Anvers.

Dufrane (Dr C.), chirurgien à l'hôpital, 36, rue d'Havré. — Mons.

Duhem (Pierre), correspondant de l'Institut, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur de physique à la Faculté des Sciences, 18, rue de la Teste. — Bordeaux (Gironde — France).

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).

Dumez (Abbé Robert), docteur en sciences naturelles, professeur au Petit Séminaire. — Roulers (Fl. occid.).

Dumont (André), professeur à l'Université, 18, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Dumortier, conseiller à la Cour d'appel, 7, place Van Artevelde. — Gand.

Duplat (G.), avocat à la Cour d'appel, 48, rue aux Laines. — Bruxelles.

Dupont (D^r Émile), médecin de bataillon, chef des laboratoires de bactériologie et de radiographie à l'Hôpital militaire, 12, rue Goffart. — Bruxelles.

Dupriez (Léon), professeur à l'Université, 194, rue de Bruxelles. — Louvain.

Duquenne (D^r Louis), 11, rue Lonhienne. — Liége.

Duret (D^r), doyen de la Faculté catholique de médecine, 21, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Dusausoy (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.

Dusmet y Alonso (José Maria), docteur en sciences naturelles, 7, plaza de Santa-Cruz. — Madrid.

Duthoit (E.), professeur à la Faculté catholique de Droit, 141, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Dutilleux (Maurice), ingénieur, 4, place François-Bossuet. — Bruxelles.

Dutordoir (Hector), ingénieur en chef, directeur du service technique provincial, 339, boulevard du Château. — Gand.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard-Paris.

École libre Sainte-Geneviève, rue des Postes. — Paris.

Eeckhout (G.), avocat à la Cour d'appel, 28, rue Dautzenberg. — Bruxelles.

Egan, S. J. (R. P. Michel), M. A., F. R. U. I., Miltown Park. — Dublin (Irlande).

Fabre (J.-H.), naturaliste. — Sérignan, par Vaucluse (Vaucluse — France).

Fabry (Louis), docteur ès sciences, astronome à l'Observatoire, 2, place de la Corderie. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

Fagnart (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université de Gand, 9, place des Gueux. — Bruxelles (N.-E.).

Farina (Paul), docteur en médecine, 20, rue de la République. — Menton (Alpes maritimes — France).

Fauvel (A.-A.), inspecteur des Services des Messageries maritimes, 31B, rue Jouvenet. — Paris (XVIe).

de Favereau de Jenneret (Bon), ancien ministre des affaires étrangères. — Bruxelles.

Fenaert (Abbé Florent), maître de conférences à l'Université catholique, 81, rue Denfert-Rochereau. — Lille (Nord — France).

Fenaux (Édouard), directeur honoraire de la prison centrale, chaussée de Tirlemont. — Louvain.

Fernandès (Dr Rob.), 13, avenue Galilée. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

Ferrata (S. É. le cardinal). — Rome.

Fita y Colomé, S. J. (R. P. Fidel), 12, calle de Isabel la Catolica. — Madrid.

de Fooz (Guillaume), ingénieur, 27, rue de Paris. — Tientsin (Chine).

Fournier O. S. B. (Dom Grégoire), 55, boulevard de Jodoigne extérieur. — Louvain.

de Foville (Abbé), directeur du Séminaire Saint-Sulpice. — Paris.

François (A.), ingénieur-agronome, 12, rue Sainte-Gertrude. — Etterbeek (Bruxelles).

Francotte (Henri), professeur à l'Université, 1, rue Lebeau. — Liége.

Francotte (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.

Gaillard, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Garcia de la Vega (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Gauthier (Chanoine), 21, rue Louise. — Malines.

Gelin (l'Abbé E.), docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin. — Huy.

Gendebien (Paul), docteur en droit, 53, rue Montoyer. — Bruxelles.

Georgetown College Observatory (Rev. Director of the). — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

Gerard (Ern.), administrateur au Ministère des Chemins de fer, Postes et Télégraphes, 15, avenue de la Renaissance. — Bruxelles.

Gesché (L.), professeur à l'Université, 20, rue d'Egmont. — Gand.

Giele (Frédéric), docteur en médecine. — Jette-Saint-Pierre (Brabant).

Gilbert (Paul), ingénieur. — Heer-Agimont (Namur).

Gillès de Pélichy (Bon Ch.), membre de la Chambre des Représentants, château d'Iseghem (Flandre occidentale).

Gilson, professeur à l'Université, 539, boulevard du Château. — Gand.

Glibert (D.), docteur en médecine, inspecteur du travail. — Uccle (Bruxelles).

Glorieux, docteur en médecine, 36, rue Jourdan. — Bruxelles.

Godfrind (Victor), pharmacien militaire de 1re classe, chimiste du Magasin central d'habillement de l'Armée, 114, avenue de la Couronne. — Ixelles (Bruxelles).

Goedseels (Édouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique. — Uccle (Bruxelles).

Goffart, 11, chaussée de Louvain. — Bruxelles.

Gollier (Th.), professeur à l'Université de Liége, 92, rue Africaine. — Bruxelles.

Gonzalez de Gastejon (Miguel), conde de Aybar, lieutenant-colonel d'État-Major, professeur de S. M. le Roi d'Espagne, Real palacio. — Madrid.

Goris (Ch.), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.

Gosselet (Jules), correspondant de l'Institut, docteur honoraire de l'Université de Louvain, professeur émérite de la Faculté des Sciences, 18, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Graffin (Mgr), professeur à l'Institut catholique, 47, rue d'Assas. — Paris.

Grand' Eury (Cyrille), correspondant de l'Institut, professeur honoraire à l'École des Mines, 5, Cours Victor-Hugo. — Saint-Étienne (Loire — France).

Grandmont (Alphonse), avocat. — Taormina (Sicile — Italie).

Granito di Belmonte (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Vienne.

Grégoire (Abbé Victor), professeur à l'Université, 44, rue de Bériot. — Louvain.

Greindl (Bon), capitaine commandant d'État-Major, professeur à l'École de guerre, 19, rue Tasson-Snel. — Bruxelles.

Grinda (Jesús), ingénieur des ponts et chaussées, Fuencarral, 74 y 76. — Madrid.

de Grossouvre (A.), ingénieur en chef des mines, 4, rue Petite Armée. — Bourges (Cher — France).

Guelton (Georges), attaché au Ministère de l'Intérieur et de l'Instruction publique, 119, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Guermonprez (Dr), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 63, rue d'Esquermes. — Lille (Nord — France).

Hachez (F.), professeur à l'Université de Louvain, 19, rue de Pavie. — Bruxelles.

Hagen, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire du Vatican. — Rome.

Haibe (Dr Achille), directeur de l'Institut provincial de Bactériologie, rue Louise. — Namur.

Halot (Alex.), consul du Japon, secrétaire du Conseil supérieur de l'État indépendant du Congo, 318, avenue Louise. — Bruxelles.

Hamonet (Abbé), professeur à l'Institut catholique, 74, rue de Vaugirard. — Paris.

Hans (Jules), lieutenant d'artillerie, 86, avenue Émile Beco. — Ixelles.

Harmant (Émile), ingénieur, 121, rue de Pâturages. — Wasmes.

Haton de la Goupillière (J.-N.), membre de l'Institut, directeur honoraire de l'École des mines, 56, rue de Vaugirard. — Paris.

Havenith (J.), lieutenant adjoint d'État-Major, 128, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

Hebbelynck (Mgr A.), recteur magnifique de l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.

Hélin (Henri), 485, chaussée de Waterloo. — Ixelles (Bruxelles).

Helleputte (G.), Ministre des Chemins de fer, Postes et Télégraphes. — Bruxelles.

de Hemptinne (Alexandre), professeur à l'Université de Louvain. 51, rue Basse des Champs. — Gand.

Henrard (Dr Étienne), 105, avenue du Midi. — Bruxelles.

Henrard (Dr Félix), 216, boulevard du Hainaut. — Bruxelles.

Henry (Albert), avocat, 45, rue de la Ruche. — Bruxelles.

Henry (Comdt J.), boulevard Dolez. — Mons.

Henry (Louis), professeur à l'Université, correspondant de l'Institut, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

Henry (Paul), professeur à l'Université, 11, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Henseval (Dr Maurice), inspecteur chargé de la direction du laboratoire du service de santé et d'hygiène, 178, avenue Georges-Henri. — Bruxelles.

Hervier (Abbé Joseph), 31, Grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

Heylen (S. G. Mgr), évêque de Namur.

Heymans (J. F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 7, boulevard de l'Hospice. — Gand.

Heynen (Dr W.), membre de la Chambre des Représentants. — Bertrix (prov. de Luxembourg); ou, 85, rue du Commerce. — Bruxelles.

Humbert (G.), membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École polytechnique, 10, rue Daubigny. — Paris.

Huwart (Jules), directeur du laboratoire de recherches relatives à la pêche maritime, 11, rue du Vélodrome. — Ostende.

Huyberechts (Dr Th.), 10, rue Hôtel des Monnaies. — Bruxelles.

Iniguez y Iniguez (Francisco), catedrático de astronomia en la Universidad, director del Observatorio astronomico. — Madrid.

Institut Saint-Ignace, 47, courte rue Neuve. — Anvers.

Jacobs (Mgr), curé-doyen émérite de Sainte-Gudule, 246, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

Jacobs (Fernand), président de la Société belge d'astronomie, 21, rue des Chevaliers. — Bruxelles.

Jacopssen, S. J. (R. P. Raymond), Collège Notre-Dame, 30, rue des Augustins. — Tournai.

Janssens (Félix), avocat, 29, rue Ernest Solvay. — Ixelles (Bruxelles).

Javaux (D^{r}), 79, rue des Éburons. — Bruxelles.

de Joannis (Abbé Joseph), 7, rue Coëtlogon. — Paris.

Joly (Albert), juge au tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.

Joly (Léon), conseiller au Conseil des Mines, 56, avenue Brugmann. — Bruxelles.

Jordan (Camille), membre de l'Institut, professeur à l'École polytechnique, 48, rue de Varenne. — Paris.

Jourdain (Louis), ingénieur, 12, rue Montagne-aux-Herbes-Potagères. — Bruxelles.

Kaisin (Félix), professeur à l'Université, Institut géologique, 10, rue Saint-Michel. — Louvain ; ou, Floreffe (Namur).

Kersten (Joseph), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Kieffer (Abbé J.-Jacques), professeur au Collège Saint-Augustin. — Bitsch (Lorraine — Allemagne).

Kirsch, C. S. C. (R. P. Alexandre-M.), Université de Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

Kirsch (Mgr J.-P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).

de Kirwan (Charles), ancien inspecteur des forêts, Villa Dalmassière. — Voiron (Isère — France).

Koltz (Eugène), ingénieur, 184, rue de Malines. — Louvain.

Kowalski (Eug.), ingénieur des arts et manufactures, 18, rue d'Alzon. — Bordeaux (Gironde — France).

Kurth (Godefroid), membre de l'Académie royale de Belgique, Assche. — Ou Institut historique belge, place Resticucci. — Rome.

Laflamme (Mgr), Université Laval. — Québec (Canada).

Lagasse-de Locht (Charles), inspecteur général des ponts et chaussées, directeur général au ministère des Travaux publics, président de la Commission royale des monuments, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

Lahousse (D^{r}), professeur à l'Université, S^{t}-Denis-Westrem.

LAMBERT (Camille), ingénieur en chef des chemins de fer de l'État. — Woluwe-Saint-Lambert (prov. de Brabant).

LAMBERT (Maurice), ingénieur. — Woluwe-Saint-Lambert (prov. de Brabant).

LAMBIN (A.), ingénieur des ponts et chaussées, secrétaire du cabinet du Ministre des Finances et des Travaux publics. 181, avenue de Tervueren. — Woluwe-lez-Bruxelles.

LAMBIOTTE (Omer), directeur-gérant des charbonnages Élisabeth. — Auvelais (prov. de Namur).

LAMBIOTTE (Victor), ingénieur, directeur-gérant des charbonnages d'Oignies-Aiseau, par Tamines (prov. de Namur).

LAMBO, S. J. (R. P. Charles), Collège Saint-Louis, 61, quai de Longdoz. — Liége.

LAMBOT (Oscar), professeur à l'Athénée royal d'Ixelles, 89, chaussée Saint-Pierre. — Bruxelles.

LAMINNE (Chanoine Jacques), professeur à l'Université, 7B, rue de Bériot. — Louvain.

LANNOY, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

LARUELLE (Dr), 22, rue du Congrès. — Bruxelles.

LAURENT (Dr Camille), 5, rue Joseph Jacquet. — Bruxelles.

DE LAVELEYE (Paul), 16, rue de Neuchâtel. — St-Gilles (Bruxelles).

LEBRUN (Dr), rue de Bruxelles. — Namur.

LEBRUN (Dr Hector), 25, avenue Verte. — Woluwe-Saint-Pierre.

LECHALAS (G.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, 13, quai de la Bourse. — Rouen (Seine-Inférieure — France).

LECLERCQ (Jules), vice-président au tribunal de première instance, membre de l'Académie royale de Belgique, 89, rue de la Loi. — Bruxelles.

LECONTE (Félix), installations électriques, 1, rue des Arts. — Lille (Nord-France) ; ou, 25, rue Royale. — Tournai.

LEFEBVRE (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.

LEFEBVRE (R. P. Maurice), docteur en sciences naturelles, missionnaire, Roman catholic church. — Manilla (Philippines).

LEGRAND (Chanoine Alfred), 37, rue de Bruxelles. — Namur.

LEIRENS-ÉLIAERT, rue du Pont. — Alost.

Lejeune de Schiervel (Charles), ingénieur des mines, 23, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Lejeune-Simonis, château de Sohan. — Pepinster (prov. de Liége).

Lemaire (abbé), professeur au Petit Séminaire. — Malines.

Lemoine (Georges), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur de chimie à l'École polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris.

Lenoble, professeur aux Facultés catholiques, 28ter, rue Négrier. — Lille (Nord — France).

Le Paige (G.), membre de l'Académie royale de Belgique, Administrateur-Inspecteur de l'Université, Plateau de Cointe. — Liége.

Leplae (E.), professeur à l'Université, 74, rue de Namur. — Louvain.

Lesire, 14, rue Francart. — Bruxelles.

Lhoest (Henri), ingénieur, directeur des travaux des charbonnages Gosson-Lagasse. — Montegnée (prov. de Liége).

de Liedekerke de Pailhe (Cte Éd.), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

du Ligondès (Vte), colonel d'Artillerie en retraite, château de Rochefort. — Saint-Bonnet de Rochefort (Allier — France).

de Limburg-Stirum (Cte Adolphe), membre de la Chambre des Représentants, 72, rue du Trône. — Bruxelles.

Limpens (Émile), avocat. — Termonde.

de Locht (Léon), professeur à l'Université de Liége, château de Trumly. — Trooz (prov. de Liége).

Lucas, S. J. (R. P. J.-D.), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Maes (Abbé), curé de Saint-Job. — Uccle.

Maes, docteur en géographie, attaché au bureau ethnographique international, ancien observatoire. — Bruxelles.

Mansion (Paul), professeur à l'Université, inspecteur des Études à l'École préparatoire du génie civil et des Arts et Manufactures, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

Maréchal, S. J. (R. P. J.), docteur en sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Martin (Dr), 9, boulevard Ad aquam. — Namur.

Masen (Aimé), docteur en médecine, 30, rue Middelbourg. — Boitsfort.

Matagne (Henri), docteur en médecine, 31, avenue des Courses. — Bruxelles.

Maubert (Frère), des Frères des Écoles chrétiennes, au scolasticat de Jesu Placet. — Louvain.

de Maupeou (Cte), ingénieur, directeur du Génie maritime, 4, place du Gast. — Laval (Mayenne — France).

Meessen (Dr Wilhelm), 28, rue Froissard. — Bruxelles.

de Meeus (Cte Henri), ingénieur, rue du Vert-Bois. — Liége.

Mercier (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.

de Mérode-Westerloo (Cte), président du Sénat, rue aux Laines. — Bruxelles.

Merten (Albert), ingénieur, 83, rue Digue de Brabant. — Gand.

Meunès (Dr), 21, Rosier. — Anvers.

Meunier (Fernand), conservateur du Musée de la Société royale de zoologie d'Anvers, professeur à l'Institut supérieur pour jeunes filles, Villa de l'Espérance. — Edeghem (Anvers).

Meuwissen, ingénieur, professeur à l'Université, 1, avenue Clémentine. — Gand.

Miranda Bistuer (S. G. Mgr), évêque de Ségovie (Espagne).

Moëller (Dr A.), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

Moëller (Dr Nicolas), 18, rue Ortélius. — Bruxelles.

de Moffarts (Bon Paul), château de Botassart, par Noirefontaine (prov. de Luxembourg).

de Monge (Vte Joseph), ingénieur, 12, rue Marie-de-Bourgogne. — Bruxelles.

de Monge (Vte Paul), château de Wallay. — Ohey (prov. de Namur).

de Montessus de Ballore (Cte F.), Directeur du service sismologique du Chili, 302, Av. Republica. — Santiago (Chili).

de Montessus de Ballore (Vte Robert), professeur suppléant à l'Université catholique, 8, place Genevières. — Lille (Nord — France).

de Moreau d'Andoy (Bon), 11, rue Archimède. — Bruxelles.

Morelle (Dr Aimé), chef du service d'urologie et de dermatologie à l'Institut chirurgical, 26, rue Archimède. — Bruxelles.

Moreux (Abbé Th.), Directeur de l'Observatoire. — Bourges (Cher — France).

Morisseaux, directeur général au Ministère de l'Industrie et du Travail, 25, rue du Berceau. — Bruxelles.

Mullie (Gilbert), inspecteur vétérinaire adjoint au Ministère de l'Agriculture, 23, avenue Jean Linden. — Bruxelles.

Muthnon, S. J. (R. P.), Kasteel. — Gemert (Hollande).

Nava di Bontifé (S. É. le cardinal), archevêque de Catane (Sicile — Italie).

Navas, S. J. (R. P. Longin), Colegio del Salvador. — Zaragoza (Espagne).

Nerincx (Alfred), professeur à l'Université de Louvain, secrétaire de l'Institut de Droit international, 8, rue Bosquet.— Saint-Gilles (Bruxelles).

Neuberg (J.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue de Selessin. — Liége.

Newton (Général John), 279, Adelphi street. — Brooklyn (New-York — États-Unis).

Noguier de Malijay (Abbé N.), professeur de sciences, 14, rue de Bagneux. — Paris (VI^e).

Nollée de Noduwez, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, camérier secret de S. S. Pie X, 14, avenue de Marnix. — Bruxelles.

Nys (Chanoine), professeur à l'Université, président du Séminaire Léon XIII, 6, rue Vésale. — Louvain.

Nyssens (Julien), ingénieur, 44, rue Juste-Lipse. — Bruxelles.

Nyssens (Pierre), directeur du Laboratoire agricole de l'État, 16, rue du Jambon. — Gand.

Obeso, S. J. (R. P. J. Manual), Colegio de Estudios Superiores de Deusto. — Bilbao (Espagne).

d'Ocagne (Maurice), ingénieur en chef des ponts et chaussées, répétiteur à l'École polytechnique, 30, rue de la Boëtie. — Paris.

Œhlert (D.-P.), correspondant de l'Institut, conservateur du Musée d'histoire naturelle, 29, rue de Bretagne. — Laval (Mayenne — France).

d'Orjo de Marchovelette (Major adjoint d'État-Major), chef du Cabinet du Ministre de la Guerre, 97, rue Froissard. — Bruxelles.

Pasquier (Alfred), docteur en médecine. — Châtelet (Hainaut).

Pasquier (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse, — Louváin.

Pauwels, S. J. (R. P. J.), docteur en sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Peeters (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournai,

Picard (E.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 4, rue Bara. — Paris (VI^e).

Pieraerts (J.), professeur à l'Université, 19, rue Notre-Dame. — Louvain.

de Pierpont (Édouard), château de Rivière. — Profondeville (prov. de Namur).

Pierre (Abbé Oscar), professeur au Collège de Belle-Vue.— Dinant.

Poskin (Paul), professeur de Physique à l'Institut agricole de l'État. — Gembloux).

Poullet (Prosper), associé de l'Institut de Droit international, professeur à l'Université, 28, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Proost (Alphonse), directeur général de l'Office rural, 18, rue de l'Arbre bénit, Ixelles ; ou, Mousty-lez-Ottignies (Brab^t).

Proost (Chanoine), aumônier de la Cour, rue Mercelis. — Ixelles (Bruxelles).

Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale. — Bruxelles.

Rachon (Abbé Prosper), curé de Ham, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

Raclot (Abbé V.), aumônier des Hospices et directeur de l'Observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).

Rector (R. P.) del Colegio Catolico del Sagrado Corazon de Jesus, calzada del Aguazul (Antiguo velodromo). — Puebla (Mexique).

Rector (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

Renaud, professeur de métallurgie à l'Université, 22, quai des Moines. — Gand.

Renier (Armand), ingénieur au Corps des mines, 74, rue Fabri. — Liége.

de **Renette de Villers-Perwin** (B^{on}), capitaine-commandant adjoint d'État-Major au 2^{me} Guides, 69, rue d'Arlon. — Bruxelles.

de **Reul** (Gustave), ingénieur, directeur de l'École industrielle, 10, boulevard Cauchy. — Namur.

de **Ribaucourt** (C^{te}), 27, rue de Loxum. — Bruxelles ; ou, château de Perck, par Vilvorde (Brabant).

de **Ribaucourt** (C^{te} Adrien), ingénieur agricole, 344, avenue Louise. — Bruxelles.

Richald (Jos.), ingénieur principal des ponts et chaussées, professeur à l'Université de Gand, 69, rue Archimède. — Bruxelles.

Rinaldini (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Madrid.

Roberti (Max), notaire, rue de Namur. — Louvain.

Rodriguez Risueno (Emiliano), catedrático de historia natural en la Universidad, 16, prâl, calle Duque de la Victoria. — Valladolid (Espagne).

Roersch (A.), professeur à l'Université, 75, rue de l'Avenir. — Gand.

Rogie (D^{r}), professeur à la Faculté catholique de Médecine, 108, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Roland Pierre, ingénieur, 55, rue Vital Decoster. — Louvain.

Roux (Cl.), professeur aux Facultés catholiques, 25, rue du Plat. — Lyon (Rhône — France).

Rutten (S. G. Mgr), évêque de Liége.

Ryan (Hugh), M. A., F. R. U. I., membre de l'Académie royale irlandaise, professeur de chimie à l'École de médecine de l'Université catholique, au Collège de l'Université de Dublin et au Collège Saint-Patrick de Maynooth, Medical School, Cecilia Street. — Dublin (Irlande).

Sabatier (Paul). professeur de chimie à l'Université. — Toulouse (Haute-Garonne. — France).

de **Saintignon** (C^{te}), maître de Forges. — Longwy-Bas (Meurthe-et-Moselle — France).

de **Salvert** (V^{te}), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 45, rue des Missionnaires. — Versailles (Seine-et-Oise — France) ; ou, château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loir — France).

Sanz (Pelegrin), ingeniero de caminos, 5, 2°, calle Bordadores. — Madrid.

Sarret (Jean), agrégé à l'Université, professeur de physique au Lycée Impérial Ottoman, 13, rue Aïnali tchesmé. — Constantinople (Turquie).

Schaffers, S. J. (R. P. V.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Scheuer, S. J. (R. P. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Schmidt (Alfred), chimiste de la maison E. Leybold's Nachfolger, 7, Bruderstrasse. — Cologne (Allemagne).

Schmitz, S. J. (R. P. G.), directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Schmitz (Théodore), ingénieur civil des mines, 31, rue Jordaens.— Anvers.

Schockaert (R.), professeur à l'Université, 13, place du Peuple.— Louvain.

Schollaert, Ministre de l'Intérieur et de l'Agriculture. — Bruxelles, ou Vorst (prov. d'Anvers)

Schoolmeesters (Mgr Émile), vicaire-général, 14, rue de l'Évêché. — Liége,

Schoonjans, S. J. (P. Ch.) Milltown Park. — Milltown, Co Dublin (Irlande).

Schreiber, agronome de l'État. — Hasselt.

Schul (R. P. J.), S. J., 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Selliers de Moranville (Ch^{er} A.), Général-major commandant la Gendarmerie nationale, 46, chaussée de Charleroi. Bruxelles.

Grand Séminaire de Bruges.

Senderens (Abbé), professeur à l'Université catholique, 36, rue de la Fonderie. — Toulouse (Haute-Garonne — France).

Sentroul (Abbé), professeur à la Faculté libre de Philosophie et lettres. Mosteiro de Sao Bento. — Sao Paulo (Brésil).

Sépulchre (Émile), ingénieur, château d'Awans. — Bierset-Awans (prov. de Liége).

Sibenaler (N.), professeur à l'Université, 31, boulevard de Jodoigne. — Louvain.

Siéges, 93, rue du Trône. — Bruxelles.

SIMON (Dr), 134, rue de la Loi. — Bruxelles.

SIMONART (Dr), 33A, rue du Canal. — Louvain.

DE SINÉTY, S. J. (R. P. Robert), professeur, Kasteel. — Gemert (Hollande).

SIRET (Henri), ingénieur, directeur général de la Cie des Chemins de fer du Congo Supérieur aux grands lacs africains, 27, avenue Brugmann. — Bruxelles.

SIRET (Louis), ingénieur, 55, rue Sandérus. — Anvers.

SLINGENEYER DE GOESWIN, Capitaine commandant d'État-major, Écuyer, 62, avenue Isabelle. — Anvers.

SMEDTS (Arthur), répétiteur à l'Université, 58, boulevard de la Citadelle. — Gand.

SMEKENS (Théophile), président honoraire du tribunal de 1re instance, 34, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

SMETS (Dr), 104, rue Van de Weyer. — Bruxelles.

SMITS (Eugène), ingénieur, rue Marie-Thérèse. — Bruxelles.

SOISSON (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur à l'Athénée grand-ducal, 19, rue Joseph II. — Luxembourg (Grand-Duché).

SOLANO Y EULATE (José Maria), Marqués del Socorro, professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, 41, bajo, calle de Jacometrezo. — Madrid.

SOLÉ (Dr Victor), 262, rue Royale. — Bruxelles.

SOMVILLE (Oscar), docteur en sciences physiques et mathématiques, 120, rue Beeckman. — Uccle (Bruxelles).

DE SPARRE (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins ; ou, 7, avenue de l'Archevêché. — Lyon (Rhône — France).

SPRINGAEL (Auguste), ingénieur, 74, rue De Locht. — Schaerbeek.

STAINIER (Xavier), professeur à l'Université de Gand, membre de la Commission géologique de Belgique, 27, Coupure. — Gand.

VAN DEN STEEN DE JEHAY (Cte Frédéric), chef du Cabinet du Ministre des Affaires Étrangères, château de Bassinnes, par Avins-en-Condroz (prov. de Namur) ; ou, 202, rue de la Loi. — Bruxelles.

STILLEMANS (S. G. Mgr), évêque de Gand.

Stinglhamber (Émile), docteur en droit, 43, avenue Ernestine. — Bruxelles.

Stoffaes (Chan.), professeur à la Faculté catholique des Sciences, directeur de l'Institut des Arts et Métiers, 6, rue Auber. — Lille (Nord — France).

Storms (Ernest), ingénieur, 6, rue du Receveur. — Bruges.

Stouffs (Dr), rue de Charleroi. — Nivelles.

Stouffs (Dr Jules), 205, avenue Louise. — Bruxelles.

Struelens (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Supérieur du Collège des Joséphites, Vieux-Marché. — Louvain.

Supérieur du Collège Saint-Jean-Berchmans, 35, place de Meir. — Anvers.

Suttor, ingénieur honoraire des ponts et chaussées, 19, rue des Bogards. — Louvain.

Swolfs (Chan.), inspecteur diocésain, 46, avenue Henri Speecq.— Malines.

Swolfs (Dr Oscar), 59, rue Vilain XIIII. — Bruxelles.

Taymans (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).

Théron (Joseph), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée, 26, rue Marnix. — Gand.

Thiébaut (Fernand), industriel, bourgmestre de Monceau-sur-Sambre (prov. de Hainaut).

Thiéry (Chan. Armand), Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Thirion, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Thiry (François), bourgmestre. — Pecq (prov. de Hainaut).

Tibbaut (Émile), avocat à la Cour d'Appel, membre de la Chambre des Représentants, 4, avenue de l'Astronomie. — Bruxelles.

Timmermans (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 22, rue de Fragnée. — Liége ; ou, Seraing (prov. de Liége).

Tits (A.), oculiste, 49, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Tits (Abbé Léon), docteur en sciences physiques et mathématiques, Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Torroja Caballe (Eduardo), architecte, professeur de géométrie

descriptive à la Faculté des sciences de l'Université, membre correspondant de l'Académie royale des Sciences, 9-11e rue Requena. — Madrid.
DE TRAZEGNIES (Mis). — Corroy-le-Château, par Mazy (prov. de Namur) ; ou, 23, rue de la Loi. — Bruxelles.
DE T'SERCLAES (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome,
DE T'SERCLAES (Cte Jacques), colonel, chef d'État-Major, professeur à l'École de guerre, 34, rue Jordaens. — Ixelles, (Bruxelles).
D'URSEL (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant) ; ou, 25, rue de la Science. — Bruxelles.
DE LA VALLÉE POUSSIN (Ch.-J.), correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 38, rue Léopold. — Louvain.
VAN AUBEL (Dr Ch.), directeur de la Maternité Sainte-Anne, 43, rue Boduognat. — Bruxelles.
VAN BALLAER (Chanoine), curé de N.-D. du Sablon, 6, rue Bodenbroeck. — Bruxelles.
VAN BASTELAER (Léonce), ingénieur civil des mines, 13, rue Newton. — Bruxelles.
VAN BIERVLIET (J.), professeur à l'Université, 5, rue Metdepenningen. — Gand.
VAN BRABANDT (L.), ingénieur des ponts et chaussées, 20, rue du Grand Chien. — Anvers.
VAN CAENEGHEM (Abbé F.), directeur de l'École Supérieure commerciale et consulaire, Grand'Place. — Mons.
VAN DEN BOSSCHE (Abbé). — Ophasselt (Flandre Orientale).
VAN DEN BOSSCHE (G.), professeur à l'Université, 14, rue Basse. — Gand.
VAN DEN GHEYN (Chanoine Gabriel), supérieur de l'Institut Saint-Liévin. — Gand.
VAN DEN GHEYN, S. J. (R. P. Joseph), conservateur à la Bibliothèque royale, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
VANDENPEEREBOOM (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.
VANDERLINDEN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, administrateur-inspecteur de l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

VANDERLINDEN (E.), assistant au service météorologique de l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).

VAN DER MENSBRUGGHE (A.), 131, Coupure. — Gand.

VAN DER MENSBRUGGHE (G.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur émérite de l'Université, 131, Coupure. — Gand.

VAN DER MENSBRUGGHE (R.), ingénieur des Chemins de fer de l'État, 131, Coupure. — Gand.

VAN DER SMISSEN (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége et à l'École de Guerre, 13, rue des Cultes. — Bruxelles.

VANDERSTRAETEN (Dr A.), 68, rue du Trône. — Bruxelles.

VAN DER VAEREN, agronome de l'État, 220, chaussée d'Alsemberg, — Uccle (Bruxelles).

VANDEVYVER, professeur à l'Université, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.

VANDEVYVER (M.), docteur en droit, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.

VAN DURME, docteur en médecine, professeur à l'Université, 5, rue du Séminaire. — Gand.

VAN GEHUCHTEN (A.), professeur à l'Université, 36, rue Léopold. — Louvain.

VAN HOECK (Dr Ém.), 13, rue Traversière. — Bruxelles.

VAN KEERBERGHEN, docteur en médecine, 21, rue du Trône. — Bruxelles.

VAN LAETHEM (Dr Alban), 426, chaussée d'Alsemberg. — Uccle (Bruxelles).

VAN MOLLÉ (Abbé J.), professeur au Petit Séminaire. — Malines.

VANNUTELLI (S. É. le cardinal Séraphin). — Rome.

VAN ORTROY (Fernand), professeur à l'Université, 37, quai des Moines. — Gand.

VAN SWIETEN (Raymond), 80, avenue de la Toison d'or. — Bruxelles.

VAN VELSEN, docteur en médecine, 270, rue Royale. — Bruxelles.

VAN YSENDYCK (William), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

VERHELST (abbé F.), aumônier du Pensionnat du Sacré-Cœur, 24, rue d'Oultremont. — Bruxelles.

VERMEERSCH, S. J. (R. P. A.), docteur en droit et en sciences politiques et administratives, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Verriest (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verriest (Gustave), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, 49, rue du Canal. — Louvain.

Verschaffel (A.), chargé des travaux astronomiques à l'Observatoire d'Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Versteylen, membre de la Chambre des Représentants, rue d'Hérenthals. — Turnhout.

Vervaeck, docteur en médecine, 4, place de la Chapelle. — Bruxelles.

Viaene, docteur en géographie, attaché au bureau ethnographique international, 67, rue Van der Borght. — Jette-Saint-Pierre.

Vicent, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).

Visart de Bocarmé, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.

Visart de Bocarmé (C^{te} Amédée), membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre de Bruges.

Voituron, inspecteur au Ministère de l'Agriculture, 34, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

Vollen (E.), avocat-avoué, place du Peuple. — Louvain.

de Vorges (Albert), 4, avenue Thiers. — Compiègne (Oise — France).

de Vorges (C^{te} E. Domet), 46, rue du Général Foy. — Paris.

de Vrégille, S. J. (R. P.), Collège de la S^{te} Famille. — Caire (Égypte).

Waffelaert (S. G. Mgr), évêque de Bruges.

Walravens (S. G. Mgr), évêque de Tournai.

Warlomont (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de régiment de 1re classe à l'Institut ophtalmique de l'armée, 66, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Wasmann (R. P.), S. J., Bellevue. — Luxembourg.

Wasteels (C.), répétiteur à l'Université, 17, rue d'Akkergem. — Gand.

Waucquez (Victor), avocat, 65, rue des Tanneurs. — Bruxelles.

de Wavrin (M^{is}), 3, place du Comte de Flandre. — Gand.

Wéry (Dr Aug.). — Selayn (prov. de Namur).

Wibo (Dr Maurice), 39, rue Duquesnoy. — Bruxelles.

Willaert, S. J. (R. P. Fernand), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Willame (Aimé), ingénieur, 21, place Dailly. — Schaerbeek.

Wilmart (L.), 169, rue de Livourne. — Bruxelles.

Wilmotte (Abbé). — Saint-Servais (Namur).

Wittmann (Dr Jules), 3, rue du Sac. — Malines.

Witz (Aimé), correspondant de l'Institut, professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Wolf (C.), membre de l'Institut, 36, avenue de l'Observatoire. — Braine (Aisne — France).

Wolters (Frédéric), ingénieur principal des ponts et chaussées, professeur à l'Université, 17, avenue des Moines. — Gand.

Wolters (G.), administrateur-inspecteur honoraire de l'Université de Gand, inspecteur général honoraire des ponts et chaussées, 192, rue des Entrepreneurs. — Mont-Saint-Amand (Gand).

de Wouters d'Oplinter (Cher Fernand), 9, rue du Commerce. — Bruxelles.

Wulf, S. J. (R. P. Th.), professeur de physique au Collège Saint-Ignace. — Fauquemont (Limbourg Hollandais).

Zech (Abbé), professeur à l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Zeiller (René), membre de l'Institut, professeur à l'École supérieure des mines, 8, rue du Vieux-Colombier. — Paris.

Liste géographique des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1909)

BELGIQUE

Flandre Occidentale : **Bruges :** Coppieters de Stockhove (Abbé Ch.). — Grand Séminaire. — Visart de Bocarmé (C^{te} A.). — S. G. Mgr Waffelaert.

Iseghem : Gillès de Pélichy (B^{on} Ch.). — **Ostende :** Huwart. — **Pitthem :** Claerhout (Abbé J.). — **Roulers :** Dumez (Abbé R.). — **Ypres :** De Brouwer (Mich.). — De Brouwer (Chan.).

Flandre Orientale : **Gand :** van der Bruggen (B^{on}). — Cooreman (G.). — Crame (Aug.). — De Baets (H.). — De Bloo (J.). — Declercq. — De Moor (D^{r}). — Dumortier. — Dusausoy (Cl.). — Dutordoir (H.). — Gesché (L.). — Gilson. — de Hemptinne (A.), Heymans (J.-F.). — Mansion (P.). — Merten (Alb.). — Meuwissen. Nyssens (P.). — Renaud. — Roersch (A.). — Stainier (X.). — S. Gr. Mgr Stillemans. — Théron (J.). — Van Biervliet (J.). — Van den Bossche (G.). — Van den Gheyn (Chan. G.). — Vanderlinden. — Van der Mensbrugghe (A.). — Van der Mensbrugghe (G.). — Van der Mensbrugghe (R.). — Vandevyver. — Vandevyver (M.). — Van Durme (D^{r}). — Van Ortroy F.). — Wasteels (C.). — de Wavrin (M^{is}). — Wolters (F.).

Alost : Bauwens (D^{r} Isid.). — Collège Saint-Joseph. — Leirens-Eliaert. — **Mont-Saint-Amand** (Gand) : Wolters (G.). — **Ophasselt :** Van den Bossche (abbé). — **Termonde :** Limpens (Émile). — **Saint-Denis-Westrem :** Lahousse (D^{r}).

Province d'Anvers : **Anvers :** Alliaume (M.). — Belpaire (F.). — Cogels (J.-B.-Henri). — Dubois (E.). — Institut Saint-Ignace. — Meunès. — Schmitz (Th.). — Siret (L.). — Slingeneyer de Goeswin (C^{ne} Ecuyer). — Smekens (Th.). — Supérieur du Collège Saint-Jean-Berchmans. — Van Brabandt.

Edeghem : Meunier (F.). — **Gheel** : Deroitte (D^{r} V.). — **Malines** : S. G. Mgr van den Branden de Reeth. — Dessain (Ch.). — Gautier (Chan.). — Lemaire (Abbé). — S. É. le cardinal Mercier. — Swolfs (Chan.). — — Van Mollé (Abbé J.). — Wittmann (D^{r} J.). — **Mélis** : de Beughem de Houtem (V^{te}). — **Turnhout** : Versteylen.

Limbourg : **Hasselt** : Schreiber. — **'s Heeren-Elderen** : Boule (R. P. S. J.).

Luxembourg : **Bertrix** : Heynen (W.). — **Noirefontaine** : de Moffarts (B^{on} P.). — **Virton** : Cabeau (Abbé Ch.).

Brabant : **Bruxelles** : André (J.-B.). — Bayet (A.). — Beernaert (Aug.). — Bertrand (L.). — de Béthune (B^{on} G.). — de Bien (F.). — de la Boëssières-Thiennes (M^{is}). — de Briey (C^{te} R.). — Brifaut. — Carlier (J.). — Cartuyvels (J.). — Cocheteux (Chan.). — Collège Saint-Michel (R. P. H. Bosmans, S. J.). — Coomans (L.). — Coomans (V.). — Cousin (L.). — Craninx (B^{on} O.). — Cuylits (D^{r} J.). — Davignon (J.). — De Brabandère. — De Coster (C.). — Degive. — De Grave (D^{r}). — De Greef. — Dejardin. — De Jonghe. — De Lantsheere (D^{r} J.). — De Lantsheere (L.) — Delcroix (D^{r} A.). — Delétrez (D^{r} A.). — De Preter (H.). — De Smedt, S. J. (R. P. Ch.). — De Wildeman (É.). — Duplat. — Dupont (E.). — Dutillieux (M.). — Eeckhout (G.). — Fagnart (E.). — de Favereau de Jenneret (B^{on}). — Fernandès (D^{r} R.). — de Garcia de la Vega (B^{on} V.). — Gendebien. — Gérard (E.). — Glorieux (D^{r}). — Goffart. — Gollier (Th.). — Goris (Ch.). Greindl (B^{on}). — Hachez (F.). — Halot (A.). — Havenith. — Hélin (E.). — Helleputte (G.). — Henrard (D^{r} E.). — Henrard (D^{r} F.). — Henry (A.). — Henseval (D^{r} M.). — Heynen (W.). — Huybrechts (D^{r} Th.). — Mgr Jacobs. — Jacobs (F.). — Javaux (D). — Joly (A.). — Joly (L.). — Jourdain (L.). — Kersten (J.). — Lagasse-de-Locht (Ch.). — Lambot (O.). — Laruelle (D^{r}). — Laurent (D^{r} C.). de Laveleye. — Leclercq (J.). — Lejeune de Schiervel (Ch.). — de Liedekerke de Pailhe (C^{te} Éd.). — de Limburg-Stirum (C^{te} Ad.). — Maes. — Matagne (D^{r} H.). — Meessen (D^{r} W.). — de Mérode-Westerloo (C^{te}). — Moëller (D^{r}). — Moëller (D^{r} N.). — de Monge (V^{te} J.). — de Moreau d'Andoy (B^{on}). —

Morelle (Dr A.). — Morisseaux. — Mullie (G.). — Nollée de Noduwez. — Nyssens (J.). — d'Orjo de Marchovelette (major). — Proost (A.). Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus. — de Rennette de Villers-Perwin (Bon). — de Ribaucourt (Cte). — de Ribaucourt (Cte Adrien). — Richald (I.). — Schollaert. — de Selliers de Moranville (Cher A.). — Sièges. — Simon (Dr). — Siret (H.). — Smets (Dr). — Smits (E.). — Stinglhamber (É.). — Stouffs (Dr J.). — Swolfs (Dr O.). — Solé (Dr). — Tibbaut. — Tits (Abbé L.). — de Trazegnies (Mis). — d'Ursel (Cte A.). — Van Aubel (Ch.). — Van Ballaer (Ch.). — Van Bastelaer (L.). — Van den Gheyn, S. J. (R. P. J.). — Van der Smissen (Éd.). — Vanderstraeten (Dr A.). — Van Hoeck (Dr Ém.). — Van Keerberghen (Dr). — Van Swieten (R.). — Van Velsen (Dr). — Van Ysendyck (Dr). — Verhelst (Abbé F.). — Vervaeck (Dr). — Voituron (Dr). — Warlomont (Dr R.). — Waucquez (V.). — Wibo (Dr W.). — Wilmart (L.). — de Wouters d'Oplinter (Cher F.). — Zech.

Assche : Kurth. — **Auderghem** : Capart (J.). — **Boitsfort** : **Etterbeek** : François. — **Ixelles** (Bruxelles) : Beaujean (Ch.). — Deleu (L.). — De Vadder (V.). — Godfrind (V.). — Hans (J.). — Janssens. — Lesire. — Proost (Chan.). — de T'Serclaes (Cte J.). — **Jette-Saint-Pierre** : Giele (Dr Fréd.). — Viaene.

Louvain : Breithof (F.). — Bruylants. — Cappellen (G.). — Charles, S. J. (R. P. J.). — Collège Saint-Jean-Berchmans. — Daubresse (P.). — Debaisieux. — De Becker (Chan. J.). — Demanet (Chan.). — De Muynck (Chan. R.). — Denys (Dr J.). — Deploige (Mgr). — De Walque (F.). — de Dorlodot (Chan. H.). — Dumont (A.). — Dupriez. — Fenaux (Éd.). — Fournier, O. S. B. (Dom. Gr.). — Gaillard, S. J. (R. P. J.). — Grégoire (Abbé V.). — Guelton (G.). — Mgr A. Hebbelynck. — Henry (L.). — Henry (P.). — Kaisin (F.). — Koltz (E.). — Laminne (Chan. J.). — Lannoy, S. J. (R. P. J.). — Mgr F. Lefebvre. — Leplae (E.). — Maréchal, S. J. (R. P. J.). — Maubert (Frère). — Micha. — Nys (Chan.). — Pasquier (Ern.). — Pauwels, S. J. (R. P. J.). — Pieraerts. — Poullet (Pr.). — Roberti (M.). — Roland (P.). — Schaffers, S. J. (R. P. V.). — Scheuer, S. J. (R. P. P.). — Schmitz, S. J. (R. P. G.). — Schockaert (R.). — Schul, S. J. (R. P.). — Sibenaler (N.). — Simonart (Dr). — Supérieur du Collège des Joséphites. — Suttor. — Thiéry (Abbé A.). — Thirion, S. J. (R. P. J.). — Tits (Dr A.).

— de la Vallée Poussin (Ch.-J.). — Van Gehuchten. — Vermeersch, S. J. (R. P. A.). — Verriest (Dr G.). — Verriest. — Vollen (E.). — Willaert, S. J. (R. P. F).

Mousty-lez-Ottignies : Proost (A.). — **Nivelles** : Stouffs (Dr). **Perck** (par Vilvorde) : de Ribaucourt (Cte). — **Saint-Gilles** (Bruxelles) : Nerincx (A.). — Struelens (Dr). — **Saint-Josse-ten-Noode** (Bruxelles) : Delvigne (Chan. A.). — **Schaerbeek** (Bruxelles) : Delmer. — Springael (Aug.). — Willame (A.). — **Tubize** : Taymans (É.). — **Uccle** (Bruxelles) : De Jaer (J.). — Delvosal (J.). — Denoël. — Glibert (Dr D.). — Maes (Abbé). — Smedts (Arthur). — Somville (O.). — Vanderlinden (É.). — Van Laethem (Dr). — **Wauthier-Braine** : d'Ursel (Cte A.). — **Woluwe-lez-Bruxelles** : Lambin (A.). — **Woluwe-Saint-Lambert** : Convent (Dr A.). — Lambert (C.). — Lambert (M.). — **Woluwe-Saint-Pierre** : Lebrun (Dr H.).

PROVINCE DE LIÉGE : **Liége** : Berleur (Ad.). — Collège Saint-Servais. — Duquenne (Dr L.). — Francotte (H.). — Francotte (Dr X.). — Lambo, S. J. (R. P. Ch.). — Le Paige (C.). — de Meeus (Cte H.). — Neuberg (J.). — Renier (A.). — S. G. Mgr Rutten. — Schoolmeesters (Mgr). — Timmermans (F.). — Vandenpeereboom (E.). **Bierset-Awans** : Sépulchre (É.). — **Huy** : Gelin (Abbé E.). — **Montegnée** : Lhoest (H.). — **Pepinster** : Lejeune-Simonis. — **Seraing** : Timmermans (F.). — **Stavelot** : David (P.). — **Trooz** : de Locht (L.).

PROVINCE DU HAINAUT : **Mons** : Dufrane (Dr). — Henry (Comt J.). — Van Caeneghem (Abbé F.).

Ath : Clément (Abbé H.). — **Châtelet** : Pasquier (Dr A.). — **Châtelineau** : Allard (F.). — **Couillet** : Dochain-Defer. — **Gosselies** : Drion (Bon Ad.). — **Monceau-sur-Sambre** : Thiébaut (F.). — **Pecq** : Thiry (Fr.). — **Péruwelz** : Delaunois (Dr G.). — **Tournai** : Blondel (A.). — Jacopssen, S. J. (R. P. R.). — Leconte (F.). — Peeters (J.). — S. G. Mgr Walravens. — **Wasmes** : Harmant.

PROVINCE DE NAMUR : **Namur** : Alexis-M. Cochet (Frère). — Attout-Van Cutsem. — Baivy (Dr). — Bibot (Dr). — Collège Notre-Dame de la Paix. — Castelein, S. J. (R. P.). — Dierckx, S. J.

(R. P. Fr.). — de Greeff, S. J. (R. P. H.). — Haibe (D^{r}). — S. G. Mgr Heylen. — Lebrun (D^{r}). — Legrand (Chan. A.). — Lucas, S. J. (R. P. J.-D.). — Martin (D^{r}). — de Reul (G.). — Visart de Bocarmé.

Auvelais : Lambiotte (O.). — **Bassinnes** (Avins-en-Condroz) : van den Steen de Jehay (C^{te} Fréd.). — **Corroy-le-Château** (Mazy) : de Trazegnies (M^{is}). — **Dinant** : Cousot (D^{r}). — Pierre (Abbé O.). **Floreffe** : Baseil (Abbé). — de Dorlodot (S.). — **Gembloux** : Bouckaert. — Poskin (P.). — **Heer-Agimont** : Gilbert (P.) — **Ohey** : de Monge (V^{te} P.). — **Profondeville** : de Pierpont (Éd.). — **Saint-Servais** : Wilmotte (Abbé). — **Sclayn** : Wéry (D^{r} A.). — **Tamines** : Lambiotte (V.).

FRANCE

Paris : Amagat. — Baclé (L.). — Béchaux. — Blondel. — Boussinesq. — Branly (Éd.). — Bulliot (J.). — Capelle (Abbé Éd.). — Dardel (D^{r}). — École libre de l'Immaculée-Conception. — École libre de Sainte-Geneviève. — Fauvel (A. A.). — de Foville (Abbé). — Mgr Graffin. — Hamonet (Abbé). — Haton de la Goupillière (J.-N.). — Humbert (G.). — de Joannis (Abbé). — Jordan (C.). — Lemoine (G.). — Noguier de Malijay (Abbé N.). — d'Ocagne (M.). — Picard (É.). — de Vorges (C^{te} E. Domet). — Zeiller (R.).

Départements : *Aisne* : **Braine** : Wolf. — *Allier* : **Cérilly** : Dumas-Primbault (H.). — **Saint-Bonnet de Rochefort** : du Ligondès (V^{te}). — *Alpes-Maritimes* : **Menton** : Farina (D^{r}). — **Nice** : Dardel (D^{r}). — *Aveyron* : **Penchot** (par Viviers) : Berlingin (M.). — *Basses-Pyrénées* : **Abbadia** (par Hendaye) : Verschaffel (A.). — *Bouches-du-Rhône* : **Marseille** : Bedel (Abbé R.). — Fabry (L.). — *Cher* : **Bourges** : de Grossouvre (A.). — Moreux (Abbé Th.). — *Côte-d'Or* : **Corberon** : Beauvois (Eug.). — *Drôme* : **Aiguebelle** (par Grignan) : Arduin (Abbé A.). — *Eure-et-Loir* : **Villebeton** (par Châteaudun) : de Salvert (V^{te}). — *Gironde* : **Bordeaux** : Duhem (P.). — Kowalski (Eug.). — *Haute-Garonne* : **Toulouse** : Sabatier (P.). — Senderens (Abbé). — *Haute-Marne* :

Langres : Raclot (Abbé V.). — *Isère* : **Lacombe de Lancey** (par Villard-Bonnot) : du Boys (P.). — **Voiron** : de Kirwan (Ch.). — *Loire* : **Saint-Étienne** : Grand'Eury (C.). — Hervier (Abbé J.). *Loiret* : **Orléans** : d'Annoux (Cte H.). — **Laval** : de Maupeou (Cte). Œhlert (D.-P.). — *Meurthe-et-Moselle* : **Ham** (par Longuyon) : Rachon (Abbé P.). — **Longwy** : de Saintignon (Cte). — *Nord* : **Cambrai** : Coulon (Dr). — **Lille** : d'Adhémar (Vte R.). — Barrois. — Mgr Baunard. — Bourgeat (Chan.). — Delemer (J.). — Desplats (Dr). — Desplats (Dr René). — D'halluin (Dr M.). — Duret (Dr). — Duthoit (E.). — Fenaert (Abbé). — Gosselet (J.). — Guermonprez (Dr). — Leconte (F.). — Lenoble. — de Montessus de Ballore (Vte R.). — Rogie (Dr). — Stoffaes (Chan.). — Witz (A.). — *Oise* : **Compiègne** : de Vorges (A.). — *Rhône* : **Lyon** : Roux (Cl.). — de Sparre (Cte). — **Saint-Georges de Reneins** : de Sparre (Cte). — *Savoie* : **Aix-les-Bains** : Dardel (Dr). — *Seine-et-Oise* : **Versailles** : Ariès (Lieutt-colonel). — de Salvert (Vte). — *Seine-Inférieure* : **Rouen** : Lechalas (G.). — *Vaucluse* : **Sérignan** (par Vaucluse) : Fabre (J.-H.).

ESPAGNE

Madrid : Adan de Yarza (B.). — Dusmet y Alonso (J.-M.). — Fita y Colomé, S. J. (R. P. F.). — Gonzalez de Castejon. — Grinda (J.). — Iniguez y Iniguez (Fr.). — S. Exc. Mgr Rinaldini. — Sanz (P.). — Solano y Eulate (Mis). — Torroja Caballe (Ed.). — **Barcelone** : Cirera y Salse (Dr L.). — **Bilbao** : Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — **La Coruña** : Casarès (F.). — **San Sebastian** : Balbas (Th.). — **Segovia** : S. G. Mgr Miranda Bistuer. — **Séville** : Abaurrea (L.). — **Tortosa** (Tarragona) : Cirera, S. J. (R. P. R.). — R. P. Rector del Colegio del Jesùs. — **Valencia** : Vincent, S. J. (R. P.). — **Valladolid** : Rodriguez-Risueno (E.). — **Zaragoza** : Navas, S. J. (R. P. L.).

PAYS DIVERS

Allemagne : **Bitsch** (Lorraine) : Kieffer (Abbé J.-J.). — **Bonn :** Caratheodory (Costa). — **Cologne** : Schmidt (A.).). — **Possenhofen** : S. A. R. Charles-Théodore, duc en Bavière.

Angleterre : **Dublin** (Irlande) : Coffey (D. J.). — Conway (A. W.). — Egan, S. J. (R. P. M.). — Ryan (H.). — Schoonjans, S. J. (R. P.). — **Saint-Hélier** (Jersey — Iles-de-la-Manche) : Dechevrens, S. J. (R. P. M.).

Autriche : **Vienne** : S. Exc. Mgr Granito di Belmonte.

Italie : **Rome** : S. É. le cardinal Ferrata. — Hagen, S. J. (R. P.). — Kurth. — Mgr Ch. de T'Serclaes. — S. É. le cardinal S. Vannutelli. — **Bologna** : Costanzo (R. P. J.). — **Catane** (Sicile) : S. É. le cardinal Nava di Bontifé. — **Padoue** : Carrara, S. J. (R. P. B.). — **Taormina** : Grandmont (Alph.).

Pays-Bas : **Fauquemont** (Limbourg hollandais) : Wulf, S. J. (R. P. Th.). — **Gemert** : Muthuon, S. J. (R. P.). — de Sinéty, S. J. (R. P. R.). — **Maestricht** : Bleuset, S. J. (R. P. J.). — **Oudenbosch** : Bolsius, S. J. (R. P. H.). — **Rotterdam** : De Veer, S. J. (R. P.).

Grand-Duché de Luxembourg : **Luxembourg** : Soisson (G.). — Wasmann, S. J. (R. P.).

Suisse : **Fribourg** : Daniels (Dr Fr.). — De Munnynck, O. P. (R. P.). — Kirsch (Mgr J.-P.).

Turquie : **Constantinople** : Sarrel (J.).

Canada : **Québec** : Mgr Laflamme.

États-Unis : **Brooklyn** (New-York) : Newton (Génér. J.). — **Notre-Dame** (Indiana) : Kirsch (R. P. Al. M.). — **Washington** : Georgetown College Observatory.

BRÉSIL : **Jaguarâo** : Boschmans (R. P.). — **Sao Paulo** : Sentroul (Abbé).

CHILI : **Santiago** : C^{te} de Montessus de Ballore.

MEXIQUE : **Puebla** : Colegio del Sagrado Corazon.

INDES ANGLAISES : **Calcutta** : Collège Saint-François-Xavier.

ÉGYPTE : **Caire** : de Vrégille, S. J. (R. P. P.).

SYRIE : **Beyrouth** : Collangettes, S. J. (R. P.).

CHINE : **Tientsin** : de Fooz (G.).

PHILIPPINES : **Manille** : Lefebvre (R. P. Maurice).

Membres décédés

BÉCHAMP	Paris.
DE BÉTHUNE (Mgr)	Bruges.
CAMBOUÉ, S. J. (R. P.)	Tananarive (Madagascar).
DE LAPPARENT	Paris.
KENNIS	Schaerbeek.
VAN DEN BRANDEN DE REETH (S. G. Mgr).	Malines.

Listes des membres inscrits dans les sections.

1re Section

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique.

MM. Vte d'Adhémar.
Alliaume.
Baclé.
Balbas.
Barbé.
Belpaire.
Berlingin.
Bon G. de Béthune.
de Bien.
R. P. H. Bosmans, S. J.
Boussinesq.
du Boys.
Breithof.
Carathéodory.
Abbé Coppieters de Stockhove.
R. P. J. Costanzo.
Cousin.
Crame.
Daniels.
Daubresse.
De Bloo.
De Coster.
Jules De Jaer.
Deleu.
Dusausoy.
Dutilleux.
Dutordoir.
R. P. M. Egan, S.J.
Fabry.
Fagnart.
de Fooz.
R. P. J. Gaillard, S. J.
Abbé Gelin.
Gilbert.
Godfrind.

MM. Goedseels.
Gonzalez de Castejon.
Grinda.
de Grossouvre.
Hachez.
R. P. Hagen, S. J.
Hans.
Haton de la Goupillière.
Havenith.
Helleputte.
Humbert.
Iniguez.
Fern. Jacobs.
Camille Jordan.
Jourdain.
Koltz.
Lagasse.
C. Lambert.
M. Lambert.
Lambin.
R. P. J. Lannoy, S. J.
Lechalas.
Le Paige.
Vte du Ligondès.
Mansion.
Cte de Maupeou.
Cte de Meeus.
Merten.
Vte J. de Monge.
Vte R. de Montessus.
Abbé Moreux.
Neuberg.
J. Nyssens.
d'Ocagne.
E. Pasquier.

MM. E. Picard.
Richald.
V^{te} de Salvert.
Pelegrin Sanz.
R. P. Schul, S. J.
Abbé Sentroul.
Sépulchre.
Sibenaler.
Smits.
Soisson.
C^{te} de Sparre.
R. P. Spina, S. J.
Ch. Stoffaes.
Storms.
Suttor.
Théron.

MM. Thiébaut.
Timmermans.
Torroja Caballe.
C^{te} Jacques de T'Serclaes.
C^{te} Aymard d'Ursel.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
E. Vandenpeereboom.
Vanderlinden.
Verriest.
Verschaffel.
Wasteels.
R. P. F. Willaert, S. J.
Wolf.
F. Wolters.
G. Wolters,

2^e Section

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du globe

MM. Abaurrea.
Allard.
Amagat.
André.
Ariès.
Abbé Baseil.
Bayet.
R. P. Bleuset, S. J.
A. Blondel.
Branly.
Bruylants.
Bulliot.
Abbé Capelle.
Carlier.
R. P. Carrara, S. J.
Casarès.
R. P. Cirera, S. J.
Chanoine Cocheteux.
R. P. Collangettes, S. J.
Conway.
R. P. Dechevrens, S. J.
Declercq.
Delemer.
Delvosal.

MM. Chanoine Demanet.
Chanoine De Muynck.
De Preter.
François De Walque.
Duhem.
Dumas-Primbault.
Abbé Fenaert.
Chanoine Gautier.
E. Gerard.
Gesché.
R. P. de Greeff, S. J.
Abbé Hamonet.
de Hemptinne.
Louis Henry.
Paul Henry.
R. P. Jacopssen, S. J.
Abbé de Joannis.
Kowalski.
O. Lambiotte.
V. Lambiotte.
R. P. Ch. Lambo, S. J.
Lambot.
Chanoine Laminne.
Leconte.

MM. Lemoine.
Lenoble.
de Locht.
R. P. Lucas, S. J.
Abbé Maes.
Frère Maubert.
R. P. Muthuon, S. J.
Abbé Noguier de Malijay.
R. P. Pauwels, S. J.
Abbé Pierre.
Abbé Raclot.
de Reul.
Roland.
Ryan.
Sabatier.
Cte de Saintignon.
Sarret.
R. P. Schaffers, S. J.
R. P. Scheuer, S. J.
Schmidt.
R. P. Ch. Schoonjans, S. J.

MM. Abbé Senderens.
Arthur Smedts.
Somville.
Springael.
Chanoine Thiéry.
R. P. Thirion, S. J.
Thiry.
Abbé Tits.
Abbé Van den Bossche.
E. Vanderlinden.
G. Van der Mensbrugghe.
Vandevyver.
M. Vandevyver.
Abbé Verhelst.
R. P. de Vregille, S. J.
Willame.
L. Wilmart.
Abbé Wilmotte.
Witz.
R. P. Th. Wulf, S. J.

3e Section

Géologie, Minéralogie. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie Ethnographie, Science du langage. — Géographie

MM. Adan de Yarza.
Frère Alexis.
Abbé Arduin.
Barrois.
Beauvois.
Abbé Bedel.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
R. P. H. Bolsius, S. J.
R. P. Boschmans, O. P.
Bouckaert.
R. P. Boule, S. J.
Chanoine Bourgeat.
M. de Brouwer.
Abbé Cabeau.
J. Capart.
Abbé J. Claerhout.
L. Coomans.
V. Coomans.

MM. V. De Brabandère.
Chanoine De Brouwer.
J. Declercq.
De Jonghe.
Chanoine Delvigne.
R. P. De Munnynck, O. P.
Denoël.
De Wildeman.
R. P. Fr. Dierckx, S. J.
Chanoine H. de Dorlodot.
S. de Dorlodot.
Bon Drion.
Abbé Dumez.
Dumont.
Dusmet y Alonso.
J.-H. Fabre.
Fauvel.
R. P. Fita, S. J.

MM. Dom Grég. Fournier, O. S. B.
Abbé de Foville.
de Gerlache.
B^{on} Gillès de Pélichy.
Gollier.
Gosselet.
Mgr Graffin.
Grand'Eury.
Abbé Grégoire.
B^{on} Greindl.
Mgr Hebbelynck.
J. Henry.
Henseval.
Abbé Hervier.
Heynen.
Huwart.
Kaisin.
Kersten.
Abbé Kieffer.
R. P. A.-M. Kirsch.
Mgr J.-P. Kirsch.
de Kirwan.
Kurth.
D^{r} H. Lebrun.
Leclercq.
Mgr Ferdinand Lefebvre.
R. P. M. Lefebvre.
Lejeune de Schiervel.
Abbé Lemaire.
Lhoest.
C^{te} Adolphe de Limburg-Stirum.
Maes.
Abbé Magnie.
R. P. J. Maréchal, S. J.
Ferdinand Meunier.
C^{te} F. de Montessus.
R. P. L. Navas, S. J.
Nollée de Noduwez.

MM. Chanoine Nys.
P. Nyssens.
D.-P. Œhlert.
Pieraerts.
de Pierpont.
Poskin.
Abbé Rachon.
Renier.
C^{te} de Ribaucourt.
C^{te} Adr. de Ribaucourt.
Rodriguez Risueno.
Roux.
R. P. Schmitz, S. J.
Th. Schmitz.
Schreiber.
R. P. de Sinéty, S. J.
H. Siret.
L. Siret.
Solano y Eulate.
Stainier.
Chanoine Swolfs.
M^{is} de Trazegnies.
Van Bastelaer.
Abbé F. Van Caeneghem.
Chan. G. Van den Gheyn.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Van der Vaeren.
Abbé J. Van Mollé.
Van Ortroy.
Viaene.
R. P. Vicent, S. J.
Voituron.
Albert de Vorges.
R. P. Wasmann, S. J.
M^{is} de Wavrin.
Ch^{er} F. de Wouters.
Zeiller.

4^{e} Section

Anatomie. Physiologie. — Hygiène. — Pathologie. Thérapeutique. etc.

MM. Baivy.
Bauwens.
Bibot.
L. Cirera y Salse.

MM. Coffey.
Convent.
Coulon.
Cousot.

MM. J. Cuylits.
Dardel.
Debaisieux.
De Buck.
Degive.
De Grave.
J. De Lantsheere.
Delaunois.
Delcroix.
Delétrez.
De Moor.
Denys.
Deroitte.
Desplats.
René Desplats.
D'halluin.
Dufrane.
E. Dupont.
Duquenne.
Duret.
Farina.
Rob. Fernandès.
X. Francotte.
Giele.
Gilson.
Glibert.
Glorieux.
Goris.
Guermonprez.
Haibe.
Étienne Henrard.
Félix Henrard.
Heymans.
Huyberechts.
Javaux.
Lahousse.
Laruelle.
Laurent.
Lebrun.

MM. Martin.
Masen.
Matagne.
Meessen.
Meunès.
A. Moëller.
Nicolas Moëller.
Morelle.
Mullie.
A. Pasquier.
Proost.
Rogie.
Schockaert.
Simon.
Simonart.
Smets.
Solé.
Stouffs.
J. Stouffs.
Struelens.
O. Swolfs.
Tits.
Ch. Van Aubel.
Van Biervliet.
Vanderstraeten.
Van Durme.
Van Gehuchten.
Van Hoeck.
Van Keerberghen.
Van Laethem.
Van Swieten.
Van Velsen.
Van Ysendyck.
Verriest.
Vervaeck.
Warlomont.
Aug. Wéry.
Wibo.
Wittmann.

3e Section

Agronomie. — Économie sociale. Statistique. — Sciences commerciales Économie industrielle

MM. C^{te} d'Annoux.
Attout-Van Cutsem.
Beaujean.
Béchaux.
Aug. Beernaert.
Berleur.
Bertrand.
de Beughem de Houtem.
G. Blondel.
De Brabandère.
De Briey.
Brifaut.
Cappellen.
Cartuyvels.
R. P. Castelein, S. J.
R. P. J. Charles, S. J.
Cooreman.
Craninckx.
David.
Herman De Baets.
Chanoine De Becker.
De Greef.
Léon De Lantsheere.
Mgr Deploige.
De Vadder.
C^{te} Domet de Vorges.
Ernest Dubois.
Dumortier.
Duplat.
Dupriez.
Duthoit.
Eeckhout.
Fenaux.
François.
H. Francotte.
Gendebien.
Goffart.
Grandmont.
Guelton.

MM. Halot.
Albert Henry.
Félix Janssens.
Albert Joly.
Léon Joly.
de Laveleye.
Chanoine Legrand.
Leplae.
Lesire.
C^{te} Éd. de Liedekerke de Pailhe.
Limpens.
C^{te} de Mérode-Westerloo.
V^{te} P. de Monge.
B^{on} de Moreau d'Andoy.
Nerincx.
Jules Peeters.
Poullet.
Chanoine Proost.
B^{on} de Renette de Villers-Perwin.
Roberti.
Roersch.
Mgr Schoolmeesters.
Ch^{er} de Selliers de Moranville.
Sièges.
Smekens.
Stinglhamber.
Taymans.
E. Tibbaut.
Van den Bossche.
C^{te} Van den Steen de Jehay.
André Van der Mensbrugghe.
Van der Smissen.
R. P. Vermeersch, S. J.
Versteylen.
C^{te} Amédée Visart de Bocarmé.
Visart de Bocarmé.
Vollen.
Waucquez.
Abbé Zech.

6e Section

Sciences techniques

MM. André.
Baclé.
Barbé.
Beaujean.
Berleur.
Berlingin.
G. de Béthune.
F. Breithof.
Carlier.
Cousin.
Crame.
Daubresse.
De Coster.
J. De Jaer.
Dejardin.
Deleu.
Delmer.
De Preter.
Dochain-Defer.
Dumont.
Dutilleux.
de Fooz.
Gerard.
Gilbert.
Godfrind.
B^{on} Greindl.
de Grossouvre.
Hachez.
Hans.
Harmant.
Haton de la Goupillière.
Havenith.
Hélin.
Helleputte.
Jourdain.
Kersten.
de Kirwan.

MM. Koltz.
Lagasse-de Locht.
C. Lambert.
M. Lambert.
Omer Lambiotte.
Victor Lambiotte
Lechalas.
Lhoest.
V^{te} du Ligondès.
C^{te} de Maupeou.
C^{te} H. de Meeus.
Merten.
Meuwissen.
Morisseaux.
J. Nyssens.
d'Ocagne.
d'Orjo de Marchovelette.
Renaud.
Renier.
De Reul.
Richald.
Ryan.
de Selliers de Moranville.
Sépulchre.
Sibenaler.
H. Siret.
Slingeneyer de Goeswin.
Smits.
Soisson.
Springael.
E. Storms.
C^{te} A. d'Ursel.
Van Brabandt.
Robert Van der Mensbrugghe.
Witz.
G. Wolters.

MEMBRES DU CONSEIL

1908-1909.

Président d'honneur : M. A. Beernaert.
Président : M. L. Cousin.
1er Vice-Président : M. G. Lemoine.
2e Vice-Président : M. le Dr R. Warlomont.
Secrétaire : M. P. Mansion.
Trésorier : M. Éd. Goedseels.
Membres : MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes.
L. De Lantsheere.
Chanoine Delvigne.
Fr. De Walque.
Dr X. Francotte.
Ch. Lagasse-de Locht.
Cte Ad. de Limburg-Stirum.
E. Pasquier.
A. Proost.
Éd. Van der Smissen.
Cte Fr. Van der Straten-Ponthoz (*).
Chanoine Swolfs.
G. Van der Mensbrugghe.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
Dr A. Van Gehuchten.

(*) Décédé le 22 décembre 1907.

MEMBRES DU CONSEIL (*)

1908-1909.

Président d'honneur : M. A. Beernaert.
Président : M. G. Lemoine (1909).
1er Vice-Président : M. F. De Walque (1910).
2e Vice-Président : M. Éd. Van der Smissen (1911).
Secrétaire : M. P. Mansion.
Trésorier : M. Éd. Goedseels.
Membres : MM. Beaujean (1912).
le Marquis de la Boëssière-Thiennes (1910).
L. Cousin (1909).
L. De Lantsheere (1910).
Chanoine Delvigne (1911).
Dr X. Francotte (1912).
Ch. Lagasse-de Locht (1909).
Cte Ad. de Limburg-Stirum (1912).
E. Pasquier (1909).
A. Proost (1910).
Chanoine Swolfs (1909).
Ch.-J. de la Vallée Poussin (1910).
G. Van der Mensbrugghe (1911).
Dr A. Van Gehuchten (1912).
Dr R. Warlomont (1911).

(*) Le nom de chaque membre est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

BUREAUX DES SECTIONS

1908-1909

1re Section

Président : M. le Vicomte R. d'Adhémar.
Vice-Présidents : R. P. F. Willaert, S. J.
M. J. Neuberg.
Secrétaire : M. H. Dutordoir.

2e Section

Président : M. Van de Vyver.
Vice-Présidents : M. de Hemptinne.
M. le Chanoine De Muynck.
Secrétaire : le R. P. Lucas, S. J.

3e Section

Président : le R. P. Schmitz, S. J.
Vice-Présidents : M. Kaisin.
le R. P. Wasmann, S. J.
Secrétaire : M. F. Van Ortroy.

4e Section

Président : M. le Dr Desplats.
Vice-Présidents : M. le Dr Struelens.
M. le Dr Dufrane.
Secrétaire : M. le Dr J. De Lantsheere.

5e Section

Président : M. G. Blondel.
Vice-Présidents : M. A. Beernaert.
M. Ernest Dubois.
Secrétaire : M. Éd. Van der Smissen.

6e Section

Président : M. Beaujean.
Vice-Présidents : M. De Preter.
M. Daubresse.
Secrétaire : M. Crame.

SESSION DU 29 OCTOBRE 1908

A ANVERS

SÉANCE DES SECTIONS

Première section

M. Mansion présente à la section un mémoire intitulé : *Potentiel du temps de parcours*, par M. Haton de la Goupillière, membre de l'Institut, et fait une analyse de ce travail qui complète les études de l'auteur relatives à la géométrie des masses. La section en vote l'impression dans la seconde partie des Annales.

Il est ensuite donné lecture de la communication suivante de M. Pasquier : *Sur certains travaux de l'école d'Oppolzer relatifs aux éclipses et à la chronologie.*

En raison des conditions mêmes dans lesquelles les éclipses peuvent se produire, ces phénomènes ont toujours joué et continueront à jouer un rôle prépondérant dans toutes les théories du mouvement de notre satellite. Les éclipses étaient utilisées par Ptolémée dans son Almageste et, depuis la découverte de la gravitation universelle, nombreux sont les travaux publiés par les astronomes à leur sujet. C'est même — on le sait — la discussion d'anciennes éclipses qui a permis de constater l'existence de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la lune et si la théorie a pu ensuite donner une raison du phénomène, il n'en reste pas moins à l'heure actuelle, d'après les plus compétents, une différence entre les résultats des observations et les déductions du calcul (*).

Cette situation, relative à la lune, intrigue d'autant plus vivement les astronomes, qu'elle constitue l'une des deux exceptions (l'autre concerne Mercure) à l'accord admirable constaté, pour les mouvements des autres corps de notre système planétaire, entre la théorie et l'observation. C'est en partie pour parvenir à lever la difficulté dont il s'agit, que tant de géomètres éminents (**) cherchent à perfectionner la théorie de la lune et que des astronomes de haute valeur, visant plutôt le côté pratique de la question, s'adonnent à des calculs d'éclipses ou à l'étude de la chronologie.

L'objet de cette note est d'attirer l'attention sur une série de travaux appartenant à cette dernière catégorie et particulièrement propres à une détermination pratique plus précise de l'accélération de la lune dans les siècles antérieurs.

On sait que, grâce à ses *Syzygien-Tafeln für der Mond* (Publication der astron. Gesellschaft XVI, Leipzig 1881), grâce aussi à ses *Tafeln zùr Berechnung der Mondesfinsternisse* (Denkschr. Wien,

---

(*) Parmi les travaux récents relatifs à cette vieille énigme, on peut consulter :

Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. III, 1894.

A. von Brunn, *Die Säkularbeschleunigung des Mondes*. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht, 1905.

S. Newcomb, *La théorie du mouvement de la lune, son histoire et son état actuel*, conférence faite au Congrès international des mathématiciens à Rome, en avril 1908, et publiée dans la REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES PURES ET APPLIQUÉES, n° du 15 sept. 1908.

(**) MM. Poincarré, Andoyer, Radau, Brendel, Newcomb, Brown, etc. Oppolzer s'était aussi occupé du côté purement théorique de la question. Cf. son *Entwurf der Mondtheorie*, Denkschr. Wien, t. 51, 1885 et aussi *Zum Entwurf einer Mondtheorie gehörende Entwickelung der Differentialquotienten*. Denkschr. Wien, t. II, 1887, terminé après la mort d'Oppolzer sous la direction de Schram.

Pour abréger, il est mis dans cet article :

Denkschr. Wien, *au lieu de :* Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.

Sitzb. Wien, *au lieu de :* Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. II. Abtheilung.

Sitzb. Berlin, *au lieu de :* Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zù Berlin.

t. 47), Oppolzer a simplifié considérablement le calcul des éclipses d'après la méthode de Hansen (*). On sait aussi que, dans ce monument qu'il s'est lui-même élevé et auquel il a donné le nom de « Canon der Finsternisse » (**) (Denkschr. Wien, t. 52, 1887), il a fourni, tout calculés d'après la même méthode, les éléments et certains nombres auxiliaires relatifs à toutes les éclipses de soleil et de lune, et cela pour un intervalle de temps extrêmement considérable — près de 3400 ans (***) — embrassant la période historique et les premiers siècles à venir…

Il importe de noter que le « Canon », déjà lui-même précis, est essentiellement perfectible, en ce sens que tout le travail n'est pas à recommencer — loin de là — quand les calculs numériques, conduisant aux nombres que l'ouvrage a pour objet de fournir, doivent être basés sur d'autres données, provenant d'observations mieux étudiées ou non encore utilisées. Oppolzer le savait bien : il a en outre déclaré dans sa préface que si la chose lui avait encore été possible, il aurait adopté, de préférence aux siennes, les corrections empiriques récemment trouvées par Ginzel lors de ses recherches sur diverses éclipses du moyen âge. C'est à ses recherches que l'Institut de France a, comme on sait, décerné le prix Valz de 1884 (****).

Il appartenait à l'un des plus fidèles collaborateurs du grand astronome viennois de réaliser, sous ce dernier rapport, l'intention du maître : dès 1889, M. Schram faisait, en effet, paraître

---

(*) Cette méthode est la plus rigoureuse et c'est elle qui est suivie par la rédaction de la *Connaissance des Temps*.

(**) V. Radau, dans le BULLETIN ASTRONOMIQUE, 1887, pp. 237-239. Cf. ma traduction de l'éloge funèbre d'Oppolzer (prononcé au nom de l'Académie de Vienne, par Suess, secrétaire de la classe des sciences) dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, juillet 1887, ainsi que ma traduction de la *Notice sur les travaux d'Oppolzer* par le Dr Schram, publiée dans le BULLETTINO du Prince Boncompagni, n° de sept. 1887.

(***) Les éclipses de soleil, calculées dans le « Canon », sont comprises entre l'an 1207 avant J.-C. et l'an 2161 après J.-C. et les limites de l'intervalle de temps sont à très peu près les mêmes pour les éclipses de lune.

(****) *Astronomische Untersuchungen über Finsternisse*, dans les SITZ. WIEN, t. 85, 1883. — Cf. le rapport de Tisserand dans les COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, 1885, 1er semestre, p. 502.
V. aussi Radau, dans le BULLETIN ASTRONOMIQUE, I, 1884, pp. 413 à 416.

des Tables (*) indiquant les modifications à faire subir au « Canon » quand, en vue d'une plus grande précision, on veut avoir égard aux susdites corrections empiriques de Ginzel.

Quant au lauréat de l'Institut de France, il a encore, après 1883, publié le résultat de ses recherches sur d'autres éclipses anciennes, observées en d'autres lieux ou à d'autres époques, et il est arrivé à cette conclusion intéressante, c'est que les corrections empiriques auxquelles il avait été conduit dans son travail de 1883 sur des éclipses du moyen âge restent suffisamment bonnes pour les autres éclipses qu'il a utilisées. De sorte que d'après Ginzel et eu égard aux sources mises en œuvre et aux limites de temps entre lesquelles se classent les éclipses ayant fait l'objet de ses études, ses corrections empiriques sont peut-être satisfaisantes depuis l'an 900 avant J.-C. jusqu'à l'an 1386 après J.-C., soit pour un intervalle de près de 2300 ans. S'il en est ainsi, le « Canon » d'Oppolzer, tel qu'il est et à la seule condition de faire en même temps usage des *Reduktionstafeln* de Schram, peut lui-même être considéré comme fournissant réellement, avec une exactitude suffisante, les éléments de toutes les éclipses comprises dans le même intervalle de temps.

Parmi les mémoires de Ginzel qui ont suivi celui de 1883 et auxquels il vient d'être fait allusion, il faut mettre hors de pair (**)

(*) *Reduktionstafeln für den Oppolzer'schen Finsternissecanon zum Uebergang auf die Ginzel'schen empirischen Correctionen.* Denkschr. Wien, t. 56, 1889.

Cf. Radau, dans le BULLETIN ASTRONOMIQUE, 1887, p. 238.

En 1887, donc à peu près au moment où paraissait le « Canon », le même M. Schram a publié des tables très commodes (*Tafeln zur Berechnung der näheren Umstände der Sonnenfinsternisse.* Denkschr. Wien, t. 51), ayant pour objet de faciliter le calcul approché des conditions spéciales d'une éclipse de soleil en un lieu donné (grandeur de l'éclipse, moment de la plus grande phase, etc.). Cf. Radau, BULL. ASTR., IV, 1887, p. 239.

(**) On peut encore consulter, du même auteur :

Ueber einige historische Sonnenfinsternisse. Sitzb. Berlin, 1886. — *Ueber einige von Persischen und Arabischen Schriftstellern erwähnte Sonnen- und Mondfinsternisse.* Sitzb. Berlin, 1887. — *Finsterniss-Canon für das Untersuchungsgebiet der Roemischen Chronologie,* Sitzb. Berlin, 1887.

Pour ces trois travaux, cf. Radau, BULL. ASTR., t. IV, pp. 239 et 240 et t. V, pp. 152 et 153.

son *Spezieller-Kanon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Ländergebiet der klassischen Altertumswissenschaften und den Zeitraum von 900 vor Chr. bis 600 nach Chr. Bearbeitet auf Kosten und herausgegeben mit Unterstützung der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, mit 3 Karten im Texte und einem Atlas von 15 kolorierten Karten.* Berlin, Mayer und Müller, 1899.

Dans cet in-4° de IV + 271 pages, entrepris aux frais de l'Académie des Sciences de Berlin et publié sous ses auspices, l'auteur fournit donc un « Canon d'éclipses » qui comprend une période de temps particulièrement intéressante au point de vue historique. Il y calcule, en se fondant sur le « Canon » d'Oppolzer et sur les « Reduktionstafeln » de Schram, la date et la grandeur de l'éclipse, ainsi que le moment de la plus grande phase pour toutes les éclipses de soleil qui ont pu, dans l'intervalle de temps considéré, être visibles à Rome, Athènes, Memphis et Babylone et il détermine les variations de grandeur que subit chaque éclipse, pour tous les points de la zone terrestre qu'il a en vue et successivement distants les uns des autres de 10° en longitude et de 5° en latitude.

Après avoir encore calculé, d'une façon spéciale, les zones de centralité correspondant aux éclipses de soleil, il recherche quelles sont, pour l'intervalle de temps considéré, les éclipses de lune qui ont pu être visibles à Rome, Athènes, Memphis et Babylone, et en détermine les dates et la grandeur. Il compare ensuite le résultat de tous ces calculs aux éclipses rapportées par les auteurs latins et grecs et consacre enfin un chapitre spécial aux éclipses de lune de l'Almageste et un autre aux éclipses babylono-assyriennes. Un atlas de quinze cartes coloriées donnant les zones de centralité pour les éclipses solaires et centrales, de l'an 900 avant J.-C. à l'an 600 après, termine l'ouvrage.

Un programme aussi vaste et aussi complexe, pour être exécuté avec le soin nécessaire, exige des connaissances sérieuses, non seulement en astronomie, mais encore en linguistique, en histoire et en chronologie, et l'on comprend que malgré le concours de plusieurs spécialistes, l'auteur n'ait pu atteindre complètement l'un des buts essentiels qu'il poursuivait : la détermination de la valeur pratique de l'accélération séculaire de la lune à ces époques éloignées. Il a bien signalé plusieurs éclipses qui lui paraissent particulièrement intéressantes au point de vue de la théorie de la lune ; il n'en considère pas moins comme provisoire la valeur de 11″473 qu'il attribue à l'accélération séculaire (*). Il estime avec raison qu'avant d'aligner des équations, on doit discuter la valeur intrinsèque des sources sur lesquelles il faut s'appuyer, et comme les questions d'histoire ou de linguistique à résoudre peuvent avantageusement être soumises à des spécialistes, tandis que celles de chronologie sont plutôt du domaine de l'astronome-calculateur, il s'est vu logiquement amené à s'occuper de ces dernières questions.

Depuis longtemps, M. Schram est entré hardiment dans la même voie (**). Personne ne s'en plaindra, car, grâce à cette double circonstance, on possède dès maintenant deux ouvrages de chronologie fort remarquables et dus aux deux principaux collaborateurs d'Oppolzer. Tout en étant indépendants, ces deux manuels, de même format et ayant le même éditeur, se complètent l'un l'autre ; ils ont tous les deux la clarté française, la science profonde et étendue des savants allemands.

Dans son « Handbuch » (***), qui doit comprendre trois volumes et dont le premier seul a paru, Ginzel a spécialement pour objet de faire connaître les diverses espèces d'ères qui ont été ou qui sont encore en usage, ainsi que les notions qui s'y rapportent.

Le titre, c'est celui même qu'avait adopté Ideler pour son ouvrage devenu si célèbre, mais au point de vue de la forme, tout

---

(*) On sait que dans ses tables de la lune, auxquelles se rapportent surtout les corrections empiriques d'Oppolzer et de Ginzel, Hansen avait adopté 12″18, et que divers astronomes américains, entr'autres Newcomb, l'estiment à environ 8″. D'après un grand nombre, la valeur théorique de l'accélération serait de 6″ environ.

(**) D'autres disciples distingués d'Oppolzer, MM. Mahler, Freiherr von Haerdtl, etc., se sont occupés, également avec succès, de chronologie et d'éclipses anciennes ; en ce qui les concerne, je me borne à cette indication, sans signaler autrement leurs travaux.

(***) Ginzel, *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Das Zeitrechnungswesen der Völker. I. Band : Zeitrechnung der Babylonier, Aegypter, Mohammedaner, Perser, Inder, Südostasiaten, Chinesen, Japaner und Zentralamerikaner*. Leipzig, librairie J.-C. Hinrichs, 1906.

aussi bien qu'au point de vue du fond, la différence entre les deux est énorme : le « Handbuch » de Ginzel, c'est Ideler, rajeuni de 80 ans (*), c'est-à-dire mis à la hauteur de la science moderne ; c'est Ideler ne se basant plus à peu près exclusivement sur les auteurs classiques, mais s'étendant, autant que possible, à tous les peuples de l'univers.

Rien que l'en-tête du t. I, le seul qui ait paru, donne l'impression qu'un tel ouvrage a dû coûter à son auteur un travail considérable, mais cette impression se change en une conviction profonde quand on parcourt le livre lui-même et qu'on se rend ainsi mieux compte de la quantité énorme et de la variété extraordinaire de matériaux qu'il a fallu compulser pour atteindre le but. La richesse même des sources où il pouvait puiser quant aux Égyptiens et la discordance des traductions ont été une cause spéciale d'embarras pour l'auteur, qui explique, dans sa préface, comment il a été amené à remanier la plus grande partie du chapitre relatif à ce peuple. Dans l'introduction, il passe en revue les connaissances astronomiques utiles à la chronologie et fait connaître, avec les lignes essentielles de leur développement historique, les diverses notions qui ont été ou qui sont encore en usage dans cette science. Dans la bibliographie qui accompagne chacun des chapitres, l'auteur renseigne exclusivement les sources où il a lui-même puisé pour la composition de son livre ou celles qu'il a consultées à un titre quelconque. Il se réserve de mettre en appendice à l'un des tomes subséquents les observations importantes qui lui seront parvenues, ainsi que la liste des travaux publiés pendant la confection du tome actuel. Le volume se termine par quatre tables chronologiques, une table alphabétique des matières très suggestive et une carte représentant les « stations de la lune » calculées pour 4000 ans avant J.-C. et en ayant égard aux traditions arabe, chinoise et indienne. En ce qui concerne les exemples, l'auteur a utilisé le manuscrit des « Tafeln » de Schram dont il me reste à parler.

Avant 1881, en collaborant aux « Syzygien-Tafeln » d'Oppolzer, puis en 1883, en publiant entr'autres ses « Hilfstafeln » (**), Schram

---

(*) Il a bien paru en 1883 à Breslau une nouvelle édition d'Ideler, mais ce n'était que la reproduction, pure et simple, de l'édition de Berlin de 1825-1826.

(**) *Hilfstafeln für Chronologie*, Denkschr. Wien, t. 45.

apportait lui-même à la chronologie un sérieux appui ; depuis lors, il n'a pas cessé de lui consacrer la meilleure partie de son temps. Ses « Tafeln » (*), qui viennent de paraître et dont Ginzel a utilisé le manuscrit, sont plus étendues que ses « Hilfstafeln » de 1883 et le moyen qu'il y donne pour passer commodément d'une ère à une autre, donc pour convertir une date, exprimée dans une ère, en la date qui lui correspond dans une autre ère, est encore plus simple que celui qu'il avait adopté dans ses « Hilfstafeln ». Le principe de réduire en jours de la période julienne les dates dans les diverses ères est maintenu, mais actuellement il n'est plus nécessaire de faire la moindre opération pour obtenir le résultat : les tables sont arrangées de telle façon qu'elles fournissent d'elles-mêmes la conversion que l'on a en vue. Comme le « Handbuch » de Ginzel, le livre de Schram embrasse, autant que possible, l'examen des modes de compter le temps qui ont été ou qui sont encore employés par les divers peuples ; seulement son travail est complet dès maintenant, tandis qu'il manque encore deux volumes à celui de Ginzel.

Dans une introduction, Schram donne, en peu de pages, des explications très claires sur le mode d'emploi des tables, avec des exemples numériques à l'appui. Cette introduction porte une pagination spéciale, en chiffres romains, tandis que la pagination des tables mêmes est en chiffres arabes. Il a été profité, à la table des matières, de cette double pagination : on y trouve, souvent en même temps, et la page de l'introduction correspondante à une ère déterminée et la première page des tables qui renferment les dates d'après la même ère. Les tables pour l'ère julienne s'étendent de — 5600 à + 2400, mais il est très aisé de les étendre encore bien au delà de ces limites.

L'auteur a dédié son livre à la mémoire de sa dévouée compagne, enlevée trop tôt à son affection et il signale la part importante qu'elle a prise dans la construction même des tables.

Outre les tables relatives aux diverses espèces d'ères et dont la conversion réciproque est l'objet essentiel, l'ouvrage renferme un

---

(*) *Kalendariographische und chronologische Tafeln.* Leipzig, librairie J.-C. Hinrichs, 1908. L'auteur annonce, dans la préface, qu'il compte faire paraître bientôt un « abrégé de chronologie ».

grand nombre d'autres renseignements qui peuvent être utiles : tels sont la date d'introduction du calendrier grégorien dans les différents pays, la détermination du jour de la semaine, l'indiction, le nombre d'or, le cycle solaire, les jours fériés, etc., etc. Il se termine par deux tables très importantes au point de vue historico-astronomique et qui ont été prises à peu près textuellement dans les « Hilfstafeln » : une table, la « Mondphasentafel », donnant aisément, en temps civil (*) de Greenwich, à une demi-heure près environ, les époques des phases de la lune depuis l'an 4000 avant J.-C. jusqu'à l'an 2400 après et une table, la « Zodiakaltafel », fournissant, aussi en temps civil de Greenwich, les époques d'entrée du soleil dans les signes du Zodiaque. Le caractère d'impression employé pour certains arguments de la *Mondphasentafel* permet de distinguer s'il y a ou s'il peut y avoir, lors d'une nouvelle lune éclipse de soleil, ou lors d'une pleine lune éclipse de lune (**).

L'ouvrage entier, qui est essentiellement pratique, a été publié avec le plus grand soin. Des précautions spéciales ont été prises pour que les tables ne renferment plus, si possible, aucune faute d'impression ; s'il en reste, vu les nombreux contrôles dont on dispose, un simple coup d'œil permettra sans doute de les découvrir et de les rectifier.

En résumé, si la question astronomique visée au début de cette note et qui a pour objet la détermination pratique de l'accélération séculaire de la lune, est peut-être encore loin de pouvoir être considérée comme résolue, on doit reconnaître que grâce à leurs travaux chronologiques, les anciens collaborateurs d'Oppolzer, spécialement MM. Ginzel et Schram, continuent à rendre à la science les plus sérieux services et qu'ils préparent, entr'autres, la voie à la solution du susdit problème astronomique lui-même.

(*) Le « Canon » d'Oppolzer, le « Spezieller-Canon » de Ginzel et son « Handbuch » donnent aussi de pareilles époques, mais dans ce dernier, elles sont comptées à partir du midi moyen, de sorte qu'il y a, de ce chef, une différence d'un demi-jour entre les dates de cet ouvrage et celles qui sont fournies par les « Tafeln » actuelles de Schram.

(**) Pour plus d'exactitude, on utilise ensuite le « Canon » d'Oppolzer ou les « Tafeln zur Berechnung der näheren Umstände » de Schram et mieux, on a égard aux « Reduktionstafeln » ou l'on se sert du « Spezieller-Kanon ».

M. le Vicomte d'Adhémar, Président de la section, fait un exposé des recherches récentes des géomètres sur l'*Équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et de Neumann*. La section en vote l'impression dans la seconde partie des ANNALES.

M. de la Vallée Poussin fait connaître un moyen simple pour déduire, de la formule de Wallis, la valeur de la célèbre intégrale de Laplace égale à Γ (1/2). Cette note sera publiée dans la nouvelle édition du *Cours d'analyse* de l'auteur.

M. le Vicomte Montessus de Ballores fait une communication préliminaire sur les valeurs moyennes des fonctions naturelles, sujet sur lequel il espère revenir ultérieurement.

M. G. de Béthune communique la formule suivante sur les *coefficients du binôme* :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{n-k+j}{j} \binom{n-k+i+1}{i-j} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$0 \leqq j \leqq i \leqq k \leqq n$$

où j, i, k, n sont entiers ; il justifie cette formule par une suite d'opérations élémentaires effectuées sur un polynôme entier en x et de degré $n+1$.

M. Neuberg fait observer que l'on peut arriver plus simplement à ce résultat en comparant les coefficients des mêmes puissances de x dans $(1-x)^{m-n}$ et $(1-x)^m (1-x)^{-n}$.

Le R. P. Bosmans communique à la section la note suivante *sur les papiers de l'Astronome Wendelin conservés aux Archives générales du Royaume à Bruxelles*.

I. Les papiers de l'astronome humaniste Godefroid Wendelin conservés aux Archives Générales du Royaume, à Bruxelles, se composent de trois fardes du fonds des cartulaires et manuscrits cotées 1281, 1282 et 1283. Ils ne sont pas classés et semblent, à première vue, un fouillis de paperasses. En y regardant de plus près cependant, on y trouve des documents précieux tant au point de vue des travaux scientifiques de l'auteur qu'à celui de sa vie privée. Ils permettent de préciser quelques dates importantes de celle-ci, et aussi celle de sa mort.

La farde n° 1281 forme un volume relié contenant quatre ouvrages de Wendelin, interfoliés, par moments, de papier blanc et annotés de sa main, en vue, probablement, d'une réédition. Ce sont :

1° *Gotifredi Wendelini Lvminarcani* (*) *Eclipses Lvnares Ab Anno M. D. LXXIII. Ad M. DC. XLIII. Observatae : Qvibus Tabvlae Atlanticae Svperstrvvntvr Earvmqve Idea Proponitvr.* (Portrait de Wendelin) Antverpiae, Apud Hieronymvm Verdvssivm. M. DC. XLIV. Cum Priuilegio et permissu Superiorum (**).

Outre une annexe de vingt pages manuscrites, Wendelin surcharge le texte imprimé de notes nombreuses. La première partie de l'annexe est rédigée sous forme de supplément au traité imprimé ; plus tard l'auteur ne fit plus qu'y consigner au fur et à mesure ses propres observations d'éclipses.

2° *Gottifredi Wendelini Lvminarcani Arcanorvm Caelestivm Sphinx Et Oedipvs Sev Lampas* Δωδεκαλυχνος *Duodecim Obvelata Hexametris, Quae totidem Vmbrae sunt : Duodecim Revelata Anagrammatis Quae sunt Lvmina totidem. Omnibvs Orbis terrarum Mathematicis ac Physicis In seram Posteritatem traditvr.* Tornaci, Typis Viduae Adriani Qvinqué, sub signo SS. Petri et Pauli, 1658 (***).

3° *Godefridi Wendelini Belgae, I. V. Doct. Loxias Sev De Obliqvitate Solis Diatriba In qua Zodiaci ab Aequatore Declinatio hactenus ignorata tandem eruitur, et in Canonem suum refertur ;*

(*) Idcirco se *Luminarcanum* vocavit, dit le savant bollandiste Ghesquière, quod natus esset in territorio *Lummensi*, in paroecia *Hercana*. *Acta Sanctorum Belgii*. Bruxellis, 1783, t. I, p. 299.

(**) In-4°. Autres exemplaires : Univ. de Louvain. — Observatoire Royal d'Uccle. — Musée Plantin, à Anvers. — Bibl. Communale, à Anvers.

(***) In-4°. Autres exemplaires : Univ. de Gand et de Louvain. — Cet ouvrage ne doit pas être confondu avec : G. V... *Arcanorum Caelestium Lampas* τετραλυχνος, *quatuor obvelata hexametris quae totidem velut umbrae sunt : quatuor revelata anagrammatis, quae totidem Lumina*, etc. Bruxellis, 1643, In-12. Le British Museum en possède un exemplaire.

quaque (vt Plinius ait) Rervm Fores Aperivntvr. Antverpiae Apud Hieronymum Verdussium M. DC. XXVI (*).

4° Godefridi Wendelini De Tetracty Pythagorae Dissertatio Epistolica Ad Erycium Pvteanvm Consiliarium et Historiographum Regium : occasione Libri ejus De Bissexto (**).

II. Les fardes nos 1282 et 1283 renferment plusieurs pièces importantes et curieuses, noyées au milieu de nombreux papiers inutiles. Nous les classerons sous quatre chefs principaux :

1° Minutes de lettres écrites par Wendelin ;

2° Lettres autographes des correspondants de Wendelin ;

3° Manuscrits et pièces imprimées utiles à ses études ;

4° Documents concernant ses charges et dignités.

Beaucoup des minutes de la Correspondance de Wendelin ont trait à des affaires de famille. Son biographe pourrait, peut-être, les utiliser. D'autres pièces plus intéressantes font partie de sa correspondance scientifique. Nommons au hasard : une lettre à son ancien maître de Herck-la-Ville, Jean Alen ; une autre au P. Bucherus S. J. à Tournai ; une autre encore à Timothée Hoius. Nommons surtout une lettre à Erycius Puteanus, dont la copie, du 15 mai 1636, se trouve à la Bibliothèque Royale de Belgique (***). Elle prouve, à ceux qui en douteraient, que, nonobstant leur détestable latinité, les lettres de Wendelin n'étaient pas toujours écrites d'un premier jet.

Parmi les lettres adressées à Wendelin, je remarque surtout ce court billet autographe du célèbre mathématicien des Archiducs, Michel Coignet (****). On ignorait jusqu'ici, si je ne me trompe, que les deux savants avaient été en relations.

Domine Wendelin, eo quod mihi a prandio non exit otium ad confabulandum tecum de tuis tabulis, rogo ut digneris supputare medios motus amborum luminum et hoc ad annos 1000, 1500, 1600 julianos, etiam ad singulos annos (et dies) una cum tuis

---

(*) In-4°. Autres exemplaires : Bibl. Royale de Belgique. — Univ. de Gand et de Louvain.

(**) In-4°. Sans lieu, ni date, ni nom d'imprimeur. Un autre exemplaire à la Bibl. Royale de Belgique.

(***) Ms. 19112.

(****) Farde 1282. Publié par M. Favaro, dans *Amici e Correspondenti di Galileo Galilei.* XII, Michel *Coignet.* Venise 1909, pp. 14 et 15.

epochis ad meridianum Fortunatarum, incipientibus a media nocte, vel calendarum Martii, vel Januarii. Nam his habitis, lubet ad alterum mihi propositum tempus calculare luminarium verum motus, ex quibus tandem cognoscere possem quid de tuis tabulis judicandum sit : et his vale in crastinum.

Dom^{ni} Tuae Addictissimus
Michael Coignetus.

Adresse au verso :

A Monsieur
Mons. Godefroy Wendelin.

Les pièces ayant servi aux études de Wendelin sont variées et assez nombreuses, mais malheureusement parfois lacérées et incomplètes ; tel est notamment le cas pour la curieuse petite brochure du P. Wenceslas Kirwitzer relatant les observations de la comète de 1618, faites aux Indes par les PP. Jésuites, ses collègues, alors en route pour la mission de Chine (*).

Il y aurait en outre plusieurs autres pièces à signaler, notamment quelques brouillons de travaux sur la chronologie, mais ici

---

(*) *Observationes Cometarvm Anni 1616* (sic). *In India Orientali Factae A Societatis Iesv Mathematicis in Sinense Regnum nauigantibus ex itinere eo delatis. Ad eiusdem Societatis Mathematicos et alios amicos Europaeos transmissae. Per P. Wenceslavm Pantaleonem Kirwitzer, eiusdem navigationis Comitem.* Vrsellis Excudebat Ioan. Theobald Schönwetter. Anno 1620.

In-8° de 24 pp., mais les pp. 17-22 font défaut. Cette rarissime petite brochure n'est pas mentionnée parmi les œuvres de Kirwitzer dans la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus*, par les PP. de Backer et Sommervogel. Tome IV, Bruxelles, 1893, col. 1084.

Le titre contient une faute, 1616, pour 1618. La brochure eut une réédition à Aschaffenbourg, en 1621. L'Université de Prague en possède un exemplaire, dont j'ai eu communication, grâce à l'obligeance de M. F. van der Haeghen, bibliothécaire en chef de la Bibliothèque de l'Université de Gand. En voici le titre complet :

Observationes Cometarum Anni M.DC.XIIX. In India Orientali Factae a quibusdam Societatis Iesu Mathematicis in Sinense Regnum navigantibus ex itinere eo delatis. Ad eiusdem Societatis Mathematicos, aliosque amicos Europaeos transmissa. Per P. Wenceslaum Pantaleonem Kirwitzer eiusdem Navigationis Comitem. Aschaffenburgi, Ex Officina Typographica Balthasaris Lippii. Anno Domini M.DC.XXI. In-4°, 16 pp.

j'abrège, car ils ne sont pas de ma compétence. Nommons cependant d'autre part, la copie d'une lettre assez oubliée de Mersenne, sur la prescience de Dieu, adressée au célèbre docteur en médecine Jean Beverovicius ou van Beverwyck de Dordrecht (*) ; puis diverses lettres relatant des observations sur la comète de 1652 écrites par les PP. Jésuites Jean Leurechon, François van Velten, Pierre de Semerpont, etc., etc.

III. Passons aux pièces concernant les charges et dignités obtenues par Wendelin. Toutes sont des copies, mais elles ont le mérite de préciser des dates demeurées jusqu'aujourd'hui plus ou moins incertaines. On les trouve dans la farde n° 1253. Voici les principales :

1° Diplôme de Jean de Tulle, évêque d'Orange, conférant à Wendelin le grade de docteur in utroque jure. La cérémonie se fit à l'Université d'Orange, le 23 mars 1611.

2° Lettres patentes de Philippe IV accordant à Wendelin une chanoinie et prébende à l'église collégiale de N. D. de Condé ; datées de Bruxelles, le 14 août 1633.

3° Lettres de François Villain de Gand, des comtes d'Isenghien, baron de Bassenghien, évêque de Tournai, nommant Wendelin à la charge d'official de sa cathédrale ; datées de Tournai, le 5 septembre 1648.

4° Lettres du même accordant à Wendelin une chanoinie et demi-prébende à la cathédrale de Tournai ; datées de Tournai le 9 août 1650. Un codicille annexé à la pièce précédente témoigne que Wendelin prit possession de sa stalle au chapitre, le vendredi 26 août de la même année.

IV. De tous les problèmes que soulève la vieillesse de Wendelin, le plus important et le plus obscur est celui de l'année de sa mort. Voici en quels termes M. Le Paige le propose, dans son éloge de Wendelin prononcé devant l'Académie Royale de Belgique (**).

(*) Van Beverwyck la publia dans son *Epistolica quaestio de vitae termino fatali an mobili ? Cum doctorum responsis*. Je n'ai pas la première édition de cet ouvrage sous la main, mais dans la *Secunda editio. Triplo auctior. Lugd. Batavorum, Ex Officina Ioannis Maire*. ch. CIƆCXXXVII, la lettre se trouve, pp. 67-69.

(**) BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE ; 3e sér. t. 20, Bruxelles, 1890, p. 724.

« S'il faut en croire la plupart des historiens, Wendelin serait mort, à Renaix, en 1660, après avoir renoncé à son canonicat de Tournai. Néanmoins on peut observer que dans son histoire de Hasselt publiée en 1663, Mantelius ne parle pas de la mort de son ami et que d'après un portrait qui figure dans un ouvrage du savant Ghesquière, Wendelin n'aurait cessé de vivre qu'en 1667. »

L'ouvrage de Ghesquière dont il est ici question sont les *Acta Sanctorum Belgii Selecta* (**). Sous le portrait de Wendelin on lit en effet la légende :

« Effigies rev(eren)di et doct(issi)mi viri D. Godefridi Wendelini Obiit Gandavi A(nn)o 1667. »

Les papiers des Archives Générales du Royaume montrent à l'évidence que Wendelin vécut encore plusieurs années après 1660. Il n'est donc pas mort à Renaix, en 1660, comme tant d'historiens le disent à tort. D'autre part Ghesquière, ancien bollandiste, devait être exactement renseigné. Wendelin était ami intime d'un autre bollandiste, Godefroid Henschenius. Hesius, en relations suivies avec les deux Godefroid, se chargea en 1688, à l'occasion du jubilé d'Henschenius, de faire graver leurs portraits(***). Impossible, du vivant de l'un des deux amis, de se tromper aussi grossièrement sur la date de la mort de l'autre. Wendelin est bien mort à Gand en 1667.

La vieillesse de Wendelin semble avoir été un peu triste et chagrine. Dans sa correspondance et dans ses écrits, on ne reconnaît plus guère le Wendelin si alerte, si gai, des lettres à Erycius Puteanus (****) ou à Gevaert (*****). Dès 1556, il note à la date du 11 et du 26 janvier (******) : « Eclipses lunae et solis ego decumbens ex gravi casu non potui observare. »

(*) Cette erreur est en bonne partie due à Foppens, d'ordinaire plus exactement informé, et que beaucoup d'historiens ont suivi de confiance. « Obiit, dit-il, anno 1660 Rhotnaci, existens collegiatae ibidem Ecclesiae decanus. » *Bibliotheca Belgica*... Bruxellis, 1739, t. 1, p. 373.

(**) Tom. I, Bruxellis, 1783. Le portrait gravé de Wendelin se trouve, hors texte, entre les pp. 298-299.

(***) Dans les *Acta Sanctorum Belgii selecta* de Ghesquière, on les trouve en regard l'un de l'autre entre les pp. 298 et 299 du tome I.

(****) Bibl. Royale de Belgique. Ms. 19112.

(*****) Bibl. Royale de Belgique. Ms. 5989.

(******) Farde 1281. F° 8 recto du supplément manuscrit ajouté par Wendelin à son traité des éclipses.

Plus tard, après s'être démis de sa charge d'official de la cathédrale de Tournai, il se retira à Gand. Est-ce après avoir habité d'abord quelque temps Renaix, comme le dit le chanoine Vos (*)? Ce n'est pas improbable. Wendelin aima toujours les voyages et les déplacements. Quoi qu'il en soit, Wendelin habitait déjà Gand en 1659, car il nous a conservé les observations des éclipses de lune qu'il y fit, le 6 mai et le 30 octobre de cette année. Je trouve encore, dans ses papiers, ses observations de l'éclipse de soleil faites à Gand le 30 mars 1661. « Anno 1661, die 30 Martii Gregoriani contigit Eclipsis Solis quae Gandavi est a me observata, quoad qui fieri potuit caelo nubilo. » etc. (**)

En parcourant ces notes, on ne peut s'empêcher d'admirer l'activité et l'ardeur à l'étude du bon vieillard. Ses doctes travaux étaient cependant contrariés par des querelles et des procès de famille. A preuve ce billet que je choisis entre beaucoup d'autres parce que c'est le dernier que je trouve, écrit, daté et signé de sa main. On remarquera le millésime de l'année 1665.

Consultissime vir et amice D. Erckenteel.

Accepi hoc mense Januario ineuntis anni 1665, quas ad me transferri curasti litteras et instrumenta judiciaria emanata a R(evere)ndo admodum ac clarissimo Dn°. Hermanno Bex judice ap(osto)lico deputato in causa pendente inter me Godefridum Wendelinum et Margaretam Coemans relictam mei fratris Cornelii Wendelen praeteriti. Quae quidem scripta legens diligenter, et examinans, invenio multa falsa et conficta quibus conantur mei adversarii circumvenire d(omi)n(u)m judicem. Ad quae, quia mihi respondendum est articulatim, neque id fieri potest uno aut paucis diebus, a me praesertim, annum jam agens 85^{um} peto inducias saltem usque ad finem martii ; quo tempore lubenter potero ad singula respondere pertinenter. Interim autem expectabo a vobis responsum, et an sciendum ut ad ipsum d(omi)n(u)m judi-

---

(*) « Il obtint la dignité décanale de Renaix, où il mourut, en 1660. » *Les dignités et les fonctions de l'ancien chapitre de Notre Dame de Tournai, par le chanoine Vos, archiviste de la cathédrale et de l'évêché* ; t. 2. Bruges, Desclée De Brouwer, 1898, p. 199.

(**) Farde 1281, f° 9 recto du supplément au traité des éclipses.

cem scribam ? et qualiter ? Tu interim provide ac discrete vir habe me TIBI addictissimum.

Godefridum Wendelinum
Ex-Canonicum Condacensem

Gandavi hac 30 Januarii 1665.

Adresse :

Reverendo ac Discreto
Viro
Domino ab Erckenteel
Curiae Leidensis procuratori
vigilantissimo
Leidium (*).

V. Un dernier mot pour terminer cette note.

Impossible de ne pas être immédiatement frappé par les fréquentes allusions faites dans la correspondance de Wendelin à son traité *De diluvio*. Il en parle déjà à Gevaert dans des lettres signées de Bruxelles le 10 juillet 1627 et le 6 janvier 1628 (**). Un peu plus tard, le 9 février 1629, il écrit de Beets à son ami Erycius Puteanus que l'ouvrage s'imprimait alors, à Anvers, chez Verdussen (***). Il y revient encore en mainte autre occasion, par exemple, dans son petit mémoire manuscrit sur la découverte du tombeau de Chilpéric (****). Peu de sujets semblent avoir autant préoccupé l'auteur, et cependant on croyait son travail perdu. Naguère, dans ses *Lettres inédites d'humanistes belges*, M. Simar (*****) reproduisait encore une note de Foppens (******) disant expressément que cet ouvrage n'existe pas.

(*) Il s'agit de la petite ville de Léau.

(**) Bibl. Royale de Belgique. Ms. 5989.

(***) Bibl. Royale de Belgique. Ms. 19112.

(****) Bibl. Royale de Belgique. Ms. 8219.

(*****) *Lettres inédites d'humanistes belges du XVI^e et du XVII^e siècle*. par Th. Simar. LE MUSÉE BELGE, REVUE DE PHILOLOGIE CLASSIQUE, t. 12. Louvain, 1908, p. 257. Article intéressant. M. Simar y publie deux lettres inédites de Wendelin.

(******) Bibliotheca Belgica... t. 1. Bruxellis, 1739, p. 376.

Énoncée en ces termes et sans restriction, la proposition est inexacte.

Les 72 premières pages, au moins, du *De diluvio* de Wendelin ont été imprimées. La Bibliothèque Royale de Belgique en possède un exemplaire, très probablement unique (*). Il contient le livre I, en entier, divisé en douze chapitres, et le début du livre II.

Des communications de MM. Mansion, Goedseels, de la Vallée Poussin sont renvoyées à une séance ultérieure.

Seconde section

Un mémoire est déposé en réponse à la question de concours : *On demande un électromètre perfectionné et l'étude par son moyen de phénomènes électriques de genres différents.* Il porte pour devise *Tu autem Domine.* Sont nommés commissaires pour l'examen de ce travail, MM. de Hemptinne et l'abbé Tits.

M. de Hemptinne fait la communication suivante sur l'*Influence du Magnétisme sur l'explosion de certains mélanges gazeux*.

La théorie prévoit l'influence d'un champ magnétique sur les équilibres chimiques. Elle fait entrevoir la possibilité d'une action sur les vitesses de réaction. J'ai démontré il y a longtemps déjà que même en employant un champ magnétique très puissant, aucune action n'était observable, tant sur les équilibres chimiques que sur les vitesses de réaction, du moins pour celles qui s'effectuent avec une vitesse normale et facilement mesurable. Mais que se passe-t-il lorsque les éléments se combinent avec une

---

(*) Il fait partie d'un recueil relié d'ouvrages divers, coté II, 38427.
Sur la première feuille de garde, on lit la note manuscrite :
« Ex libris Joan. Bapt. Snyers, 1659. »
Puis, d'une écriture plus récente : J. G. Smelderen.
L'exemplaire de la Bibliothèque Royale de Belgique contient des notes manuscrites, probablement de la main de Wendelin. Il est de format in-4°, et n'a ni titre, ni préface, mais débute au premier chapitre du livre I.

énergie telle que la réaction commencée en un point se propage rapidement dans la masse entière, comme c'est le cas pour les mélanges gazeux explosifs?

J'ai constaté, il y a quelques années, en opérant sur des mélanges gazeux de plus en plus raréfiés, que l'explosion se fait plus difficilement à mesure que le degré de raréfaction augmente. On peut même atteindre une limite au-dessous de laquelle il est impossible de la provoquer. Cette limite dépend de la nature du gaz, des dimensions des appareils et du mode d'allumage. L'emploi de l'étincelle électrique permet de réaliser l'explosion à des pressions beaucoup plus basses que l'usage d'un fil de platine incandescent, comme on peut s'en rendre compte par l'examen du tableau suivant. Dans la première colonne on mentionne la nature des mélanges explosifs ; dans la seconde, les pressions limites d'explosions indiquées en millimètres pour l'allumage par étincelles ; dans la troisième, les pressions relatives à l'allumage par incandescence.

Hydrogène et oxygène	35	192
Oxyde de carbone et oxygène	58	145
Acétylène et oxygène	15	45

L'activité plus grande de l'étincelle a peut-être sa cause dans la projection brusque de particules électrisées au sein de la masse gazeuse, le choc des ions prédisposant les molécules à se combiner. On est ainsi amené à supposer qu'un champ magnétique puissant, agissant sur le mouvement des particules électrisées en mouvement, pourra exercer une influence sur le phénomène de l'explosion. C'est ce qui nous a déterminé à faire les expériences suivantes.

EXPÉRIENCES

Les expériences ont été faites au moyen d'un fort électro-aimant. Le tube à explosions placé entre les pièces polaires était soumis à l'action d'un champ de 5500 unités. Ce tube en verre d'un diamètre de 12 millimètres environ, long de 30 à 40 centimètres, était terminé à l'une de ses extrémités par un robinet ; l'autre bout, recourbé à angle droit, était soudé à un tube plus étroit qui plongeait verticalement dans du mercure. Au milieu du tube horizontal, deux fils de platine soudés dans le verre réalisaient une distance explosive d'un millimètre environ. Les fils de platine étaient orientés tour à tour perpendiculairement et parallèlement aux lignes de force, de manière à faire varier l'action possible du champ magnétique sur l'étincelle. L'expérience a d'ailleurs prouvé que les phénomènes observés étaient indépendants de la position des fils. En outre, des précautions avaient été prises pour provoquer l'explosion au moyen d'une étincelle unique ayant toujours la même énergie.

ACÉTYLÈNE ET OXYGÈNE

Un mélange gazeux composé de deux volumes d'acétylène et de cinq volumes d'oxygène est renfermé dans une cloche et laissé au repos un temps assez long. Cette précaution est nécessaire pour obtenir un mélange bien homogène.

Le vide étant fait au préalable dans le tube à explosion, on y introduit le mélange, et l'on détermine par tâtonnements la pression limite à laquelle l'explosion n'a pas lieu. Cela ne peut se faire avec une grande exactitude, le phénomène de l'explosion étant très capricieux, mais on peut fixer avec certitude une pression au-dessous de laquelle l'explosion n'a jamais lieu, et voisine de celle où elle a lieu. Pourtant il arrive parfois que même à une pression assez sensiblement plus élevée l'explosion ne se fait pas, sans qu'on puisse en dire le motif, mais c'est là plutôt un fait exceptionnel. Dans le tube contenant le mélange à une pression voisine de la pression limite, faisons passer l'étincelle. Si l'explosion n'a pas lieu, après une attente de quelques minutes faisons passer une seconde étincelle, mais en ayant soin cette fois de lancer au préalable le courant de l'électro-aimant.

Si l'explosion n'a pas lieu on coupe le courant, on introduit dans le tube une petite quantité du mélange de manière à augmenter la pression de un ou deux millimètres et on répète la même série d'opérations.

Lorsque l'explosion a eu lieu soit dans le champ, soit sans son influence, on fait de nouveau le vide dans l'appareil, on y réintroduit du mélange frais, et ainsi de suite, on répète un grand nombre de fois la même manœuvre. Le tableau suivant donne une partie des résultats de ces expériences.

Première série

PRESSION	CHAMP MAGNÉTIQUE	
	Nul	5500 unités
17	pas d'explosion	explosion
18	explosion	
19	pas d'explosion	explosion
19	»	pas d'explosion
19	explosion	
20	pas d'explosion	explosion
17	»	»
15	»	»
18	explosion	
15	pas d'explosion	explosion

Toutes les conditions restant les mêmes, on remarque que l'explosion qui n'a pas lieu sans champ magnétique peut se produire sous son influence.

Deuxième série

PRESSION	CHAMP MAGNÉTIQUE	
	5500 unités	Nul
18	explosion	
16	pas d'explosion	pas d'explosion
17	»	»
20	explosion	
17	pas d'explosion	pas d'explosion
18	»	»
19	explosion	
18	pas d'explosion	pas d'explosion
20	explosion	
19	pas d'explosion	pas d'explosion

Toutes les conditions restant les mêmes, une explosion qui n'a pas eu lieu dans le champ magnétique ne se produit jamais sans champ.

Les résultats obtenus dans les deux séries d'expériences ont été confirmés par un nombre considérable de recherches. Nous croyons inutile de reproduire ici tous ces chiffres. On observe toujours des phénomènes analogues, soit que l'on modifie la direction de l'étincelle par rapport à celle des lignes de force, soit que l'on change la position du tube de telle sorte que son axe corresponde aux lignes, ce qui peut être réalisé grâce à des ouvertures cylindriques percées dans les pièces polaires.

Des recherches ont été faites sur d'autres mélanges explosifs tels que le mélange hydrogène et oxygène, oxyde de carbone et oxygène.

Tous se comportent sensiblement de la même manière. Les effets semblent un peu moins accentués pour l'oxyde de carbone ; ceci provient peut-être de ce que ce mélange ne fait explosion qu'à une pression beaucoup plus élevée que les précédents.

Nous croyons pouvoir déduire d'un grand nombre de recherches multiples et variées, que dans certaines conditions un champ magnétique exerce une action favorable sur la propagation de l'explosion. Quant à préciser la nature de cette action, avant de pouvoir le faire avec certitude, il faudrait rechercher si dans le cas de l'allumage par incandescence le magnétisme exerce également une influence.

Troisième section

—

Excursion du 30 juin 1908, à Gembloux. — En l'absence de M. le directeur de l'Institut agricole de l'État, qui avait été assez aimable de donner les autorisations voulues, les membres de la section ont été reçus et pilotés par MM. Poskin, père et fils.

Après avoir parcouru la ferme (65 hectares), qui est une leçon pratique permanente pour les élèves, on a visité l'établissement proprement dit : auditoires, laboratoires et collections. Le tout est tenu de façon irréprochable. Les collections sont fort variées ; elles se rapportent au génie rural, à la botanique, à la minéralogie, à la technologie agricole et forestière, à la physique, à la zootechnie, à l'entomologie, à l'ornithologie ; les instruments et appareils agricoles (réduits ou de grandeur naturelle), sont nombreux et intéressants. Une bibliothèque particulière, qui ne cesse de s'enrichir, est annexée à chaque cours.

Quant aux bâtiments, il ne semble pas qu'ils répondent tous à l'idée qu'on doit se faire d'un établissement d'instruction supérieure, ou de notre « Université agricole et forestière ». Si la microscopie, (35 élèves peuvent se grouper en même temps autour des tables), la microbiologie, la physiologie végétale, etc. disposent de locaux vastes, aérés et bien éclairés, en revanche la physique, et surtout la chimie ont le droit de formuler des plaintes, et de convoiter jalousement les installations confortables et parfois luxueuses des Universités de l'État.

Malgré l'heure déjà avancée, et la chaleur torride, les excursionnistes, conduits par M. F. Kaisin, se rendent avant le déjeuner à l'affleurement classique de Grand-Manil où sont visibles les termes suivants du système Silurien :

A. Série Ordovicienne, étage Caradocien	Schistes quartzeux de Grand-Manil à Calymene incerta, Orthis Actoniae, etc.
B. Série Gothlandienne, étage Llandovérien	Schistes fins de Grand-Manil à Climacograptus normalis. Schistes celluleux à Phacops Stokesii.

On y recueille de nombreux fossiles, notamment de beaux exemplaires d'Orthis Actoniae et de Climacograptus normalis.

En contact avec les schistes à Phacops Stokesii s'observe une porphyroïde fossilifère. Entre les schistes à Phacops Stokesii et le Llandovérien, on peut étudier d'excellents affleurements d'une roche éruptive, l'Eurite quartzeuse ou Rhyolite ancienne de Grand-Manil.

Après le déjeuner, des voitures transportent les excursionnistes au moulin d'Alvaux, près duquel se voit la belle discordance du Givétien sur le massif Silurien du Brabant. Après avoir observé dans d'excellentes conditions le poudingue d'Alvaux et les roches à éléments grossiers qui le surmontent, les membres présents étudient en détail le Givétien et le Frasnien du flanc nord du Synclinal de Namur : on voit successivement :

Gv a. Calcaire d'Alvaux à Stringocephalus Burtini.
Gv b. Roches rouges de Mazy.
Fr a. Schistes de Bossière à Spiriter Malaisi.
Fr b. Schistes, dolomies et calcaires de Bovesse.
Fr c. Calcaire noduleux de Rhisnes et marbre noir de Golzinnes.

L'heure du train approchant force à terminer là l'excursion, pendant la seconde partie de laquelle ont été recueillis un bon nombre de fossiles.

Session du 29 octobre 1908. — Le matin à 9 ½ heures, la section a visité, sous la conduite de M. F. Meunier, qui en est le directeur, le Musée d'histoire naturelle de la Société Royale de zoologie. La direction du Jardin avait eu la délicate attention d'autoriser les membres à parcourir les galeries du Musée et de leur accorder l'entrée gratuite.

Le Président de la Section s'est fait l'interprète des sentiments de tous, en félicitant M. F. Meunier de la valeur éducative de ses intéressantes collections, où l'on s'efforce de réunir surtout les types de la faune belge.

L'après-midi, à 4 ½ heures, les membres de la section se sont réunis à l'*Institut Saint-Ignace*. Le R. P. Bolsius, S. J. fait une communication sur *un mécanisme dans les orteils d'oiseaux* : chaque orteil est pourvu d'un véritable frein.

M. le Dr Lebrun présente un *Appareil pour l'observation et la projection de préparations microscopiques*. Cette communication paraîtra dans la seconde partie des ANNALES.

M. le chanoine Bourgeat présente la note suivante *Sur trois cas nouveaux de surcreusement glaciaire*.

L'année dernière, je signalai à la *Société scientifique* un cas de surcreusement glaciaire, produit au voisinage de Château des Prés, dans le Jura, par l'ancien glacier qui se déversait de la vallée de la Bienne dans la Combe des Prés par le col des Frasses. J'ai pu, durant cette année, observer d'autres cas de même nature sur le trajet des anciens glaciers jurassiens. J'en citerai surtout trois qui m'ont paru très nets. Le premier est à la Chaux du Dombief, tout près du chef-lieu de canton de S^t-Laurent ; le second, à Prénovel, à dix kilomètres au sud-ouest dans la même vallée ; le troisième, entre la Combe des Prés et la vallée de Leschères, à une dizaine de kilomètres au nord de S^t-Claude.

Tous les trois se trouvent à la limite de l'aire occupée par la nappe glacière qui s'écoulait du Noirmont, de la Dôle et des Crêtes de la Sambine, et qui couvrait presque tout le territoire du Haut Jura. Tous les trois sont aux débouchés des cols par lesquels débordait, vers les régions plus basses, le trop-plein de la masse congelée. Ils sont dans des conditions éminemment favorables à l'étude du surcreusement. A droite et à gauche, en effet, les crêtes qui bordent les cols n'ont pas été envahies par la glace. On peut voir si les terrains sédimentaires s'y sont maintenus mieux que dans les cols en question, et par ces témoins, juger du surcreusement.

Or voici ce que j'ai observé en chacune de ces localités :

1° Sur les bords des cols les assises sédimentaires sont très bien conservées, même celles qui sont facilement désagrégeables comme les marnes de l'Oxfordien.

2° Dans les cols, parcourus par les émissaires glaciaires, ces mêmes assises sont enlevées jusqu'à une sérieuse profondeur. Et leur enlèvement ne peut pas être attribué aux eaux courantes, car jamais sur ces cols aux arêtes aiguës il n'y a eu de cours d'eau.

3° Vers l'entrée des cols, qui est située du côté d'où venait la masse glaciaire, il y a d'importants dépôts morainiques, mais ces dépôts s'arrêtent assez loin en contre-bas du passage ou de l'arête du col.

4° Vers la sortie, c'est-à-dire du côté où s'écoulaient les émissaires glaciaires, il y a aussi d'importants dépôts morainiques situés moins en contre-bas que les précédents.

5° Sur les cols même les dépôts glaciaires font défaut.

Les cols sont donc des points de surcreusement et le surcreusement s'est produit non seulement sur leur arête, mais sur les deux pentes qui y aboutissent : un peu plus sur celle de montée que sur celle de descente de la glace.

Ces faits ne sont pas, comme on le voit, tout à fait d'accord avec les théories des géologues qui assimilent le surcreusement glaciaire à l'érosion produite par les cours d'eau.

Dans les cours d'eau c'est au bas des pentes, aux endroits où la vitesse de chute atteint son maximum, que l'érosion se manifeste davantage ; ici c'est surtout en contre-pente qu'elle s'observe le mieux.

On conçoit très bien qu'il en soit ainsi, car la masse glaciaire en glissant comme un rabot éprouve une résistance des terrains à l'encontre même de sa marche et doit y creuser de profonds sillons. C'est près de l'arête des cols que le travail doit être le plus intense, car c'est là que la glace resserrée doit atteindre sa plus grande vitesse.

M. le Professeur X. Stainier fait la communication suivante sur *Les dégagements d'acide carbonique du calcaire de Loregnée.*

Des études que j'ai faites dans le courant de cet été au charbonnage de l'Est d'Andenne m'ont mis à même d'observer un phénomène peu commun dans notre pays et sur lequel je crois bon, par conséquent, d'attirer l'attention, Pour commencer il est indispensable d'indiquer quelles sont les conditions géologiques de la contrée.

Le charbonnage de l'Est d'Andenne, jadis appelé charbonnage de Ben, est situé dans la vallée de la Meuse, à Ben-Ahin, tout à fait au bord Sud du bassin houiller, et il a exploité, de temps immémorial, les toutes dernières veines du houiller. A cet effet, dans le courant du dernier siècle, une grande galerie d'écoulement a été creusée du Nord au Sud au niveau de la vallée et s'est étendue sous la montagne à la distance de 1420 mètres. Abstraction faite de failles qui n'ont rien à voir avec le sujet qui nous occupe, la coupe de cette galerie est assez simple dans ses grandes lignes. A partir de son orifice et jusque vers 650 mètres, elle recoupe les strates de la base du houiller faiblement inclinées au Nord ; puis brusquement ces strates se redressent en dressant vertical, allure qui se poursuit jusque 805 mètres, point où l'on a rencontré le contact du terrain houiller avec le calcaire carbonifère.

Au delà et jusque 1170 mètres, la galerie a traversé la voûte de calcaire carbonifère connue en géologie sous le nom de voûte de Lovegnée pour rentrer, après cela, dans les mêmes strates du houiller inférieur, cette fois inclinées au midi sur un angle variant de 30 à 45 degrés. Elle est restée dans les mêmes allures jusque 1400 mètres, point où elle a rencontré une grande faille inclinée au midi que j'ai appelée faille de Boussale, dans mes levés de la carte géologique de la région. Cette faille a refoulé ici le calcaire dévonien sur le houiller inférieur et au contact se trouve une poche de sable oligocène supérieur, dans laquelle la galerie a pénétré de 20 mètres. Les exploitations du charbonnage de Ben se sont maintenues presque exclusivement dans les parties de veines situées au Nord de la voûte, ou à l'Ouest de celle-ci, car cette voûte plonge fortement au couchant et disparaît de la surface sous le houiller à peu de distance, à l'Ouest de la galerie. Aucune exploitation n'a été faite, par la galerie, dans la partie des mêmes couches située au midi de la voûte, car la galerie poursuivie au midi pour assècher ces couches exploitées par les Anciens, au voisinage de la surface, les a rencontrées trop dérangées à son niveau pour pouvoir les utiliser. Toute exploitation d'ailleurs avait cessé au charbonnage en 1897, lorsque, il y a environ deux ans, une société nouvelle, la Société du charbonnage de l'Est d'Andenne, a remis celui-ci en exploitation. Le prolongement de la galerie vers le Sud n'ayant donné aucun résultat, l'ancienne société avait fait construire un barrage ou serrement à environ 750 mètres de l'orifice de la galerie pour refouler les eaux qui arrivaient en quantité de l'amont. Ce travail, exécuté il y a près d'un demi-siècle, avait soustrait aux études toute la portion la plus curieuse de la galerie. Un des premiers articles du programme de la nouvelle Société était de rendre de nouveau accessible, d'un bout à l'autre, la galerie, et au moment où j'écris ces lignes elle est sur le point de l'avoir réalisé étant parvenue, non sans de grandes difficultés, à la distance de 1380 mètres. Grâce à l'obligeance de M. Ch. Marbais, administrateur-délégué du charbonnage et de M. Fauconnier, directeur, j'ai été à même d'étudier cette remarquable coupe, qui m'a fourni un grand nombre de faits intéressants en plus de ceux qui font l'objet de ce travail. Grâce aux renseignements qui précèdent, chacun pourra comprendre ce qui va suivre.

Lorsque le serrement dont nous avons parlé plus haut a été abattu, et que l'on est parvenu au calcaire carbonifère, on a éprouvé, nous dirons plus loin pourquoi, de telles difficultés, de tels éboulements et des mouvements si énormes dans les roches qu'il a fallu renoncer à utiliser l'ancien tracé de la galerie, et que l'on a dû créer un détour vers l'Est pour éviter les régions dangereuses, jusqu'au moment où l'on a pu reprendre dans le calcaire bien ferme, l'ancien tracé. Ce n'est que dans les commencements de cette année que l'on est arrivé à la distance de 1340 mètres où un deuxième serrement a été rencontré, que l'on a abattu dans ces derniers temps, pour atteindre l'extrémité de la galerie.

Or, un fait curieux a commencé à se manifester depuis lors. Dans les premiers temps où l'extrémité de la galerie jusque 1340 mètres est devenue accessible, c'était le cas lors de mes premières visites au printemps, on n'éprouvait aucune difficulté à avancer, du fait de l'aérage, quoique l'extrémité, de 700 à 1340 mètres, fût absolument en cul-de-sac. Il y avait seulement une énorme venue d'eau que l'enlèvement du second serrement a encore augmentée. Mais depuis lors et petit à petit l'aérage est devenu de plus en plus défectueux, par suite de l'afflux de quantités énormes d'acide carbonique sortant des parois de la galerie dans la partie où elle traverse le calcaire carbonifère ferme. Les choses en vinrent au point que toute la partie en amont devint complètement inaccessible. C'est ce que je pus constater dans les premiers jours du mois d'août lorsque je fis, en compagnie de M. Fauconnier et du géologue néerlandais M. Klein de Heerlen, une tentative pour pénétrer au delà qui faillit nous coûter cher. A ce moment le spectacle était très impressionnant. Il était impossible de trouver sur le sol de la galerie le plus petit point qui ne fût pas couvert d'énormes bulles de gaz sortant du sol boueux. Le gaz se dégageait en pétillant de l'eau de la rigole et affluait par toutes les fissures de la roche, d'une façon fort perceptible à la main, sur laquelle les jets de gaz produisaient l'impression du vent.

Nous ne pûmes aller bien loin, saisis par l'extinction des lampes et par les premiers symptômes caractéristiques de l'asphyxie par l'acide carbonique ; mais d'après ce que me dit M. Fauconnier, la venue de gaz était surtout forte à 1123 mètres, là où une cheminée dans la paroi Est de la galerie livre passage à un véritable ruisseau tombant en cascade.

Aucune mesure précise de la venue de gaz n'a été pratiquée, mais elle devait être très forte, car pour la vaincre et pour permettre la continuation des travaux que le charbonnage poursuit à l'extrémité de la galerie, il a fallu installer un ventilateur mécanique énergique vers 750 mètres. Malgré le cube restreint de la galerie, il faut plus d'un jour à ce ventilateur pour la débarrasser de l'acide carbonique. Aujourd'hui il semble que le dégagement ait diminué, mais la chose est difficile à apprécier, le ventilateur marchant presque sans relâche.

Il nous reste à rechercher maintenant quelle peut être la cause d'un phénomène si anormal dans nos contrées où les mofettes sont si rares et si faibles. Je pense que l'explication n'en est point difficile à trouver et qu'elle réside dans les conditions géologiques particulières de l'endroit : Pour tout dire nous pensons que le fait est dû à l'action des eaux fortement chargées de sulfate de fer sur les roches calcaires. La réaction produirait du sulfate de chaux, un dépôt d'hydroxyde de fer et la mise en liberté de l'anhydride carbonique. Or les conditions favorables à cette réaction sont réalisées au plus haut point dans la région qui nous occupe. Le bisulfure de fer (pyrite et sperkise) capable de produire par oxydation, sous l'influence de l'oxygène des eaux pluviales, du sulfate de fer, est tout particulièrement abondant dans la région.

Le périmètre de la concession charbonnière de Ben se confond en effet avec celui d'une concession métallique de même nom, et à côté se trouve la concession de Lovegnée. Dans ces deux concessions on a exploité des minerais complexes sulfurés (pyrite, blende, galène). Encore aujourd'hui la galerie d'écoulement de la mine de Lovegnée, qui va déboucher dans le vallon de Lovegnée, donne une forte venue d'eau chargée de sulfate et d'oxyde de fer et c'est à l'importance de la venue d'eau qu'est dû l'abandon de ces deux mines. Lorsque l'on a pratiqué le détournement de la galerie du charbonnage de l'Est d'Andenne, comme nous l'avons expliqué plus haut, on a suivi sur une longue distance, dans le calcaire, une grande épaisseur d'argile minéralisée par des concrétions des trois sulfures précités. Il est possible d'ailleurs qu'il existe encore beaucoup d'autres gîtes sulfurés inconnus, car actuellement les eaux qui sortent des sables de l'extrémité de la galerie, sont aussi fortement corrosives et chargées de sulfate de fer. Mais ce n'est pas tout. Les couches du houiller inférieur de l'extrémité de la galerie sont très riches en pyrite, comme c'est le cas presque partout. Ici c'est au point que certains charbons renferment près de 5 % de soufre. De plus, l'assise la plus inférieure du houiller, celle des ampélites de Chokier est aussi, comme on sait, fort riche en pyrite. Les eaux sont très abondantes dans les roches de la région, comme le prouvent les fortes venues contre lesquelles doivent ou ont dû lutter toutes les mines de la région. De plus, ces eaux circulent avec la plus grande facilité dans le calcaire carbonifère de la région. Celui-ci est en effet très fortement crevassé et disloqué. Aussi y trouve-t-on un grand nombre de cavités et de grottes. C'est tout près de là, dans le vallon de Lovegnée, qu'on voit la belle grotte du Trou-Manto, la plus considérable des grottes du calcaire carbonifère de Belgique. Le détournement de la galerie du charbonnage a été en partie nécessité par la rencontre de vides énormes se prolongeant à plus de 90 mètres de hauteur, de la galerie à la surface du sol, vides dans lesquels il se produisit des éboulements considérables et effrayants pour la sécurité de la galerie. Dans celle-ci, aux distances de 1123 et de 1141 mètres, dans le calcaire carbonifère, on observe la présence de véritables chenaux assez grands pour qu'un homme puisse y pénétrer. La forme arrondie et les parois de ces chenaux démontrent d'ailleurs un long passage des eaux, et nous avons déjà dit que l'un de ces chenaux livre continuellement passage à une forte source. Une cavité non moins considérable s'observe à 1178 mètres et une autre plus petite à 1174 mètres, toutes deux dans des bancs calcaires fortement corrodés intercalés dans la base du houiller.

A l'endroit où la galerie la traverse, la voûte de Lovegnée considérablement rétrécie est encore plus disloquée qu'ailleurs, à tel point que ce n'est guère que sur les cinquante derniers mètres de la voûte, au midi, que l'on peut discerner l'allure des bancs. dans la galerie. Dans tout le reste elle est indiscernable. La faille que j'ai appelée faille de Wasimont passe en plein dans cette voûte calcaire, et non sur son bord Nord comme je l'ai représenté sur la feuille Andenne-Couthuin de la carte géologique, à l'époque où la coupe de la galerie était inconnue.

Ce n'est pas tout encore. Les effets de la réaction de ces eaux abondantes sur un calcaire très perméable sont surtout intenses dans la galerie, parce qu'en ce point la voûte de Lovegnée est ensevelie en grande partie sous un manteau imperméable de schiste houiller qui la recouvre presque complètement à cause de la faible inclinaison de ce schiste vers le Sud, et surtout vers l'Ouest. De cette façon l'acide carbonique ne peut se dégager facilement à la surface et trouve une issue plus facile vers la galerie qui vient le drainer à une grande profondeur sous la surface du sol.

Nous pensons que ce n'est pas seulement à l'époque actuelle que ce dégagement anormal d'acide carbonique s'est produit dans la région, mais que ce phénomène remonte à une date reculée. Nous étayons cette hypothèse sur les faits remarquables suivants que l'on peut observer dans la partie de la galerie qui traverse le calcaire.

Tout d'abord on observe, au contact du houiller et du calcaire, sur le flanc Nord de la voûte de Lovegnée, la présence d'une énorme poche d'argile, qui, au niveau de la galerie, n'a pas moins de 60 mètres de largeur. Cette poche, résidu de la dissolution du calcaire, est remplie d'une argile feuilletée avec débris de schiste ampélitique altéré et détritus calcaires. C'est à la lèvre Sud de cette poche que l'on a suivi la zone minéralisée signalée plus haut. Lorsque le détour de la galerie est sorti de cette poche, le calcaire s'est présenté sous forme d'énormes blocs arrondis, altérés, friables, empâtés dans de l'argile grasse. Dans cette région on a même rencontré une poche remplie de marne crétacée, bondée de fossiles et dont nous parlerons plus longuement dans un travail spécial. Comme ce terrain crétacé ne peut venir que de la surface, où les mers crétacées ont jadis étendu leur dépôt, nous sommes donc là en présence d'une poche de dissolution de plus de 90 mètres de profondeur. Plus au Sud, on a commencé à rencontrer le calcaire en roche, mais extrêmement altéré, blanc, fétide, s'écrasant dans les doigts comme de la craie.

Cette zone de blocs arrondis et de calcaire friable n'avait pas moins de 25 mètres de largeur. Au delà seulement le calcaire s'est montré résistant et cohérent, mais encore très crevassé comme nous l'avons déjà dit. Donc sur les 365 mètres que la galerie a traversés dans le calcaire, 85 mètres soit près du quart était absolument dissous. Des phénomènes d'érosion chimique se produisant sur une échelle aussi grandiose ne peuvent s'expliquer qu'en admettant la présence dans les eaux souterraines d'une proportion inusitée de l'agent de la dissolution du calcaire, c'est-à-dire de l'anhydride carbonique.

S'il y a eu, comme nous le pensons, réaction d'eaux sulfureuses sur le calcaire il doit y avoir eu production de quantités considérables d'hydroxyde de fer. Il n'est pas difficile de voir qu'il en est ainsi lorsque l'on observe les énormes quantités d'eau amenées au jour par les galeries de Ben et de Lovegnée, eau fortement chargée de fer et dont les dépôts limoniteux encombrent les rigoles des galeries. A certains endroits, notamment vers 1170 à 1180 mètres, les parois de la galerie sont littéralement couvertes de curieuses stalactites fibro-radiées de limonite. Mais comme nous l'avons dit, la réaction suppose encore la production d'une certaine quantité de sulfate de chaux ou gypse. Il restera, pour confirmer le bien fondé de notre hypothèse, à retrouver la trace de ce gypse que nous n'avons pas rencontré. Peut-être ce gypse, qui comme on le sait est soluble en faible proportion dans l'eau, est-il entraîné au fur et à mesure de sa production par les eaux d'arène. L'analyse de ces eaux nous l'indiquera un jour.

Il nous reste, pour terminer notre étude, à expliquer pourquoi la venue d'anhydride carbonique ne se manifestait pas lors de la réouverture de la galerie et qu'elle n'a commencé à se produire que plus tard, surtout à l'arrivée de l'été. La chose, ce me semble, est facile à expliquer. A la faveur du serrement qui avait été construit jadis vers 750 mètres, l'énorme afflux d'eau provenant du calcaire et des sables de l'extrémité de la galerie, avait pu remonter dans les roches de façon à atteindre son niveau naturel et à s'écouler par ses exutoires normaux. Dans ces conditions, et depuis près d'un demi-siècle que ce serrement existait, il avait pu se produire à la longue un état d'équilibre dans lequel ne se présentaient plus que des quantités ordinaires d'acide carbonique, par suite de l'oxydation normale des substances pyriteuses situées au-dessus du niveau des eaux. Mais lorsque le barrage a été rompu, la galerie, qui vient saigner le pays, à son extrémité, à un niveau bien inférieur à son niveau habituel, cette galerie, dis-je, a permis brusquement aux eaux de s'abaisser fortement. Ainsi l'équilibre a été rompu, de nouvelles surfaces fraîches de calcaire ont été mises à nu et surtout de nouvelles tranches de roches pyriteuses ont pu s'oxyder. Au bout de quelque temps les réactions ont commencé à se produire et le dégagement d'acide carbonique, conséquence du phénomène, a pu aller crescendo, surtout lorsque la baisse d'été des niveaux d'eau, si forte dans les calcaires, est venue joindre son action à celle de la galerie. Cette situation perdurera donc jusqu'au moment où un nouvel état d'équilibre sera atteint.

Si les choses se sont passées ainsi, il a dû y avoir des phénomènes semblables lorsque l'on a creusé, au siècle dernier, la galerie. La chose est possible, mais nous n'en savons rien car malheureusement les anciens charbonniers n'avaient guère la bonne habitude de consigner sur le papier les événements qui n'avaient qu'une portée purement scientifique. La chose est d'autant plus à regretter que, à cette époque, le phénomène a dû être encore plus marqué. Le creusement de la galerie est, en effet, allé troubler alors une situation multiséculaire. Les nappes aquifères ont dû être fortement abattues, fait qui, d'après notre hypothèse, n'a pu rester sans conséquences bien visibles. D'après la tradition, en effet, au moment où la galerie est venue aboutir aux sables, à son extrémité, une énorme masse d'eau et de sable a jailli et a rempli la galerie presque jusqu'à son orifice, preuve évidente de l'existence en amont d'une forte nappe aquifère.

M. Fernand Meunier fait passer sous les yeux des membres de la section, quelques remarquables types de Meganeura Monyi et Meganeurula Selysii. Notre collègue montre aussi une collection de Phoridae de l'ambre de la Baltique et toute une série d'inclusions du Copal sub-fossile, « dit de Zanzibar », et du Copal récent des mêmes parages.

M. F. Meunier présente les deux communications suivantes sur « Les *Phoridae* et les *Leptidae* de l'ambre de la Baltique ».

I. **Les Phoridae de l'ambre de la Baltique**. — Les diptères de la famille des Phoridae n'ont guère fait l'objet de recherches de la part des paléontologistes et il faut remonter au mémoire de

Loew (*), paru en 1850, pour trouver de rares renseignements sur ces articulés.

En 1901 (**), j'ai signalé la présence de Phoridae dans des fragments de copal sub-fossile « dit de Zanzibar », et M. Brues (***), des États-Unis, a décrit et figuré, avec le plus grand soin, quelques Phoridae des schistes miocéniques de Florissant, soumis à son examen par M. Cockerell, le distingué paléontologiste américain.

En triant plusieurs milliers d'inclusions de diptères du succin, j'ai pu observer plus de deux cents individus de Phoridae.

Contrairement à ce qui se voit pour d'autres familles, les Phoridae inclus dans la reine des résines sont rarement très bien conservés. En effet, il est souvent difficile, pour ne pas dire impossible, d'étudier rigoureusement la disposition des soies sur le front donnant, on le sait, de bons caractères pour le démembrement des formes actuelles. Il est rarement possible de constater la présence ou l'absence des ocelles qui, eux aussi, offrent des signes utiles à consigner dans les diagnoses. La morphologie réelle de l'aile est souvent enchevêtrée, les Phoridae ayant fait de grands efforts pour se débarrasser de la néfaste résine. Pour se guider, le paléontologiste doit toujours s'en rapporter aux formes récentes (****). Tous les caractères importants : présence de cils sur le front, présence ou absence des ocelles et les caractères des nervures alaires doivent toujours, autant que faire se peut, être indiqués dans les descriptions. Toutefois, leur étude est loin de donner le même résultat que pour l'examen des espèces actuelles. Les antennes fournissent également de bons caractères. Après bien des hésitations, j'ai constaté que les ongles des pattes offrent un moyen, assez rigoureux, pour le démembrement des espèces. Les caractères buccaux (pipette et palpes) sont souvent peu recon-

---

(*) *Ueber den Bernstein und die Bernsteinfauna*, p. 44.

(**) *Nouvelles recherches sur quelques diptères et hyménoptères du copal fossile « dit de Zanzibar »*, REVUE SCIENTIFIQUE DU BOURBONNAIS ; pp. 7-9 (du tiré à part) ; figures 3 à 7. Moulins, 1906.

(***) *Two fossil Phoridae from the miocene shales of Florissant.*

(****) Becker, Theod. *Die Phoriden.* ABHANDL. K. K. ZOOL. BOTAN. GESELLSCHAFT IN WIEN (Alfred Hölder) 1901.

naissables chez les formes fossiles. Les cils qui garnissent les pattes doivent êtres vus très attentivement, car ils aident à déterminer les espèces et même aussi les genres.

En 1850 (*), Loew signale qu'il a observé onze espèces de Phoridae dans le succin du Samland. Un examen au microscope, très détaillé, des espèces du Musée minier de l'ambre de Koenigsberg et de la collection de mon savant ami M. le Prof. D^r R. Klebs m'a permis de constater la présence des genres suivants :

1. **Aphiochaeta Brues.** — Ce genre démembré du genre Phora s'en sépare par l'absence d'épines aux tibias des pattes médianes. Becker, dans sa remarquable étude sur les Phorides, n'en fait qu'une division des Phora. J'ai adopté cette manière de voir dans mon mémoire sur les insectes du copal. Dans ses recherches sur les Phoridae américains, le distingué diptériste M. Brues (**) estime qu'il y a lieu de placer les Aphiochaeta dans une coupe générique distincte.

2. **Phora.** — Le succin en renferme plusieurs espèces bien reconnaissables par la disposition des épines sur les tibias médians, par la forme des antennes, les nervures des ailes et les caractères fournis par les articles tarsaux.

3. **Conicera.** — J'ai vu deux Phoridae de ce genre se distinguant, à première vue, par les antennes bien poilues, longuement piriformes et à chète épaissi à la base.

Loew avait déjà signalé en 1850 que les Phoridae (***) de l'ambre de la Baltique sont très voisins de ceux de la faune actuelle. Il aurait pu ajouter qu'on n'y trouve aucun genre spécial à la faune néarctique et que la faune de ces diptères de l'oligocène inférieur de ce pays (sa faune remonte vraisemblablement à l'éocène supérieur) était, à peu de chose près, la même que celle de la région paléarctique actuelle.

On peut résumer comme suit l'état actuel des connaissances sur les Phoridae fossiles :

(*) *Loc. cit.*, p. 44.

(**) *A Monograph of the North American Phoridae.* TRANS. AMERICAN ENT. SOCIETY, n° 4 vol. XXIX, New-York 1903.

(***) *Loc. cit.*, p. 44.

Terrains quaternaires

Quaternaire récent Copal sub-fossile « dit de Zanzibar ».	Phora copalina Meun. (Aphiochaeta eod. Brues). Phora ethiopia Meun. (Aphiochaeta eod. Brues).

Terrains tertiaires

Miocène de Florissant (États-Unis)	Phora, Brues. 2 espèces.
Ambre de la Baltique oligocène inférieur (Faune éocène supérieur)	Plusieurs espèces (*) des genres Aphiochaeta, Phora et Conicera. En 1850, Loew se borne à signaler le genre Phora. (loc. cit. p. 44).

II. **Les Leptidae de l'ambre de la Baltique**. — Le célèbre diptériste de Meseritz, feu le Prof. Dr H. Loew (**) a signalé plusieurs mouches de cette famille. Il est malheureusement difficile de reconnaître ses espèces, Loew s'étant borné à des indications très sommaires et n'ayant ordinairement donné aucun dessin concernant ces curieuses bestioles. Depuis plusieurs années, j'ai réuni un certain nombre de Leptidae éparpillés dans la collection du Musée minier de l'ambre de la Baltique et dans celle de M. le Prof. Dr R. Klebs de Koenigsberg.

Les Leptidae de la faune actuelle (***) offrent de bons caractères pour le démembrement des espèces : taches sur les segments dorsaux et ventraux de l'abdomen, couleur, poilure ; etc. Il n'en est

---

(*) Elles seront décrites et figurées dans un travail monographique sur les Phoridae du succin actuellement en préparation.

(**) *Ueber den Bernstein und die Bernsteinfauna*. p. 40. Meseritz 1850.

(***) Schiner. *Fauna Austriaca*, t. 1. — Becker, D. *Die Leptiden Formen im Gebiete der europäisch-asiatischen Mittelmeer-Fauna*. ENT. NACHRICHTEN, XXVI Jahrg., Heft VI-VIII. — *Anmerkung zu meinem Aufsatz : Über die Leptidenformen*, etc. THE ENTOMOLOGIST, MONTHLY MAGAZINE, vol. XI, June, p. 176.

pas de même pour les formes fossiles. Les couleurs sont ordinairement inutilisables étant toujours altérées par la fossilisation. Les caractères de la topographie des ailes n'ont guère de valeur pour les paléontologistes, ceux des antennes permettent, à coup sûr, de reconnaître le genre Atherix du genre Leptis.

Pendant longtemps, j'ai cherché quels pouvaient être les caractères les plus rigoureux pour le déchiffrement des espèces fossiles. Je suis arrivé à les trier en me basant sur les antennes pour les caractères génériques et sur les articles tarsaux pour le classement des espèces.

Avec Loew (*), je n'ai observé que quelques espèces du genre Leptis et deux seulement du genre Atherix —(ce savant en signale quatre espèces).

Parmi les documents étudiés, je n'ai pas retrouvé le genre Palaeochrysopila (**), Meun, signalé en 1892. Vraisemblablement, il doit être considéré comme sous-genre du genre Chrysopila, Macquart.

La faune des Leptidae du succin du Samland est nettement paléarctique. On n'y observe aucun genre de la faune néarctique ; les espèces sont toutes très voisines de celles de la faune actuelle. On connait les formes suivantes de Leptidae fossiles :

Terrains tertiaires (***)

Ambre de la Baltique oligocène inférieur (Faune éocène supérieur)	Leptis	Burmeister (1832-1836) Berendt (1845) Loew (1850) Smith (1868)
	Atherix	Berendt (1825) Loew (1850)

(*) Je n'ai pas trouvé de Leptidae dans le copal sub-fossile « dit de Zanzibar » ni parmi les inclusions de copal d'origine récente de la collection de M. Evers junior de Hambourg.

(**) *Loc. cit.*, p. 40.

(***) *Note sur les Leptidae de l'ambre tertiaire*. Bull. soc. Ent. de France ; séance du 23 mars, p. LXXXIII.

M. L. Siret évoque le souvenir des Tyriens et des Celtes en Espagne. Son étude est publiée dans la REVUE DES QUEST. SCIENT., livraison du 20 janvier 1909.

La Colonisation fait l'objet de diverses considérations de M. De Wildeman.

Les tourbières de l'Ardenne sont étudiées par le R. P. G. Schmitz, S. J.

Séance extraordinaire du jeudi 19 novembre 1908. — Les membres de la section se sont réunis à 2 1/2 heures au Musée royal d'histoire naturelle (Parc Léopold), à Bruxelles, pour une conférence de M. A. Rutot sur les *Éolithes*, avec démonstrations. La séance s'est prolongée jusqu'à 5 heures. Voici un résumé de cette causerie.

Si les préhistoriens ont volontiers admis la période de la *pierre polie,* à laquelle succéda l'époque du métal, en revanche ils ont longtemps discuté avant de consacrer la période paléolithique, ou de la *pierre taillée intentionnellement.* Ils ont même admis que le strépyien comportait la période de la *pierre taillée plus rudimentairement.*

Mais peut-on s'occuper d'industrie primitive avant le strépyien ? M. A. Rutot opine pour l'affirmative, et cette industrie, il la qualifie d'*éolithique.*

A la fin de l'éocène, on relève, en divers endroits, l'existence d'un tapis de rognons de silex, où se trouvent mêlés des éléments arrondis ou à arêtes vives.

Supposons qu'un être intelligent, mais matériellement peu doué de sa nature, soit placé dans ce milieu ; certes il lui sera loisible de se servir de ses poings, de ses ongles, de ses doigts, de ses dents, mais à la longue ne cherchera-t-il pas d'instinct à utiliser ces silex si bien disposés pour son usage ? La chose semble évidente. Il nous est donné en effet de faire des expériences avec ces candidats-instruments, donc de les façonner et de les employer comme des outils effectifs. Quelles opérations permettent-ils ?

Nous pourrons : A) *percuter ;* nous avons le percuteur simple ; le percuteur ou silex tranchant, faisant l'office de hache ; le broyeur ou pilon ; le retouchoir ; il est même possible de ranger ici l'enclume ;

B) *couper ;*

C) *racler ;* le silex racloir peut subir 3 à 5 retouches ; signalons le racloir à encoches ;

D) *gratter ;* le grattoir a des liens de parenté avec le racloir, mais dans celui-ci le tranchant de l'instrument est longitudinal au bras, tandis qu'il lui est transversal dans le grattoir. En réalité, celui-ci joue l'office du ciseau de menuisier ;

E) *percer ;*

A côté de ces cinq outils *primordiaux*, viennent encore se ranger, en fait d'instruments primitifs :

a) des pierres à esquillements bruts ou *pierres de jet ;*

b) des pierres usées par battage le long d'une arête ou *pierres à feu.*

Voilà tous les instruments fournis par un tapis de cailloutis de silex, et la manière de les utiliser.

Mais il ne suffit pas de *constater l'existence de l'outil* et son *utilisation,* il faut aussi pouvoir procéder par *comparaison.*

Ces outils, que nous avons patiemment taillés, ont-ils été également réalisés par les primitifs ? La réponse est affirmative.

Les explorateurs ont trouvé en Tasmanie les mêmes outils que les nôtres, employés de la même manière.

D'autre part, l'industrie primitive relevée à Boncelles, près de Tilff, au sud de Liége, entre la Meuse et l'Ourthe, est identique à celle que nos expériences réalisent et aussi à celle des Tasmaniens.

La conclusion s'impose ; il existe réellement une industrie à facies éolithique, à l'étude de laquelle on conçoit que des chercheurs consacrent vaillamment leurs peines et leur talent.

Quatrième section

—

La quatrième section avait à son ordre du jour la visite de la *Fabrique des conserves alimentaires de l'armée* et la visite de la ***Maison hydraulique.***

Grâce à l'autorisation gracieusement accordée par le Département de la guerre, et à l'accueil que nous ménagèrent, avec une extrême amabilité, M. l'intendant Remy et M. le directeur de la Fabrique, les membres de la section purent assister à toutes les étapes de la préparation des conserves. Ils ont été à même de constater et d'admirer la tenue parfaite de l'établissement, l'ingéniosité des appareils, l'esprit méthodique et rationnel des procédés, et notamment les précautions prises pour assurer la stérilité des produits alimentaires destinés à la troupe, en campagne et en manœuvres.

La Maison hydraulique, « Het water-huis », située au Canal des brasseurs, n'intéresse pas seulement l'hygiéniste ; elle mérite aussi d'être mieux connue au point de vue de l'histoire de l'industrie et de l'art anversois. Au XVI^e siècle, un bourgmestre d'Anvers, Van Schombecke, conçut et réalisa le projet — hardi pour cette époque — d'établir une dérivation du Canal de la Campine, de manière à amener aux brasseries une eau de bonne qualité. Travail remarquable, si l'on songe qu'aujourd'hui les eaux potables sont empruntées à la Nèthe, et amenées à Anvers, après une excellente épuration, du reste, à Waelhem. Cette dérivation va se rendre à la Maison hydraulique où nous en avons vu la terminaison dans le sous-sol ou cave que le viaduc occupe entièrement (largeur 60 pieds, hauteur 40). Ce dernier est voûté, sauf dans la partie extrême où un jeu de vannes permet d'écouler le trop-plein dans l'égout. Au rez-de-chaussée, un modeste moteur à gaz (remplaçant, depuis peu, l'antique manège à chevaux) remonte l'eau au premier étage, et de là la distribue aux brasseries et établissements industriels environnants.

A l'étage de la Maison, auquel on a accès par un escalier orné de sculptures d'un goût exquis, se trouve l'antique salle de réunion de la corporation des Brasseurs, dont la décoration porte le cachet de la fin du XVI^e et du début du XVII^e siècle. Outre le mobilier, tout à fait remarquable, on montre les vieux registres qui retracent toute l'histoire de la corporation.

Nous devons à M. le D^r De Mets, qui s'est fait notre aimable et non moins érudit cicerone, d'avoir pu faire la connaissance de cette curieuse installation. Qu'il veuille bien recevoir ici tous nos remerciements.

Cinquième section

La cinquième section s'est réunie à 4 heures au Collège S^{t} J. Berchmans, sous la présidence de M. E. Dubois, l'un des vice-présidents, en l'absence de M. G. Blondel, retenu à Paris.

Le R. P. J. Charles a présenté la monographie des ports de *Barcelone* et de *Bilbao*. Elle est publiée dans la livraison du 20 janvier 1909 de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

M. P. Staes a traité du *rôle du Gouvernement canadien dans la mise en valeur des territoires de l'Ouest.*

Chacune de ces communications a donné lieu à un échange de vues entre les rapporteurs et divers membres.

Sixième section

L'ordre du jour annonçait une communication de M. Renier sur *quelques essais de havage mécanique.* M. Renier ayant été empêché d'assister à la réunion, la communication a été remise à une séance ultérieure.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'Assemblée Générale s'est tenue à l'Institut Saint-Ignace. La séance s'ouvre à 8 heures, sous la présidence de M. G. Lemoine, membre de l'Institut, président de la Société.

La parole est donnée à M. Éd. De Wildeman, pour une conférence avec projections, sur *Le Caoutchouc : Histoire, Plantes, Production, Commerce.* Un résumé de cette conférence a été publié dans la livraison du 20 janvier 1909 de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

M. Lemoine félicite et remercie l'orateur et déclare close la session d'octobre 1908.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-TROISIÈME ANNÉE, 1908-1909
SECOND FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1909

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Session du 28 janvier 1909, à Bruxelles. — Séances des Sections . .
Première Section **107**
Deuxième — **120**
Troisième — **135**
Quatrième — **147**
Sixième — **149**
Assemblée générale **165**

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

L'Équation de Fredholm et les Problèmes de Dirichlet et de Neumann, par Robert d'Adhémar 173
Contribution à l'Étude de la Vaccination antituberculeuse, par le Dr A. Haibe 240
Sur une tentative d'édition des œuvres complètes de L. Euler, faite à Bruxelles en 1839, par H. Bosmans, S. J. 265
La Fulguration dans le traitement du Cancer. Étude basée sur quinze mois de pratique de cette méthode, par le Dr R. Desplats, de Lille. 290

Le volume des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la REVUE et des ANNALES, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique*, au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : **M. Paul Mansion,**
6, quai des Dominicains, Gand.

SESSION DU 28 JANVIER 1909

A BRUXELLES

SÉANCE DES SECTIONS

Première section

M. Mansion donne lecture de la note suivante : *Sur l'équation d'un espace à* n *dimensions en coordonnées-distances* (*).

1. *Définition de la droite, du plan, d'un espace par Leibniz, Cauchy et De Tilly.* A. LEIBNIZ. Leibniz prend la notion de distance de deux points, comme notion fondamentale : *relatio loci vel situs quem duo puncta ad se invicem habent, in quo intelligitur eorum distantia.* Si a et b sont des points distincts, la droite ab est l'ensemble des points x tels que tout point y distant de a et de b, comme x en est distant, coïncide nécessairement avec x. Si a, b, c sont trois points distincts, non en ligne droite, le plan est l'ensemble des points x tels que tout point y distant de a, b, c, comme x en est distant, coïncide nécessairement avec x. *(Haec) definitio plani mihi est*, dit Leibniz, qui en a bien vu toute l'importance (**).

(*) Nous avons fait connaitre l'idée fondamentale de cette note dans la conclusion d'un petit Mémoire intitulé : *Gauss contre Kant sur la géométrie non euclidienne*, présenté le 3 septembre 1908, au Congrès international de philosophie de Heidelberg (31 août-5 septembre 1908) et publié dans le compte rendu du Congrès et aussi dans la REVUE NEO-SCOLASTIQUE, 1908, t. XV, pp. 441-453.

(**) Nous ne pouvons donner le texte original des définitions de Leibniz, dans sa *Characteristica geometrica* (1679), publiée dans le t. V, pp. 141-211

B. Cauchy. « La distance n'est qu'un rapport entre deux points mathématiques. » Cauchy, *Sept leçons de physique générale*, 1833 (Paris, Gauthier-Villars, 1868), p. 48. « Deux atomes privés d'étendue [= points mathématiques] formeront un couple » (I *b*, p. 43]. « [La] droite [est] le lieu de tous les points qui jouiront d'un caractère particulier. Le caractère particulier dont il s'agit consiste en ce qu'un atome placé à l'un de ces points formera toujours avec les atomes placés aux extrémités de la chaîne [deux points quelconques], deux couples qu'aucun autre atome ne pourrait former. Tout point qui ne présentera pas ce caractère sera nécessairement situé hors de la droite en question » (Ib., p. 44). « Le plan [est] le lieu de tous les points qui, relativement à ces trois atomes [non situés en ligne droite], [sont tels] qu'un quatrième atome placé en l'un de ces points, formera toujours avec les trois premiers atomes, trois couples qu'aucun autre atome ne pourra former » (Ib., p. 45). « Si l'on donne trois atomes avec les distances d'un quatrième atome aux trois premiers et que l'une des distances ne soit pas la somme des deux autres, la position du quatrième atome sera déterminée, ou du moins, deux atomes seulement pourront être créés, de manière que leurs rapports avec les trois premiers donnent naissance aux trois distances dont il s'agit. Ajoutons que ces deux atomes seront situés de deux côtés différents du plan qui passera par les trois premiers » (Ib., pp. 48-49) (*).

C. De Tilly. « L'objet principal de la géométrie est la recherche des relations entre les intervalles des couples de points situés dans l'espace ». *Essai de géométrie analytique générale*

---

de ses *Œuvres mathématiques* (édition Gerhardt), parce que Leibniz y emploie des signes idéographiques. Nous empruntons nos citations à l'édition de 1902 du *Formulaire mathématique* de Peano (Turin, Clausen, 1902), pp. 264-265, et à la note du même intitulée : *La Geometria basata sulle idee di punto e distanza* (Ib. 1902), p. 5. Les passages de Leibniz cités ou traduits se trouvent dans le t. V de ses *Œuvres mathématiques*, pp. 145, 162, 189.

(*) Les *Leçons de physique générale* ont été professées par Cauchy à Turin, en 1833. On voit que Cauchy y considère la Géométrie comme *la physique mathématique des distances*. A la fin de l'une de ces leçons, il énonce nettement le principe de l'*arithmétisation* de la géométrie : « *Toutes les propriétés des lignes, des surfaces, des volumes peuvent être considérées comme des propriétés des nombres* » (Ib., p. 50).

(Extrait du t. XLVII des MÉMOIRES COURONNÉS ET AUTRES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE ; 1892), p. 3. « Lorsque le nombre de points à partir duquel les intervalles ne sont plus tous arbitraires est égal à n, on dit que la géométrie est à n-2 dimensions » (Ib., p. 6). « Le nombre des relations ne peut surpasser l'unité » (Ib., p. 7). « *Ligne droite.* C'est la ligne, ou la suite de points du système, telle que si l'on en considère trois points, aucun autre point du système ne peut être distant de deux de ces points comme l'est le troisième » (Ib., pp. 18-19). « La ligne droite est un espace à une dimension » (Ib., p. 24). « Le plan est un espace à deux dimensions ».

2. *Introduction d'un point supplémentaire dans la définition d'une droite, d'un plan, d'un espace.* Gauss a remarqué qu'il y a dans la notion d'espace un élément empirique irréductible à des concepts. « La différence entre *à droite* et *à gauche* ne peut se définir, mais seulement se montrer » (*Werke*, t. VIII, p. 247). « La distinction entre à droite et à gauche est *en soi* complètement déterminée, aussitôt que l'on a fixé (à volonté) le sens des mots en avant et en arrière *dans* le plan et des mots au-dessus et au-dessous par rapport aux deux faces du plan. Cependant nous *ne* pouvons communiquer aux autres l'intuition que nous avons de cette distinction *que* par des indications relatives à des objets matériels présents devant nous » (*Werke*, t. II, p. 177).

Il résulte de là que les définitions concordantes de Leibniz, de Cauchy et De Tilly pour une droite, un plan, un espace ne sont suffisantes pour constituer un système de géométrie, que si l'on désigne les points fondamentaux de ces figures par des lettres ou d'autres signes, qui, de deux points donnés, permettent de dire : celui-ci est à gauche, celui-là est à droite. Sans cela, il reste quelque chose d'ambigu dans la description des figures, comme nous allons le montrer par l'exemple de la droite.

Soit une droite définie par deux points dont nous prenons la distance pour *unité*. Un troisième point de la droite sera, par exemple, celui qui sera distant de l'un des points fondamentaux d'une distance *deux*, de l'autre point fondamental d'une distance *trois*. Si nous ne faisons aucune distinction entre les deux points fondamentaux, on trouvera *deux* points jouissant de la propriété d'en être distants des quantités *deux* et *trois*, et nous dirons de l'un qu'il est à gauche, de l'autre qu'il est à droite du segment de droite qui réunit les deux points. On peut faire des remarques semblables sur le plan et l'espace, mais elles sont moins simples.

Pour éviter de devoir recourir, dans chaque cas, à des désignations empiriques telles que *à droite* et *à gauche, en avant* et *en arrière, au-dessus* et *en dessous,* il suffit d'introduire un point supplémentaire dans la définition d'une droite, d'un plan, d'un espace.

Un point x d'une droite sera défini sans ambiguïté par ses distances aux deux points fondamentaux a et b qui caractérisent la droite et par sa distance à un troisième point supplémentaire c de cette droite, c n'étant pas au milieu de a, b. Un point y d'un plan sera défini par ses distances aux trois points fondamentaux d, e, f qui déterminent le plan et par sa distance à un point supplémentaire g de ce plan, g n'étant pas équidistant de d, e, f. Un point z d'un espace à trois dimensions sera défini par ses distances à quatre points fondamentaux h, i, k, l qui déterminent cet espace et un point supplémentaire m non équidistant de h, i, k, l ; et ainsi de suite.

Les distances supplémentaires ainsi introduites (par exemple, xa, xb dans le cas de la droite ab), ne seront pas arbitraires, d'après les définitions de la droite, du plan, de l'espace ; elles sont, sous forme de *concepts*, des éléments de description des figures considérées, destinés à éviter les désignations empiriques *à droite, à gauche*, etc. Mais ces désignations empiriques resteront nécessaires pour dire où se trouvent les points supplémentaires c, g, m.

3. *Définitions analytiques de la droite, du plan, d'un espace à trois ou plus de dimensions.* Les géomètres ont trouvé, en partant des notions élémentaires et en admettant plus ou moins de postulats, que les définitions précédentes se traduisent analytiquement, pour un espace euclidien à trois dimensions, par une relation de la forme

$$\alpha\,(x1)^2 + \beta\,(x2)^2 + \gamma\,(x3)^2 + \delta\,(x4)^2 + \epsilon\,(x5)^2 = 1\,; \qquad (1)$$

pour un espace non euclidien à trois dimensions, par

$$\begin{aligned}\alpha \cos k\,(x1) + \beta \cos k\,(x2) + \gamma \cos k\,(x3) + \delta \cos k\,(x4)\\ + \epsilon \cos k\,(x5) = 0,\end{aligned} \qquad (2)$$

et, de même, pour la droite, le plan, ou des espaces à plus de trois dimensions. Les quantités $x1$, $x2$, $x3$, $x4$, $x5$ sont les distances d'un point quelconque x de l'espace aux points fondamentaux et au point supplémentaire 1, 2, 3, 4, 5 de l'espace considéré : α, β, γ, δ, ϵ, sont des constantes indépendantes de x ; k une autre constante, réelle dans l'espace riemannien, purement imaginaire dans l'espace lobatchefskien (*).

Les relations (1), (2) sont comprises dans la forme plus générale

$$\alpha\,\mathrm{F}(x1) + \beta\,\mathrm{F}(x2) + \gamma\,\mathrm{F}(x3) + \delta\,\mathrm{F}(x4) + \epsilon\,\mathrm{F}(x5) = \zeta, \quad (3)$$

ζ étant aussi une constante et $z = \mathrm{F}(xy)$ désignant une fonction de la distance xy de deux points x, y.

Il semble qu'*une relation de cette forme est la plus générale qui puisse exister entre cinq distances* $x1$, $x2$, $x3$, $x4$, $x5$ d'un point x, aux points fondamentaux et au point supplémentaire, 1, 2, 3, 4, 5, de cet espace, *pourvu que* F *soit une fonction telle que, de* $z = \mathrm{F}(xy)$, *on puisse tirer pour* xy *une valeur positive déterminée pour chaque valeur de* z. En effet, cette relation symétrique par rapport aux cinq distances, comme elle doit évidemment l'être, permet de trouver, moyennant l'hypothèse faite sur l'inversion de F, une des cinq distances quand les quatre autres sont données.

Nous allons prouver que (3) est équivalent à (1) et (2).

4. Théorème I. *On peut supposer* $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0$ *ou* $\zeta = 0$. En effet, on tire de la relation (1),

$$\begin{aligned}\alpha\,[\mathrm{F}(x1) - k] + \beta\,[\mathrm{F}(x2) - k] + \cdots + \epsilon\,[\mathrm{F}(x5) - k] \\ = \zeta - k(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon).\end{aligned}$$

1° Si $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon$ n'est pas nul ni ζ non plus, posons

$$\zeta - k(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon) = 0,\ \mathrm{F}(xy) - k = f(x, y),$$

et la relation (3) deviendra

$$\alpha f(x1) + \beta f(x2) + \cdots + \epsilon f(x5) = 0.$$

On a évidemment

$$f(11) = f(22) = f(33) = f(44) = f(55) = \text{constante } l.$$

(*) Voir notre article sur ce sujet dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1895, XIX, 1^{re} partie, pp. 189-196.

Si l'on fait

$$f(xy) = l\varphi(xy),$$

on pourra écrire la relation entre les f,

$$\alpha\varphi(x1) + \beta\varphi(x2) + \gamma\varphi(x3) + \delta\varphi(x4) + \epsilon\varphi(x5) = 0, \qquad (4)$$

avec la condition

$$\varphi(11) = \varphi(22) = \varphi(33) = \varphi(44) = \varphi(55) = 1.$$

2° Si $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0$, retranchons du premier membre de l'équation (3), la quantité

$$\alpha F(11) + \beta F(22) + \gamma F(33) + \delta F(44) + \epsilon F(55) \qquad (5)$$

nulle, puisque $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0$ et que

$$F(11) = F(22) = F(33) = F(44) = F(55).$$

En posant

$$\psi(xy) = F(xy) - F(xx),$$

la relation (3), après soustraction de la quantité (5), deviendra

$$\alpha\psi(x1) + \beta\psi(x2) + \gamma\psi(x3) + \delta\psi(x4) + \epsilon\psi(x5) = \zeta \qquad (6)$$

et l'on aura

$$\psi(xx) = F(xx) - F(xx) = 0.$$

Remarque. En supposant que 5 se confonde avec 4, puis, de plus, 4 avec 3, on trouve les équations du plan et de la droite :

$$\left\{ \begin{aligned} &\eta\varphi(x1) + \theta\varphi(x2) + \iota\varphi(x3) + \kappa\varphi(x4) = 0, &&(7)\\ &\eta\psi(x1) + \theta\psi(x2) + \iota\psi(x3) + \kappa\psi(x4) = \omega, &&(8) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\lambda\varphi(x1) + \mu\varphi(x2) + \nu\varphi(x3) = 0, &&(9)\\ &\lambda\psi(x1) + \mu\psi(x2) + \nu\psi(x3) = \rho. &&(10) \end{aligned} \right.$$

5. Théorème II. *On a* $\varphi(xy) = \cos m(xy)$, *m étant réel ou purement imaginaire*. Dans (9), faisons coïncider successivement x avec 1, 2, 3. Il viendra

$$\begin{aligned}\lambda + \mu\varphi(12) + \nu\varphi(13) &= 0,\\ \lambda\varphi(12) + \mu + \nu\varphi(23) &= 0,\\ \lambda\varphi(13) + \mu\varphi(23) + \nu &= 0,\end{aligned}$$

d'où, en éliminant λ, μ, ν,

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(12) & \varphi(13) \\ \varphi(12) & 1 & \varphi(23) \\ \varphi(13) & \varphi(23) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Posons $\varphi(12) = \cos u$, $\varphi(23) = \cos v$, $\varphi(13) = \cos w$; cette relation deviendra

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos u & \cos w \\ \cos u & 1 & \cos v \\ \cos w & \cos v & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, après quelques réductions,

$$(\cos w - \cos u \cos v - \sin u \sin v)(\cos w - \cos u \cos v + \sin u \sin v) = 0,$$

c'est-à-dire

$$w = u + v, \text{ ou } u = v + w, \text{ ou } v = u + w.$$

Supposons, pour fixer les idées, que l'on regarde 2 comme compris entre 1 et 3, ou $12 + 23 = 13$. La relation $w = u + v$, exprime que les fonctions $w = \operatorname{arc}\cos\varphi(13)$, $u = \operatorname{arc}\cos\varphi(12)$, $v = \operatorname{arc}\cos\varphi(23)$ ont les mêmes propriétés que les distances : elles s'ajoutent le long de la droite 123. Par suite, $\operatorname{arc}\cos\varphi(xy) = m(xy)$, m étant réel ou purement imaginaire. On ne peut pas supposer m complexe, parce que, dans cette hypothèse, les équations (4), (7), (9) se décomposeraient en deux et l'on pourrait, par élimination, diminuer d'une unité le nombre des dimensions de l'espace considéré (De Tilly, Mémoire cité, p. 7, n° 10).

Remarque. Les relations $w = u + v$, $u = v + w$, $v = u + w$ correspondent aux trois positions relatives possibles des points 1, 2, 3 dont il est question au n° 3.

6. Théorème III. *On a* $\psi(xy) = (xy)^2$. Faisons coïncider x successivement avec 1, 2, 3 dans (10) et souvenons-nous que $0 = \lambda + \mu + \nu$. Il viendra

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda + \mu + \nu, \\ \rho &= 0 + \mu\psi(12) + \nu\psi(13), \\ \rho &= \lambda\psi(12) + 0 + \nu\psi(23), \\ \rho &= \lambda\psi(13) + \nu\psi(23) + 0\,; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \psi(12) & \psi(13) \\ 1 & \psi(12) & 0 & \psi(23) \\ 1 & \psi(13) & \psi(23) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Posons

$$\psi(12) = X^2, \quad \psi(23) = Y^2, \quad \psi(13) = Z^2.$$

La relation devient

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & X^2 & Z^2 \\ 1 & X^2 & 0 & Y^2 \\ 1 & Z^2 & Y^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 = 0,$$

ou

$$(Z + X + Y)\,(Z - X - Y)\,(Z - X + Y)\,(Z + X - Y) = 0. \quad (11)$$

Si l'on suppose $13 = 12 + 22$, on peut prendre X, Y, Z tels que $Z = X + Y$, et ces fonctions ont les mêmes propriétés que les distances, elles s'ajoutent le long de la droite 123. Par suite, $X = m\,(12)$, $Y = m\,(23)$, $Z = m\,(13)$, m étant une constante quelconque qui s'élimine d'elle-même de toutes les relations géométriques.

Remarque. Les relations $Z = X + Y$, $X = Y + Z$, $Y = Z + X$, qui se déduisent de (11), correspondent aux trois positions relatives du point supplémentaire par rapport aux deux points qui déterminent la droite.

Le R. P. Willaert, S. J. fait la communication suivante *Sur le nombre moyen de séries de* r *rouges consécutives dans une suite de* n *épreuves à la roulette ; correction de la formule de Grünbaum.*

1. Soit une suite de n épreuves faites à la roulette que nous supposons sans zéro ;

RRNNRN ... NRRRRNR.

Une série de k rouges est un groupe de k rouges consécutives *isolé* par des noires ou par sa position en tête ou à la fin de la ligne.

d'Alembert avait émis l'idée que les séries d'un grand nombre de rouges consécutives, quoique mathématiquement possibles, ne l'étaient pas physiquement. D'après lui, une série exclusivement composée de rouges devait se présenter moins fréquemment qu'une série d'un même nombre d'éléments, mais composée de rouges et de noires suivant un ordre donné d'avance. « La probabilité d'une combinaison où le même effet est supposé arriver plusieurs fois de suite, est d'autant plus petite, toutes choses d'ailleurs égales, que ce nombre de fois est plus grand, en sorte que quand il est très grand la probabilité est absolument nulle ou comme nulle, et que quand il est assez petit, la probabilité n'est que peu ou point diminuée par cette considération (*). » En 1899, *K. Marbe* évalua sur un ensemble d'environ 80 000 épreuves le nombre de séries de une, deux, trois... rouges et constata des écarts systématiques semblant confirmer les pressentiments de d'Alembert : les longues séries étaient moins fréquentes que ne le faisait prévoir la théorie. *H. Grünbaum* en 1904 donna la raison de ces écarts : la théorie de K. Marbe était en défaut. Il en signala le vice et établit une nouvelle formule. Le nombre s_k de séries de

---

(*) *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, t. V, p. 291.

k rouges contenues dans une suite de n épreuves est, d'après lui (*),

$$s_k = \frac{n}{2^{k+2}}.$$

2. La formule de Grünbaum, quoique suffisante en pratique, n'est pas rigoureuse.

Je me propose de déterminer le *nombre moyen* de séries de k rouges que contient une suite de n épreuves. Pour définir ce nombre, que je désigne par s_k, je suppose formées toutes les suites possibles de n épreuves. Elles sont au nombre de 2^n. Dans le tableau obtenu il y a S_k séries de k rouges. Par définition,

$$S_k = \frac{s_k}{2^n}.$$

Nous arriverons rapidement à calculer le nombre S_k en déduisant du tableau des $n2^n$ épreuves la probabilité *a posteriori* de tirer un groupe de i rouges consécutives quand on a déjà tiré une série de k rouges. Cette probabilité doit avoir pour valeur $\frac{1}{2^k}$.

Cas favorables. Toutes les séries d'au moins $k + i$ rouges.

$$p = S_{k+i} + S_{k+i+1} + \cdots + S_n. \qquad k + i \leq n.$$

Cas possibles. Toutes les séries de k rouges au moins, sauf celles qui, situées vers la fin d'une ligne, ne peuvent plus être suivies de i rouges, c'est-à-dire les séries qui commencent après le rang $n - (k + i)$. L'ensemble de ces lignes est figuré dans le tableau suivant :

$$\left.\begin{array}{l}
\overbrace{+\ +\ \cdots\ +}^{n-i-k}\ \mathrm{N}\ \overbrace{\mathrm{R}\ \mathrm{R}\ \cdots\ \mathrm{R}}^{k}\ \overbrace{+\ +\ \cdots\ +}^{i-1}\\
+\ +\ \cdots\ +\ +\ \mathrm{N}\ \mathrm{R}\ \mathrm{R}\ \cdots\ \mathrm{R}\ +\ \cdots\ +\\
\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\\
+\ +\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\ \mathrm{N}\ \mathrm{R}\ \cdots\ \mathrm{R}
\end{array}\right\}\ i$$

(*) En réalité, la formule de Grünbaum est $s_i = \frac{n}{2^{i+1}}$; mais il fait entrer en compte toutes les séries de i éléments (reine Gruppen), qu'elles soient composées de rouges ou de noires. On trouvera le résumé de ces travaux dans les traités de probabilités de CZUBER, 2^e édit., vol. I, p. 144 ; et de BRUNS, p. 216.

Le nombre de ces lignes est, en tenant compte des arrangements possibles des lettres représentées par le signe +,

$$2^{n-i-k} \cdot 2^{i-1} + 2^{n-i-k+1} \cdot 2^{i-2} + \cdots + 2^{n-k-1} = i2^{n-k-1}$$

Nous aurons, comme nombre de cas possibles,

$$q = S_k + S_{k+i} + \cdots + S_n - i2^{n-k-1}.$$

Et comme

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2^i},$$

on obtient,

$$(1) \qquad S_k + S_{k+1} + \cdots + S_{k+i-1}$$
$$= (2^i - 1)[S_{k+i} + S_{k+i+1} + \cdots + S_n] + i2^{n-k-1}. \quad k < n$$

En changeant d'indice :

$$S_{k+1} + S_{k+2} + \cdots + S_{k+i}$$
$$= (2^i - 1)[S_{k+i+1} + S_{k+i+2} + \cdots + S_n] + i2^{n-k-2}. \; k < n-1$$

Par soustraction,

$$(2) \qquad S_k = 2^i S_{k+1} + i2^{n-k-2}. \qquad k < n-1$$

Faisons dans la formule (2)

$$i = n - k - 1:$$
$$S_k = 2^{n-k-1} S_{n-1} + (n-k-1)\, 2^{n-k-2}.$$

La formule (1) donne pour

$$i = 1, \quad k = n - 1,$$
$$S_{n-1} = S_n + 1.$$

On a évidemment

$$S_n = 1.$$

D'où

$$S_{n-1} = 2.$$

Il vient donc finalement

$$S_k = 2^{n-k} + (n-k-1)\,2^{n-k-2},$$

(2BIS) $$S_k = 2^{n-k-2}(n-k+3). \qquad k < n\,(^*)$$

Et la valeur de $s_k = \dfrac{S_k}{2^n}$ est

(3) $$s_k = \frac{n-k+3}{2^{k+2}}.$$

3. *Vérifications.* Nous avons fait la vérification de la formule (2BIS) pour toutes les combinaisons des valeurs $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$; $k = 1, 2, 3, \ldots 9$. La formule s'est montrée rigoureusement exacte. Celle de Grünbaum ne l'est donc pas, quoique pour les grandes valeurs de n elle soit très suffisante.

Les épreuves de roulette obtenues à Monte-Carlo pendant la semaine du 25 février au 3 mars 1906 donnent les résultats suivants :

	VALEUR			VALEUR	
	CALCULÉE (**)	TROUVÉE		CALCULÉE (**)	TROUVÉE
S_1	710	753	S_8	5	6
S_2	355	366	S_9	3	2
S_3	177	179	S_{10}	1	1
S_4	89	81	S_{11}	1	1
S_5	44	41	S_{12}	0	1
S_6	22	18	S_{13}	0	0
S_7	11	10	S_{14}	0	0

4. Si l'on multiplie $S_1, S_2, \ldots S_n$ respectivement par $1, 2, \ldots n$, on obtient le nombre total de rouges du tableau des 2^n arrangements. D'où l'identité

$$\sum_{k=1}^{n-1} k2^{n-k-2}\,(n-k+3) = n\,(2^{n-1}-1).$$

(*) La suite des hypothèses donne $k < n - 1$; mais on verra aisément que la formule est encore exacte pour $k = n - 1$.

(**) Ces valeurs ont été arrondies au nombre entier le plus voisin.

Le R. P. Bosmans indique quelques corrections à introduire dans la communication qu'il a faite en octobre dernier, à la première section, sur une copie d'une lettre de Mersenne conservée dans les papiers de Wendelin, aux Archives générales du royaume. Ces corrections ont été introduites dans le texte publié dans les ANNALES, 1re partie, pp. 74-82.

M. de la Vallée Poussin fait une communication sur le *théorème de Holditch*.

Ce théorème remarquable s'énonce généralement comme il suit :

Si une corde de longueur $c + c'$ se meut sur une courbe fermée et *convexe* de manière à faire le tour de la courbe, l'aire comprise entre la courbe et le lieu du point M qui partage la corde en deux segments c et c', est égale à $\pi cc'$.

M. de la Vallée Poussin fait remarquer que la démonstration qu'il a donnée dans son cours subsiste si la courbe fermée n'est pas convexe et si le mouvement de la corde n'est possible que moyennant des rétrogradations des extrémités. Toutefois, si le lieu de M coupe la courbe, il faut donner des signes contraires aux aires situées de part et d'autre de celle-ci.

M. Mansion entretient ensuite la section de l'*enseignement de la trigonométrie*, au point de vue éducatif, pour les jeunes gens qui ne se destinent pas aux carrières où la connaissance de la *théorie des fonctions circulaires* est indispensable. On pourrait réduire l'enseignement de la trigonométrie plane à ce qui est indispensable pour résoudre les triangles rectangles, et y ajouter les premiers éléments de la trigonométrie sphérique, réduite aussi à l'étude des triangles rectangles. Les formules fondamentales de cette trigonométrie sphérique simplifiée sont établies d'une manière très simple dans les anciens manuels, celui de Legendre, par exemple.

Plusieurs membres font observer que ces notions de trigonométrie sphérique sont nécessaires et suffisantes pour comprendre la géographie et la cosmographie.

Seconde section

La seconde section se réunit à la sixième pour entendre une communication de M. Schmidt-Leybold sur *la nouvelle machine pneumatique à mercure du Dr Gaede,* avec démonstrations et expériences. En voici un résumé.

M. Schmidt rappelle les origines de la machine pneumatique et passe en revue les différents modèles qui se sont succédé depuis l'appareil original d'Otto de Guericke. Il suit le progrès réalisé et, pour chaque perfectionnement, rappelle les principes qui y ont conduit et les résultats qu'ils ont fournis. C'est ainsi qu'il passe en revue les machines à huile et à mercure, celles de Fleuss, de Geissler, de Sprengel, de Fritsche et Pichon, etc. Il s'arrête spécialement à la pompe à mercure du Dr Gaede.

Elle se compose d'un récipient en fonte à demi rempli de mercure dans lequel tourne un tambour. Pendant la rotation de ce tambour, les chambres en lesquelles il se subdivise se remplissent alternativement d'air et de mercure. Elles aspirent l'air du récipient où il s'agit de faire le vide, et le refoulent à l'extérieur dans le cours du mouvement de rotation. Le système présente une certaine analogie avec un compteur à gaz, avec cette différence que, dans ce dernier, c'est le gaz qui produit le mouvement de rotation, tandis que dans la pompe Gaede c'est une force extérieure qui produit ce mouvement et déplace le gaz.

M. Schmidt décrit chacun des organes de l'appareil, en montre le fonctionnement, et réalise un certain nombre d'expériences variées.

Un vase de 6 litres est vidé à 0,00001 mm., en 15 minutes. Un tube à décharge simple, dont les électrodes sont reliées à une bobine d'induction, est rempli d'air à la pression atmosphérique. On met la pompe en marche : la forme de la décharge change à mesure que le vide augmente : c'est d'abord un ruban lumineux ; puis les stratifications (roses), les rayons cathodiques (violets), la fluorescence du verre (verte), apparaissent successivement jusqu'à ce que le tube devienne trop résistant et que l'étincelle passe directement entre les bornes de la bobine (Crookes). Un tube de Crookes dans lequel on a placé divers minéraux, s'illumine sous l'influence des rayons cathodiques. Un tube de Röntgen donne, en deux minutes, la silhouette d'une main, obtenue par les rayons X, sur un écran au platinocyanure de baryum.

Un vide préliminaire est nécessaire pour arriver aux limites extrêmes de raréfaction. Pour l'obtenir on peut se servir d'une trompe à eau, donnant un vide d'environ 15 à 20 mm. ; mais le vide de la pompe Gaede devient d'autant plus élevé que le vide préliminaire est plus parfait. M. Schmidt se sert, pour réaliser le vide préliminaire, d'une pompe nouvelle, également inventée par M. Gaede. Il en donne le principe et réalise quelques expériences avec cet appareil : le vide dans un tube à décharge reproduit les mêmes phénomènes qu'avec la pompe Gaede, mais le degré de vide n'est pas le même ; on n'arrive pas au vide de Röntgen. La congélation de l'eau s'observe en une demi-minute. Cet appareil peut travailler, fonctionner comme soufflerie. Le conférencier le montre par quelques expériences intéressantes : le paradoxe aérostatique de Clément et Desormes ; l'emploi du chalumeau ; des expériences de Cours sur les tuyaux sonores etc.

M. le Dr Étienne Henrard entretient la seconde section des *Procédés de recherche des corps opaques aux rayons X introduits dans l'organisme par effraction.*

La recherche et l'extraction des corps étrangers, opaques aux rayons X, qui ont pénétré dans les tissus ont été grandement facilitées depuis la célèbre découverte de Röntgen, et cependant que de difficultés, que de mécomptes encore avant d'aboutir, par exemple, à l'extraction d'un fragment d'aiguille dans la main !

Quels sont les moyens dont nous disposons pour la détermination du siège de ces petits corps étrangers que l'on est enclin à déclarer inoffensifs peut-être parce qu'on éprouve trop de difficultés à les retrouver ?

Disons d'abord quelques mots des méthodes employées jusqu'ici et qui doivent être abandonnées.

Ce qu'il ne faut pas faire tout d'abord, c'est prendre deux épreuves radiographiques *planes,* du membre où se trouve logé le corps étranger, sous deux directions se croisant à l'angle droit. Sur une épreuve de la jambe prise dans ces conditions le fragment d'aiguille paraîtra contigu au tibia, tandis que sur l'autre il semblera à proximité du péroné. Sur une épreuve, fournie par des rayons X, traversant la main d'arrière en avant, un fragment d'aiguille dans la paume paraîtra transversal, tandis qu'il sera antéro-postérieur. Une épreuve prise le bord cubital sur la plaque ne donnera aucun renseignement, car suivant l'angle sous lequel les rayons X traverseront la main, le corps étranger paraîtra ou dorsal, ou palmaire. Ce procédé ne mérite donc pas de retenir l'attention.

Ce qu'il ne faut pas faire, c'est l'*extraction sous l'écran radioscopique*. Pas plus que la radiographie plane, la radioscopie ne donne de renseignements sur la direction des corps étrangers. Cette opération est du reste dangereuse pour le blessé : l'anesthésie générale est peu aisée à pratiquer dans l'obscurité, l'arrachement d'un muscle, d'un nerf, la coupure d'une artère provoquant une hémorrhagie grave dont on ne se rend pas compte dans l'obscurité, peuvent être produits par la pince que l'on introduit dans la plaie. De plus, il est bien difficile d'opérer aseptiquement de cette manière.

Cette opération est également dangereuse pour le chirurgien, car, quoi qu'en dise une récente thèse de Paris, elle est souvent difficile et longue, et, par suite, expose à la radiodermite l'opérateur soumis à l'action prolongée des rayons de Röntgen.

La vraie méthode, c'est la radiographie stéréoscopique avec repères métalliques à la surface de la peau, placés à l'orifice d'entrée du corps étranger ou à des repères chirurgicaux facilement reconnaissables. Ces repères métalliques seront : un petit plomb, un fil recourbé, un cercle métallique, une agrafe de Michel.

Il sera souvent utile de mettre deux repères, un palmaire et un dorsal, par exemple, dans le cas de corps étrangers de l'éminence thénar ; un repère contre l'apophyse orbitaire interne, un contre l'apophyse orbitaire externe dans le cas de corps étrangers de l'orbite.

Dans la plupart des cas, et surtout pour les régions du corps de faible épaisseur, la radiographie stéréoscopique sera suffisante. La preuve en est que sur 46 cas de corps étrangers de toutes les régions du corps, je puis signaler 45 succès et ces opérations ont été faites par un grand nombre de praticiens différents.

La radiographie stéréoscopique donne aux surfaces leurs formes, elle indique la direction exacte des corps étrangers. Toutefois la profondeur étant difficilement appréciable dans les régions épaisses, il faudra recourir, dans ce cas, à un procédé géométrique. Il en existe une centaine, je me garderai bien de les décrire et je m'arrêterai au plus simple qui m'a donné, dans des épreuves expérimentales, des résultats surprenants de justesse.

J'ai placé dans un crâne sec 4 balles et plombs, une épingle piquée dans la faux du cerveau, et j'ai pu déterminer exactement la profondeur à laquelle se trouvaient ces corps étrangers.

Le procédé consiste à obtenir sur la même plaque par deux poses successives, sous deux angles différents, deux ombres du même objet. Schématisons cette opération. Le lecteur tracera facilement la figure.

Soient C le corps étranger, réduit à un point pour la facilité de la démonstration ; E l'épaisseur de la région dans laquelle se trouve ce corps étranger ; A et A' les centres de l'anticathode dans les deux points de vue ; P le plan de la plaque, parallèle à la ligne AA' qui réunit les centres de l'anticathode.

L'anticathode étant placée en A, l'ombre du corps étranger se marquera sur la plaque en a, avec l'anticathode en A', l'ombre sera en a'.

Réunissons par des droites AA', Aa, $A'A'$, $a'a$, nous aurons construit ainsi deux triangles semblables.

Traçons les hauteurs de ces deux triangles : soient h et x ; cette dernière hauteur est l'inconnue du problème, c'est-à-dire la distance du corps étranger à la plaque.

Nous pouvons écrire la proportion suivante :

$$\frac{x}{h} = \frac{a'a}{AA'} = \frac{d}{D}$$

ou, en posant $x + h = H$

$$\frac{x}{H} = \frac{d}{d + D}$$

et enfin

$$x = H\frac{d}{d + D}$$

où H ou $x + h$ représente la hauteur connue de la ligne des points de vue au-dessus du plan P ; *d* ou *a'a* la distance mesurée sur la plaque entre les deux ombres ; D ou AA' la distance connue entre les deux points de vue.

Mais la distance du corps étranger à la plaque est difficilement repérable par le chirurgien, toutes les régions ne s'appliquant pas parfaitement sur la plaque pour l'obtention de l'épreuve radiographique. Je propose donc de fixer à la surface de la peau, à l'endroit où l'on prévoit que devra se faire l'incision pour l'extraction, un repère métallique (petit plomb). Celui-ci impressionnant également la gélatine, on pourra déterminer aussi sa distance à la plaque et la différence que l'on trouvera entre cette distance et celle du corps étranger donnera la profondeur exacte de celui-ci par rapport au repère.

Je termine en signalant un petit appareil de date ancienne déjà et qui semble délaissé. C'est l'auto-téléphone sonde de Hedley, dans lequel je remplace la sonde métallique nue par un stylet isolé à sa partie moyenne.

Cet appareil se compose d'un petit téléphone que l'opérateur se place à l'oreille. Ce téléphone est mis en rapport par un conducteur métallique avec une lame de plomb recouverte d'une compresse de gaze, imbibée d'une solution saline. J'ai remplacé cette lame de plomb trop lourde par deux feuilles de plomb de 1/8 de millimètre d'épaisseur, que l'on peut fixer au moyen d'une bande sur un doigt du blessé, en ayant bien soin naturellement d'interposer la compresse entre la surface de la peau et le plomb.

Un second conducteur métallique réunit le téléphone au stylet. Celui-ci, à l'exception de ses deux extrémités (l'une de deux centimètres, l'autre de quatre millimètres) est isolé par du caoutchouc durci.

Introduisons le stylet dans la plaie. Les liquides du corps humain formant électrolyte, nous avons un circuit téléphonique complet.

Lorsque l'*extrémité* du stylet touchera le corps étranger, *et alors seulement,* on percevra nettement un bruissement métallique.

L'avantage du stylet isolé sur la sonde métallique nue de Hedley, est évident. En effet, avec cette dernière introduite *profondément* dans la plaie, on pourra percevoir un bruissement métallique, soit au contact avec des écarteurs de la plaie, soit encore à un contact latéral de la sonde avec le corps étranger situé *superficiellement,* et à côté duquel on a passé en introduisant la sonde.

M. Van de Vyver étudie les résultats que lui a fournis l'observation de nombreux *ballonnets-sondes* et formule les conclusions qu'on peut en tirer dans les *pronostics sur la direction du vent.*

Dans l'ANNUAIRE MÉTÉOROLOGIQUE que nous avons publié l'an dernier (*), nous disions, à propos du service des ballonnets-sondes, que nous avons organisé à la station de Géographie mathématique de l'Université de Gand : « *Nous espérons pouvoir déduire de ces observations des données sérieuses relatives aux pronostics à faire en vue de la détermination de la direction du vent* ».

Nous croyons être en mesure de tenir, tout au moins en partie, cette promesse, et le mieux que nous puissions faire, est, nous semble-t-il, de mettre sous les yeux du lecteur, les résultats que nous avons déduits du lâcher des 500 premiers ballonnets.

Rappelons d'abord, que le lâcher se fait régulièrement (chaque fois que l'état atmosphérique le permet) entre 21 et 22 heures de temps moyen, donc vers 9 ou 10 heures du matin.

Les ballonnets employés sont de deux espèces : les uns petits, à force ascensionnelle de 3 grammes environ ; les autres plus grands et dont la force ascensionnelle atteint 8 à 9 grammes.

Les ballonnets sont gonflés, toujours d'une même quantité de gaz d'éclairage et emportent les uns une carte légère, les autres une carte postale ordinaire.

Au dos de chaque carte est imprimé un questionnaire en trois langues, priant la personne qui trouve la carte, d'indiquer l'endroit, le jour et l'heure où elle a été trouvée — l'état du ciel — la direction du vent, des nuages, etc... bref, demandant tous les renseignements qui peuvent avoir une utilité directe, surtout si l'on a vu tomber la carte.

Chaque carte est barrée en travers, au recto et au verso, d'un large trait rouge de nature à attirer spécialement l'attention du passant qui remarquerait la carte sur le sol.

(*) ANNUAIRE MÉTÉOROLOGIQUE de la station de Géographie mathématique de l'Université de Gand. Mars 1907-février 1908. J. Demeester, imprimeur, Roulers-Bruxelles.

Les ballonnets sont suivis aussi longtemps que possible à l'aide d'une lunette astronomique de Secrétan (obj. 55^{mm} grossissement 30); nous avons muni la lunette d'une série de 5 fils micrométriques distants entre eux d'intervalles variant du simple au triple — ce qui nous permet, d'après un étalonnage, d'apprécier le diamètre apparent des ballonnets et d'en déduire approximativement leur hauteur et leur distance.

Chaque ballonnet a son numéro et l'on note avec soin, son mode d'ascension — les virages qu'il opère — l'allure de sa carte, agitée ou calme, et toutes les particularités que peut présenter sa course dans l'atmosphère.

Les ballonnets sont suivis en moyenne, pendant 7 à 8 minutes; mais par beau temps clair, il n'est pas rare que nous les suivions pendant 20, 25 et 30 minutes; au contraire, le temps est-il couvert, brumeux ou agité, ils nous échappent parfois au bout de 2 à 3 minutes, soit qu'ils disparaissent dans un nuage ou dans la brume, soit encore que, rabattus dans les régions basses, ils restent masqués par les constructions qui nous entourent.

Nous avons analysé l'ascension des 500 premiers ballonnets, en tenant note chaque fois de la direction du départ; nous avons classé à part les ballonnets qui se sont maintenus dans cette direction, et ceux qui s'en sont écartés. Dans l'un et dans l'autre cas, nous avons examiné ce qu'est devenu le vent régnant après l'ascension.

Voici les résultats que nous avons obtenus :

A. 125 ballonnets sont partis dans une direction déterminée et ont continué leur marche dans *la même direction* aussi longtemps que nous avons pu les observer.

Toujours le vent régnant est resté fixé dans *la même direction* au moins, endéans les 24 heures qui ont suivi le lâcher.

B. 194 ballonnets ont *viré* de direction après leur départ.

194 fois aussi, le vent régnant a *viré* à la surface du sol et dans le sens que nous avions prévu, en tenant compte du virage du ballonnet.

Il va sans dire, que la prévision devait être réalisée, en faisant intervenir d'une *façon raisonnée*, tous les éléments dont on disposait — direction du ballonnet, de son virage, direction du vent sur le sol, vitesse de variation de ces éléments, etc... La variation plus ou moins rapide du vent à la surface, étant généralement fonction de la rapidité du virage, etc.

Très souvent, le virage des ballonnets a été observé 2 à 3 minutes après le lâcher et dans des zones de 300, 400 à 500 mètres d'altitude.

Sur les 194 fois, le vent a viré dans le sens prévu :

109 fois endéans les 3 h. qui suivirent le lâcher
42 » » 6 » »
18 » » 9 » »
18 » » 12 » »
2 » » 15 » »
2 » » 18 » »
1 » » 24 » »
2 fois au delà des 24 » »

C. 150 ballonnets ont été lâchés sans que nous ayons pu constater un virage (ballonnets entrés dans la brume, ou les nuages, ou masqués par des bâtiments). Dans ces 150 cas, le vent a viré :

26 fois endéans les 3 h. qui suivirent le lâcher
31 » » 6 » »
34 » » 9 » »
34 » » 12 » »
12 » » 15 » »
13 » » 18 » »

D. 15 ballonnets ont été lâchés par des vents trop variables pour qu'il ait été possible de rien conclure, tant au point de vue de la marche des ballonnets qu'au point de vue de la variation des vents.

E. 2 ballonnets ont viré sans que le vent suive le mouvement de virage, et enfin,

F. 14 ballonnets ont viré et le vent également, mais ce dernier virage s'est fait précisement en sens contraire de ce que nous avions pronostiqué.

Pour pouvoir dégager plus nettement quelques conclusions de ce qui précède, nous avons réduit les chiffres cités ci-dessus en pourcentage ; dès lors, voici comment la question se présente :

A. 25 % des ballonnets lancés ont annoncé avec certitude la continuation du vent régnant.

B. 38,8 % ont annoncé avec non moins de certitude, une variation plus ou moins prochaine de la direction du vent.

C. 30 % ont été suivis de virages du vent, qu'il a été matériellement impossible de prévoir.

D. 3 % des lancers sont incohérents.

E. dans 0,4 % des cas, il y a eu virage des ballonnets sans virage subséquent du vent ; et enfin,

F. dans 2,8 % des cas seulement, le virage du vent s'est fait en sens contraire de la prévision.

En réunissant les cas A et B, on est donc amené à conclure que, 64 fois sur cent, de la marche des ballonnets on a pu tirer une prévision certaine, quant à la direction du vent dans les 24 heures qui suivirent le lâcher.

Nous ferons remarquer que dans le cas actuel ce pourcentage est certainement en deçà de ce qu'il aurait dû être ; car dans le groupe C figurent, sans nul doute, un grand nombre de ballonnets qui auraient donné une solution favorable à la thèse, si leurs mouvements avaient pu être suivis.

Sans être taxé d'exagération, nous croyons pouvoir ranger parmi les cas favorables la moitié de ceux groupés dans le litt. C., ce qui nous amène à dire, que *79 fois sur cent, le ballonnet donne des indications utiles quant à la nature de la direction des futurs courants aériens.*

Il va sans dire, que la prévision doit être faite d'une façon raisonnée. On s'exposerait à de grossières erreurs en interprétant *hic et nunc* un virage de ballonnet, sans s'inquiéter de la direction du vent régnant, de sa vitesse, etc., pour en déduire une modification probable dans la direction future du vent.

Est-ce à dire que nous voulions ériger en dogme le résultat de cette étude ? Loin de nous cette pensée ! Les facteurs météorologiques sont beaucoup trop nombreux et trop variables pour qu'il nous soit permis d'être si téméraire. La météorologie marcherait à pas de géant s'il suffisait du lancer de 500 ballonnets, sondes pour parvenir à débrouiller des lois dans les courants atmosphériques.

Nous avons simplement voulu attirer l'attention des météorologistes sur ces premiers résultats qui nous paraissent très encourageants.

Il y a évidemment lieu de compléter ce travail en variant les conditions de l'expérience — en faisant des lancers plus nombreux, à d'autres heures, avec des ballonnets à force ascensionnelle plus grande (gonflés à l'hydrogène) etc., etc...

Dans les limites du possible, nous tâcherons d'apporter notre petite pierre à l'édifice ; mais, nombreuses sont les pierres nécessaires au plus petit contrefort d'un bâtiment : c'est pourquoi nous faisons appel à nos collègues en météorologie.

Les observatoires météorologiques disposent généralement en hommes et en argent de ressources auxquelles nous ne pouvons prétendre. Aussi nous sommes convaincus que si ces établissements ne dédaignaient pas de suivre notre modeste exemple et entraient dans la voie de la *recherche journalière* de ce qui se passe dans les régions atmosphériques qui nous surplombent de quelques centaines de mètres, les résultats seraient des plus féconds.

On ne tarderait pas, en comparant les résultats obtenus aux diverses stations, à écarter les influences locales qui trop souvent entachent d'erreur les observations les plus consciencieuses.

On pourrait peut-être ainsi arriver à solutionner peu à peu les détails du grand problème de la circulation atmosphérique, et à poser des règles de plus en plus précises pour la prévision de la direction des vents ; or, chacun le sait, le vent est un facteur qui joue un rôle des plus importants dans la prédiction du temps, qui est en somme l'objet utilitaire final de la météorologie.

La question valait, nous semble-t-il, de s'y arrêter un instant.

Le P. Lucas, secrétaire, présente deux notes envoyées à la section par M. J. Pieraerts ; la première a pour titre : *La réaction de Séliwanoff caractérise-t-elle réellement le Groupe de d. fructose ?* la seconde est intitulée : *L'hydrolyse citrique du Maltose.* M. Paul Henry et le P. Pauwels sont nommés commissaires pour l'examen de ces deux notes.

M. l'abbé Tits donne lecture du rapport de M. de Hemptinne sur le mémoire déposé en réponse à la question de concours :

On demande un électromètre perfectionné et l'étude par son moyen de phénomènes électriques de genres divers. M. Tits lit ensuite son propre rapport sur le même mémoire.

Rapport de M. de Hemptinne, — En réponse à la question de concours, il a été déposé un mémoire portant la devise « *Tu autem Domine* ». L'auteur y décrit un électromètre d'un nouveau genre. Le fonctionnement est basé sur l'attraction ou la répulsion électrostatique de deux fils de quartz très fins. Les fils sont au préalable rendus conducteurs par le dépôt d'une couche de platine. C'est par l'action des rayons cathodiques que l'on obtient un dépôt suffisamment mince pour réaliser un instrument d'une grande sensibilité.

Après avoir fait la théorie de son appareil, l'auteur fait valoir les qualités du nouvel électromètre. Parmi celles-ci nous citerons en première ligne sa faible capacité et sa grande sensibilité. La seconde partie est consacrée aux applications. Un dispositif ingénieux permet de réaliser l'enregistrement photographique des variations de la charge électrique de l'instrument, ce qui a une grande importance au point de vue de l'étude de l'électricité atmosphérique. L'électromètre peut être employé avec avantage dans une foule de cas, notamment pour l'examen des substances radio-actives. Grâce à un dispositif des plus ingénieux permettant de régler l'amortissement, il peut être utilisé comme oscillographe. L'enregistrement photographique de vibrations électriques très rapides peut même être obtenu, par exemple les vibrations produites dans un microphone par l'impression de la voix humaine ou le son d'un instrument.

Le mémoire est d'une belle ordonnance et d'une clarté remarquable. Il est l'œuvre non seulement d'un physicien instruit, mais encore d'un expérimentateur habile, qui a droit à la reconnaissance du monde scientifique pour la création d'un nouvel électromètre ayant des qualités très précieuses.

Je serai donc très heureux de lui voir décerner le prix de la Société scientifique.

Rapport de M. l'abbé Tits. — Je me rallie entièrement aux conclusions du rapport de M. de Hemptinne. L'électromètre bifilaire décrit par l'auteur surpasse de loin les électromètres à feuilles par sa faible capacité, sa sensibilité et sa précision. Je n'ai plus à revenir sur les applications intéressantes signalées par le premier rapporteur, mais je me permets d'insister sur l'importance particulière que donne à l'instrument son utilisation comme oscillographe.

La clarté du mémoire, la rigueur des théories statique et dynamique, que l'auteur qualifie trop modestement d'essais préliminaires, l'habileté expérimentale et la compétence dont l'auteur fait preuve d'un bout à l'autre de ses recherches, en font une œuvre remarquable, digne à tous points de vue de la récompense prévue par les statuts de la Société.

La section se rallie aux conclusions des rapporteurs et vote le couronnement du mémoire. Cette décision sera soumise au conseil général (*).

M. G. Van der Mensbrugghe fait la communication suivante : *Sur quelques effets singuliers de l'élasticité des liquides.*

Lorsque, d'une certaine hauteur, une goutte d'eau tombe sur un corps dur, pourquoi s'y étale-t-elle brusquement en grande partie ? Quelle est la cause de la projection d'une poussière liquide dans le milieu ambiant ? Et puis quelle est l'origine du bruit particulier qu'on perçoit après le choc de la goutte ? Enfin comment comprendre que le choc très souvent répété d'une humble goutte d'eau contre une pierre finit par creuser celle-ci, suivant le proverbe ancien :

Gutta cavat lapidem, non vi, sed sæpe cadendo ?

Telles sont les questions auxquelles nous avons tâché de répondre brièvement en 1899 (**).

Aujourd'hui nous allons nous occuper d'un fait également fort insignifiant en apparence, mais pourtant très instructif : il s'agit d'une simple goutte de lait qu'on fait tomber d'une hauteur de 40 centim. dans une tasse de café ; comme l'a dit très justement le physicien anglais M. Worthington (***), il est facile de constater

---

(*) Dans la séance du 12 février, le Conseil a ratifié le vote de la seconde section et décerné à l'auteur de ce mémoire, le R. P. Wulf, S. J., un prix de 500 francs et la médaille de la Société scientifique.

(**) Revue des Questions scientifiques, avril 1899.

(***) *A study of splashes* (Longmans, Green and C°, London), p. 30.

que la colonne qui émerge du café transporte la blanche goutte de lait à son sommet ; elle est à peine tachée par le liquide où elle est tombée.

Pour faire comprendre cette singulière apparition, nous allons nous appuyer sur les magnifiques photographies obtenues par M. Worthington dans le cas d'une goutte de lait tombant dans l'eau d'une hauteur de 40 centim. (*). Nous reproduisons ici quelques figures correspondantes à différentes phases du phénomène qui nous occupe.

La fig. 1 représente la goutte au moment où elle touche l'eau.

La fig. 2 montre la goutte descendant dans l'eau sans que la partie supérieure soit sensiblement déformée ; autour d'elle on aperçoit une petite coupe ou cratère.

Deux millièmes de seconde après, la goutte a disparu, mais le cratère est devenu plus large, plus élevé et à parois plus épaisses ; de plus, de son bord jaillissent des filaments (fig. 3).

Cinq millièmes de seconde plus tard (fig. 4), les effets se sont accentués ; en outre, on voit sur la paroi interne du cratère des traces noires provenant du noir de fumée entraîné avec la goutte quand elle a quitté la surface enfumée de son support subitement abaissé pour rendre la goutte libre. Nous voyons par la présence de ces taches noires, que l'intérieur du cratère a une doublure faite avec le liquide original de la goutte.

La fig. 5 montre le cratère qui a atteint sa plus grande hauteur.

Dans la fig. 6, les parois sont devenues plus épaisses ; dès lors le cratère descend de plus en plus vite en s'élargissant, et finit par devenir un anneau de lobes qui repose sur la surface et entoure un creux central.

Dès ce moment, de ce creux central on voit monter une colonne à la surface de laquelle on distingue très nettement les taches noires qu'on avait pu remarquer sur la paroi interne du cratère (fig. 7) ; en un temps très court la colonne atteint son maximum de hauteur (fig. 8), puis descend très rapidement pour faire bientôt place à une autre colonne centrale mais relativement très petite.

Tâchons actuellement de nous rendre compte des phénomènes

(*) Voir l'ouvrage cité plus haut.

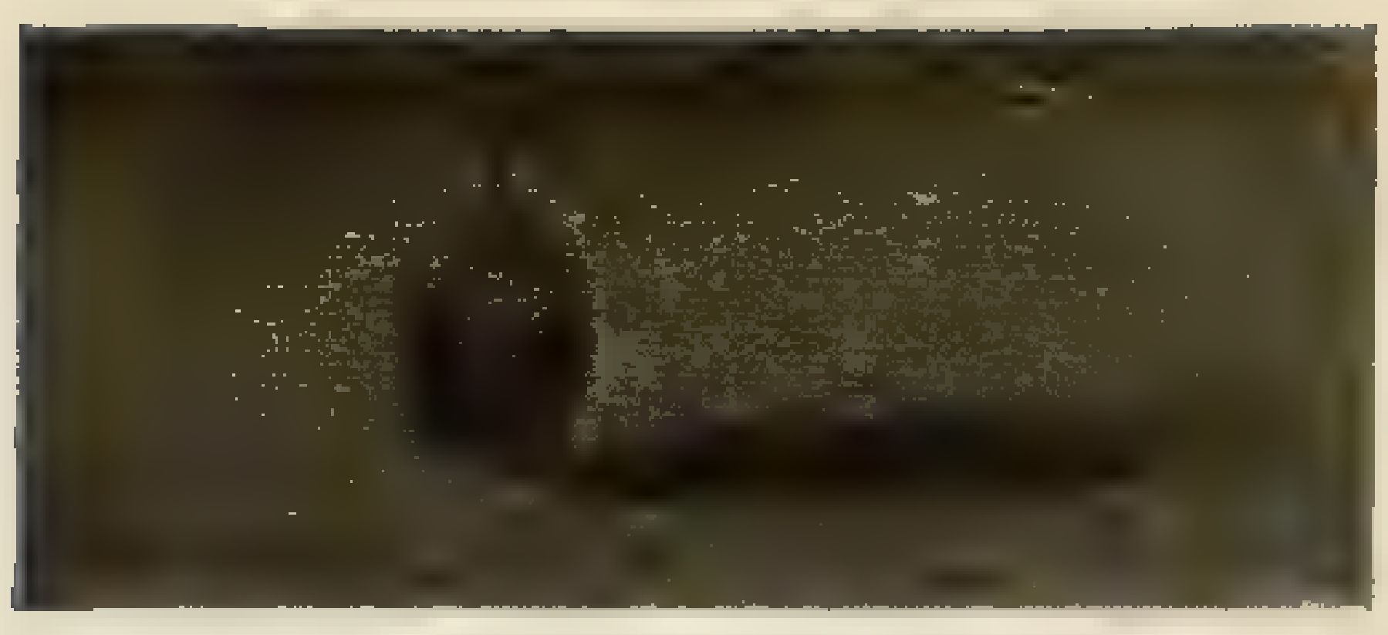


Fig. 1.

Fig. 2. — *t* = 0.

Fig. 3. — *t* = 0,0018 sec.

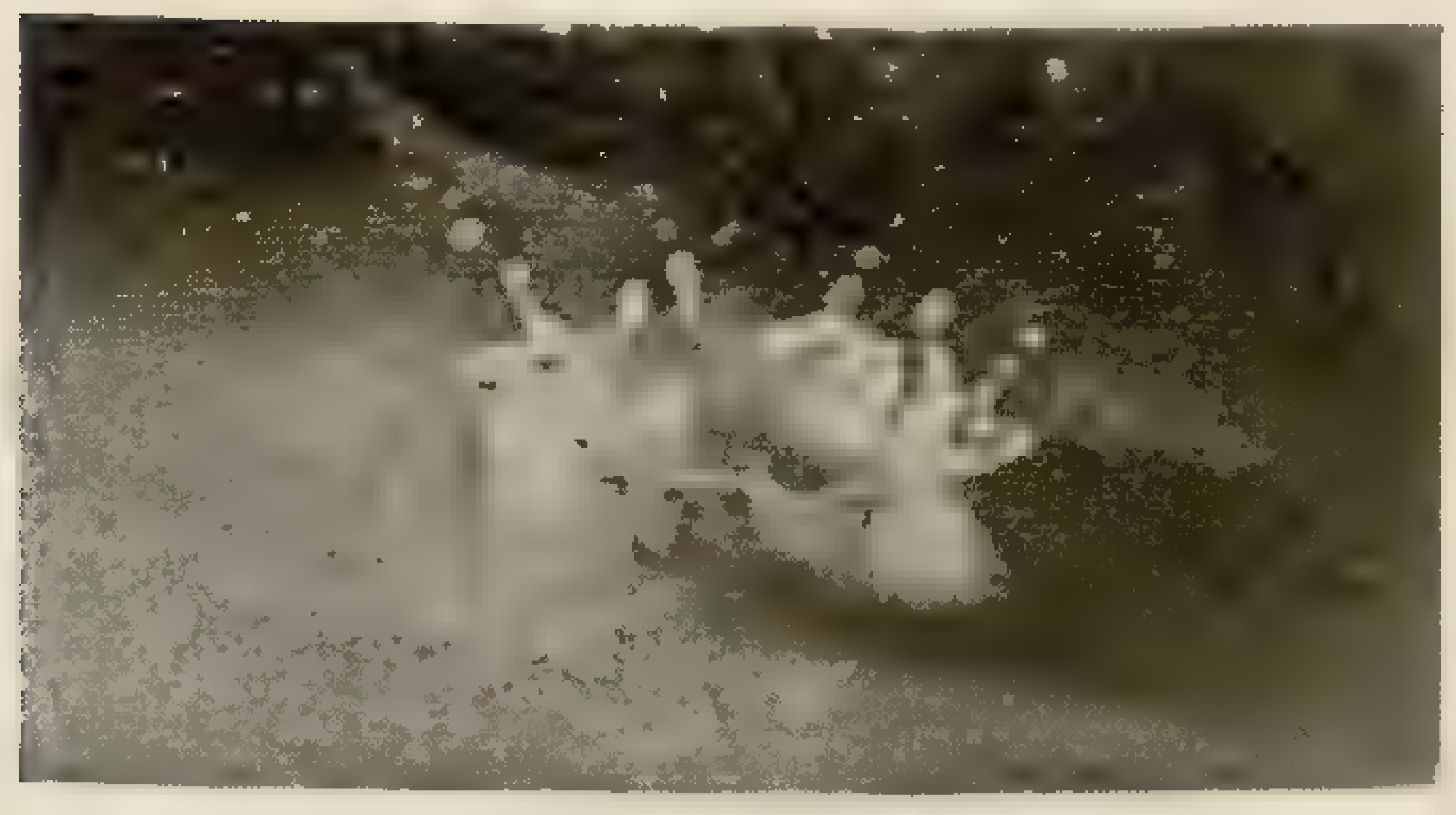


Fig. 4. — *t* = 0,0055.

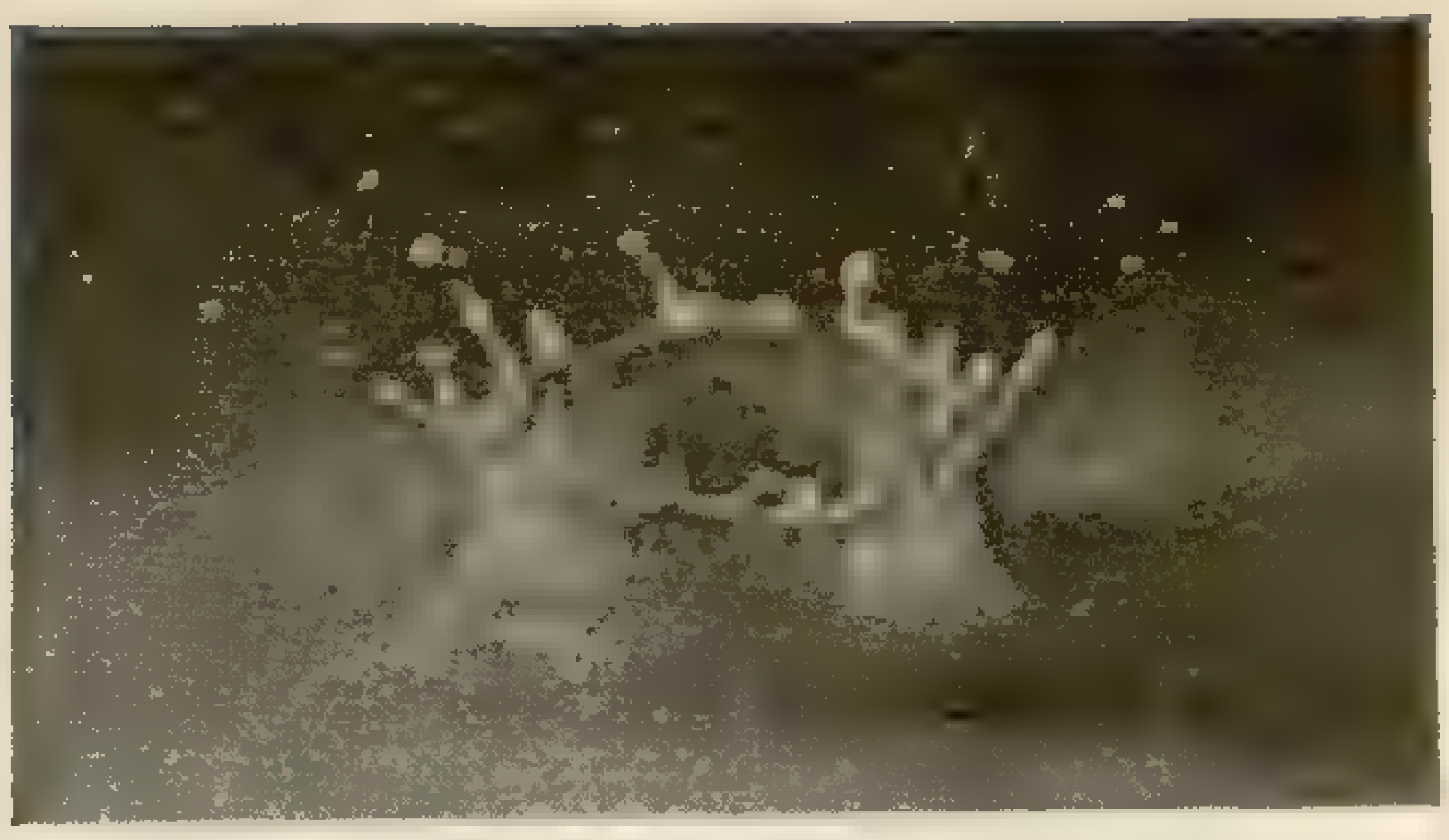


Fig. 5. — *t* = 0,0072.

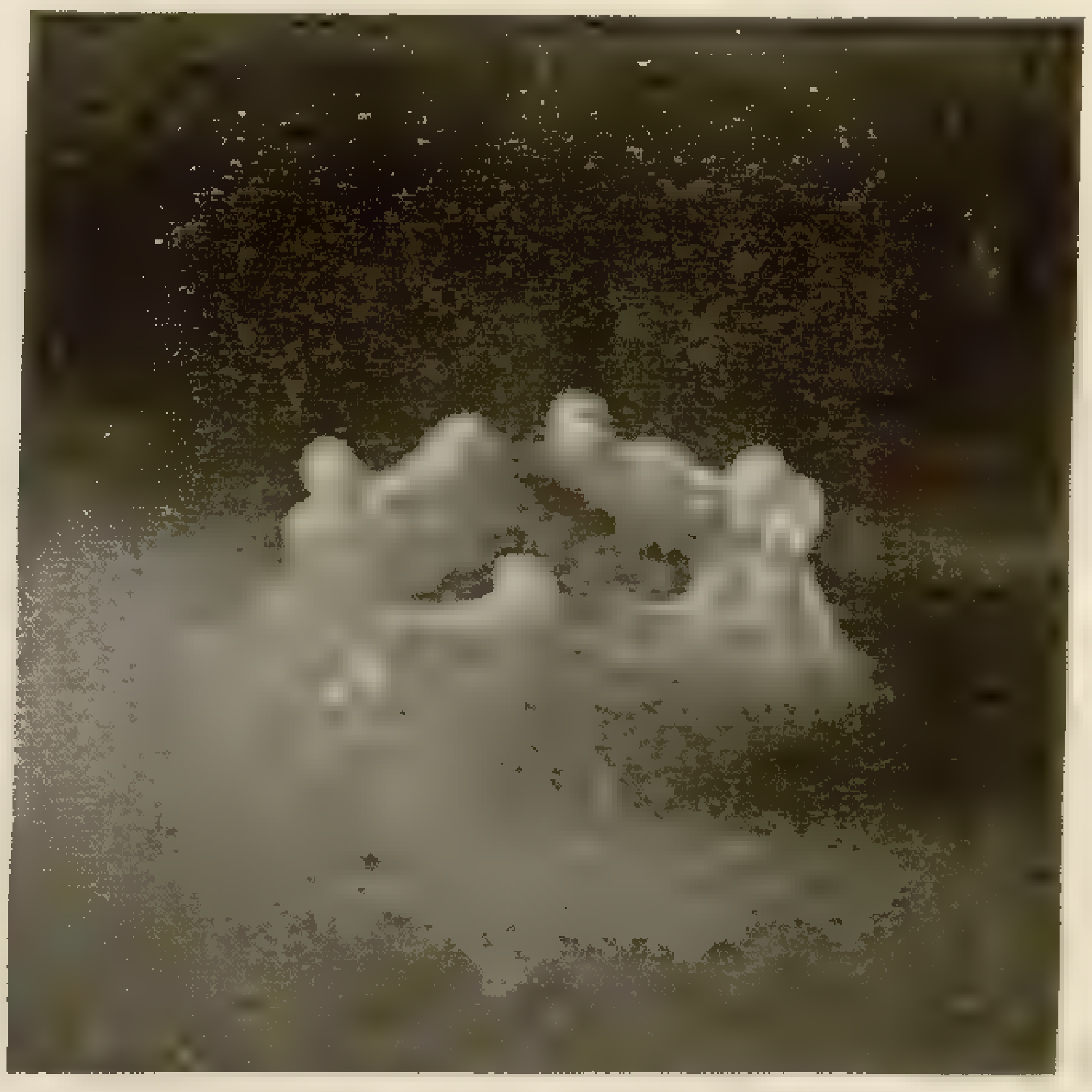


Fig. 6. — *t* = 0,0290.

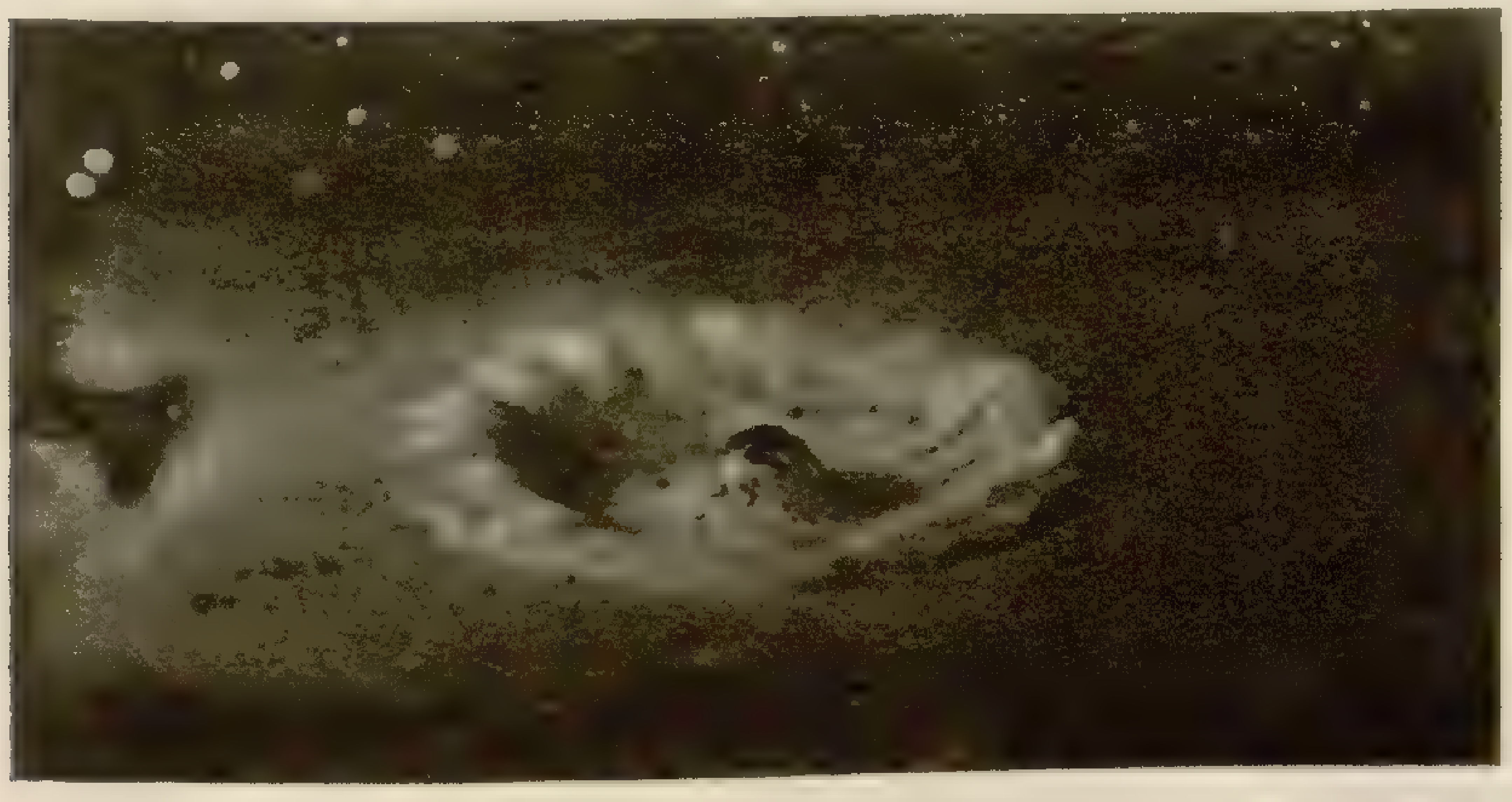


Fig. 7, — *t* = 0,0644.

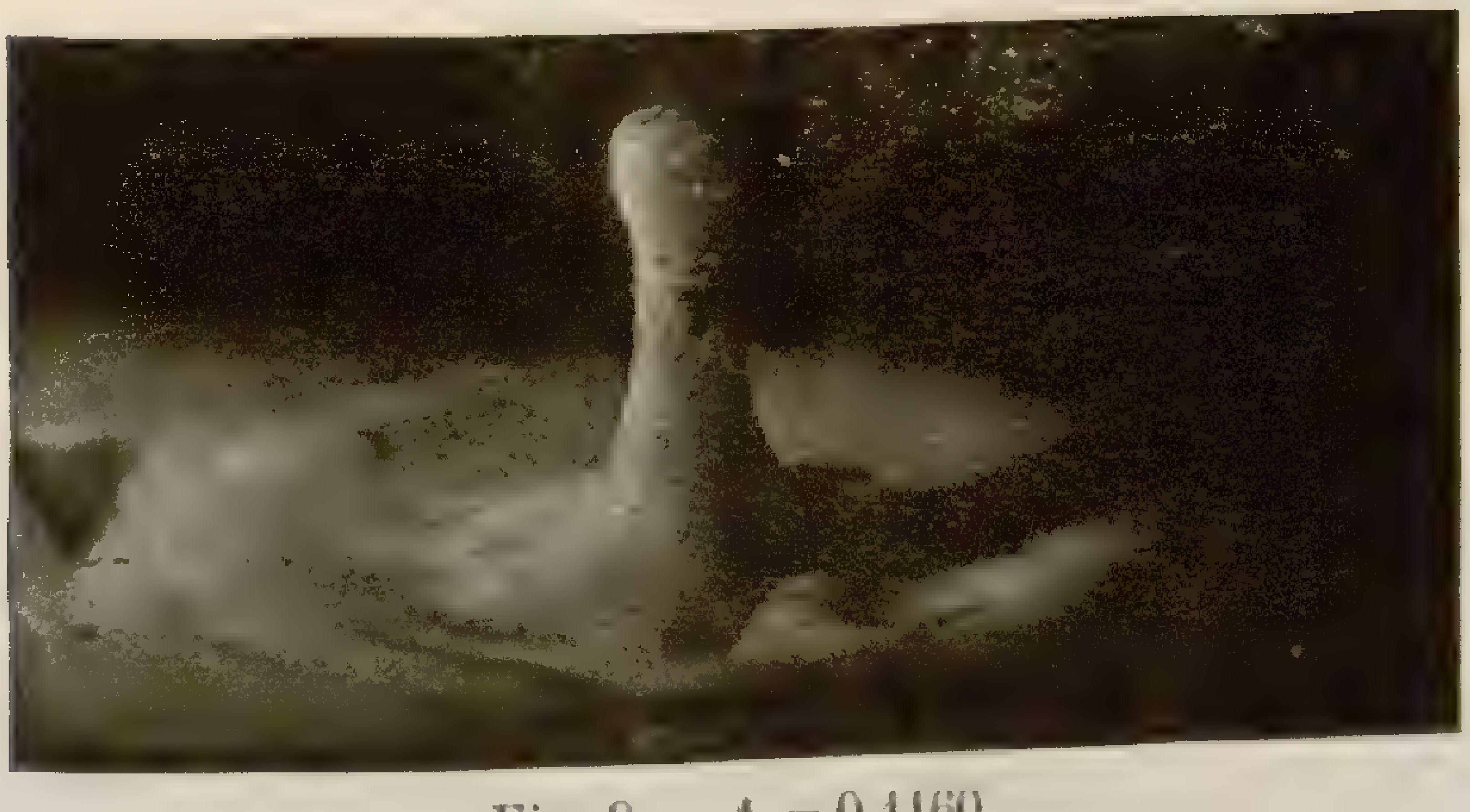


Fig. 8. — *t* = 0,1160.

PLANCHE I.

si curieux observés avec tant d'habileté par M. Worthington; alors nous n'aurons pas de peine à expliquer l'expérience de la goutte de lait tombant dans une tasse de café.

Tout d'abord nous ferons remarquer que la goutte tombant d'une hauteur de 40 centimètres acquiert une vitesse d'environ 2,8 m. (abstraction faite de la résistance de l'air) au moment où elle frappe la surface liquide ; or le choc qui s'effectue avec une pareille vitesse comprime nécessairement toutes les tranches horizontales dont la goutte est formée ; de plus, il opère une compression soudaine dans les couches situées immédiatement au-dessous de la goutte. Cela étant, le petit rapprochement moléculaire qui en résulte en vertu de l'élasticité parfaite de l'eau, se transmet non seulement en dessous, mais encore latéralement aux couches les plus voisines de la goutte ; mais ces dernières couches ainsi vivement comprimées ne peuvent se détendre ni vers le bas, ni dans le sens latéral ; voilà pourquoi elles impriment aux particules les plus rapprochées de la surface libre, une vitesse assez grande pour les faire jaillir au-dessus du niveau ; de là la naissance du cratère. Naturellement, par ce mouvement si rapide, il s'y développe une élasticité de traction, c'est-à-dire que les particules sont alors plus écartées entre elles qu'à l'état normal de repos. Pour ce motif, le bord du petit cratère à peine formé tend à se ramasser sur le reste de la lame avec une impétuosité telle que l'on voit s'en échapper tout autour de nombreuses parcelles liquides (fig. 2).

A mesure que la goutte descend à une plus grande profondeur, la compression qui se communique latéralement agit plus loin, le cratère s'élargit en même temps qu'il s'élève ; de son bord jaillissent toujours des filaments liquides et des parcelles qui n'ont pas du tout la forme sphérique au moment où elles se séparent de la lame (fig. 3).

Celle-ci étant vivement étirée tend énergiquement à reprendre sa constitution primitive, et cela non seulement à partir du bord, comme nous venons de le voir, mais aussi dans les portions inférieures ; sans doute les particules voisines de la paroi extérieure du cratère pourront épaissir plus ou moins cette paroi ; mais ce sont surtout les tranches de la goutte qui, étant fort comprimées par le choc, pourront effectuer leur détente en grimpant sur la paroi interne du cratère et contribuer ainsi à y rétablir plus ou moins la constitution normale. Voilà, selon nous, pourquoi les traces de noir de fumée, qui d'abord étaient répandues sur la goutte pendant sa chute, sont entraînées à la surface interne du cratère. Nous n'hésitons pas à déclarer que les petites taches noires qui apparaissent sur les belles photographies de l'éminent physicien anglais nous ont aidé grandement à concevoir et à confirmer la présente explication.

Mais ce n'est pas tout : après la descente rapide du cratère et pendant l'ascension de la colonne centrale, les figures montrent que les taches noires font une nouvelle apparition, cette fois à la surface même de la colonne qui, par la réaction consécutive au choc, rebondit vivement dans le creux central. Dès lors, c'est cette colonne qui est sollicitée par une subite élasticité de traction ; ses parties ainsi brusquement étirées, attirent à leur tour les tranches voisines, c'est-à-dire précisément celles où s'étaient révélées les traces de noir de fumée dans le cratère. Nous concevons maintenant sans peine comment et pourquoi presque toute la goutte de lait occupe le haut de la colonne.

D'après les mesures de M. Worthington, toutes les phases décrites plus haut se succèdent en moins d'un dixième de seconde ; or il résulte des expériences de Joseph Plateau, que les images persistent sur la rétine pendant plus de trois dixièmes de seconde ; il suit de là qu'à l'œil nu l'image du cratère n'a pas encore disparu sur la rétine quand celle de la colonne centrale y apparaît ; c'est ce qui produit une certaine confusion, signalée déjà par le physicien anglais lui-même.

Mais il faut remarquer que la partie supérieure de la colonne montante s'arrête un moment avant de descendre ; en outre, elle est toute blanche, puisqu'elle est formée presque exclusivement de lait ; voilà pourquoi on peut la distinguer à l'œil nu lorsqu'on fait tomber une goutte de lait dans du café noir, d'une hauteur d'environ 40 centimètres.

Le lecteur qui désirerait de plus amples détails sur les effets si singuliers que nous venons d'exposer en nous fondant sur les magnifiques photographies de M. Worthington, peut recourir soit à l'ouvrage original du physicien anglais, soit à une Note que nous avons présentée dans la séance du 15 décembre dernier à la classe des sciences de l'Académie Royale de Belgique, soit à notre article de la Revue des Questions scientifiques (20 avril 1909) : dans cette note et dans cet article nous avons tenu à faire voir que les effets bizarres, signalés plus haut, sont des conséquences de la parfaite élasticité des liquides.

Troisième Section

Le R. P. L. Boule, S. J. présente la communication suivante : *Sur une modification de la méthode au nitrate d'argent pour l'imprégnation des éléments nerveux du Lombric.*

Nous avons eu l'honneur de présenter à la troisième Section, au mois d'avril dernier, une *Note* sur l'*Imprégnation des éléments nerveux du Lombric par le nitrate d'argent* (*).

Nous donnions connaissance, dans cette *Note*, des résultats que nous avions obtenus par l'emploi, sur du matériel traité dans des conditions normales, de la méthode de *Cajal*, à l'argent réduit.

Jusque-là, cette méthode n'avait mis en évidence aucun élément neurofibrillaire, chez le Lombric, ou ne s'était montrée efficace que sur des sujets préalablement soumis à des influences pathogènes variées.

La question pouvait dès lors se poser, de savoir si les cellules dont les neurofibrilles avaient fixé l'argent, dans nos préparations, ne se trouvaient pas, pour des causes inconnues, dans des conditions physiologico-chimiques particulières, comme celles soumises expérimentalement aux influences pathogènes.

Avant de traiter ce point, sur lequel d'ailleurs nous n'avons rien à dire de précis, nous voulons signaler une modification que nous avons apportée à la méthode d'imprégnation de *Cajal*, modification dont nous avions annoncé, à la fin de la *Note* que nous avons présentée en avril, la prochaine communication.

Comme nous le faisions remarquer dans cette *Note*, nous avions constaté, au cours de nos premières expériences, que toutes les coupes faites dans un même tronçon de Lombric traité par la

---

(*) Annales de la Soc. scient. de Bruxelles : Trente-deuxième année, 1907-1908, 3e et 4e fascicules, p. 255 et suiv.

méthode de *Cajal,* n'étaient pas imprégnées avec la même intensité, et que certaines même ne l'étaient pas du tout. Bien plus, dans une même coupe, à côté de cellules présentant un superbe réseau neurofibrillaire, on pouvait en observer d'autres sur lesquelles le nitrate n'avait point agi.

Afin de remédier à cette inconstance, nous avons cherché à modifier la méthode.

Nous sommes parti de cette considération, que si certaines cellules étaient imprégnées alors que d'autres ne l'étaient pas, cela tenait peut-être à un défaut de pénétration des réactifs au sein des tissus.

C'est en vue de favoriser cette pénétration que nous avons introduit quelques modifications dans la méthode à l'argent réduit. Ces modifications portent exclusivement sur les manipulations qui précèdent le traitement par le nitrate d'argent. Elles consistent dans l'emploi de fixateurs spéciaux :

Fixateur A

Eau distillée	100 cc.
Formol	25 cc.
Acide acétique glacial	5 cc.

Fixateur B

Eau distillée	100 cc.
Formol	25 cc.
Acide acétique glacial	5 cc.
Ammoniaque	0,50 cc.

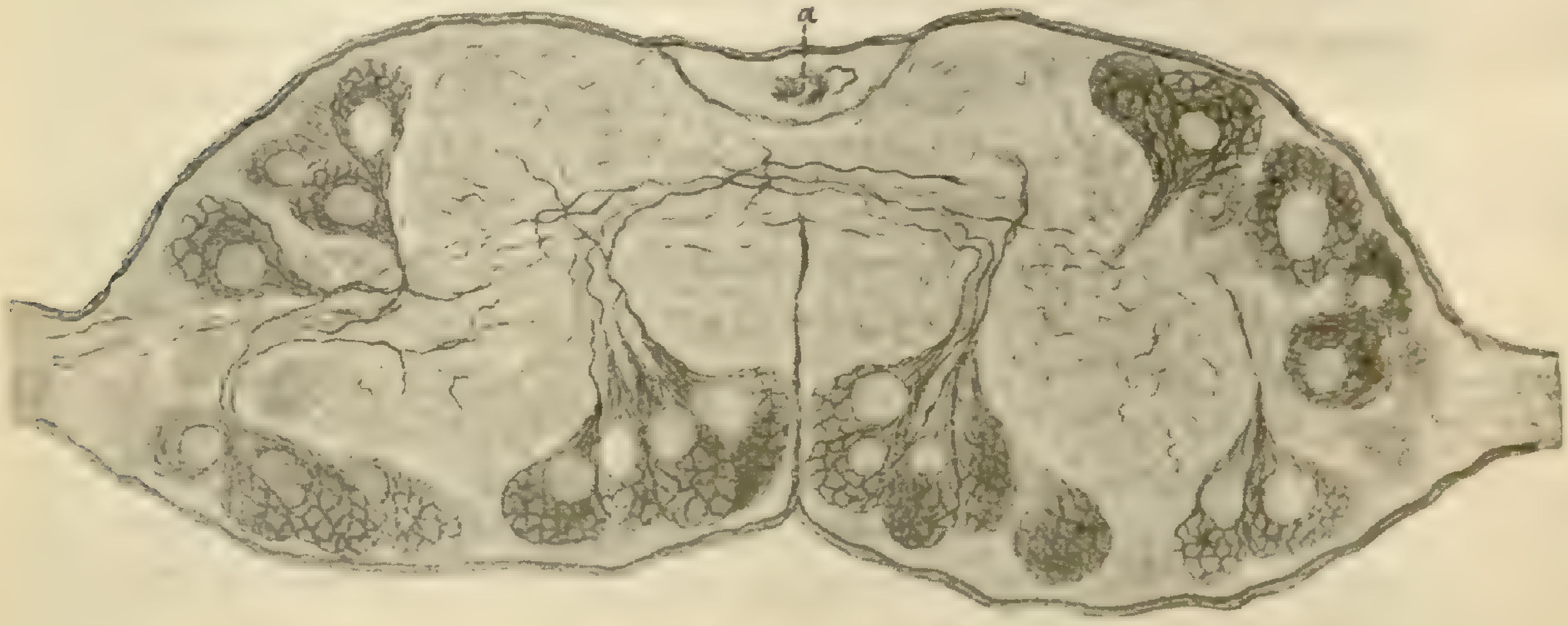
Fixateur C

Alcool à 94°	100 cc.
Formol	25 cc.
Acide acétique glacial	5 cc.
Ammoniaque	0,50 cc.

Nous avons obtenu, par l'emploi de ces fixateurs, des résultats vraiment remarquables, au point de vue de la perfection des imprégnations neurofibrillaires.

Les observations d'ordre cytologique que nous avons faites sur les préparations traitées par cette méthode, nous ont fourni la matière d'un travail qui a paru dans LE NÉVRAXE, sous le titre : *Recherches sur le système nerveux central normal du Lombric* (*).

Nous reproduisons ici un dessin de ce travail, qui représente une coupe transversale de la chaîne ventrale du Lombric. Aucune des cellules situées au niveau de cette coupe n'a échappé à l'imprégnation, et il en a été de même dans toutes nos préparations, toutes les fois que nous avons traité nos Lombrics de la manière indiquée.



Coupe transversale de la chaine ventrale du Lombric.
a : tube colossal.

NÉVRAXE, vol X, fasc. I, p. 22.

Il est plus facile de constater ce résultat que d'en rendre raison.

Tant que nous avons procédé par la méthode de *Cajal* au nitrate d'argent, sur des sujets normaux, nous n'avons obtenu que des imprégnations isolées.

D'autre part, cette même méthode, employée sur du matériel pathologique, a donné des imprégnations générales satisfaisantes, quoique moins nettes et sélectives que celles obtenues par nos procédés.

Faut-il en conclure, comme nous l'avons insinué dans notre précédente communication, et comme nous le rappelions en commençant, que les cellules isolées qui, dans la méthode de *Cajal*, fixent l'argent, se trouvent dans un état particulier, difficile à

(*) LE NÉVRAXE, vol. X, fasc. I, p. 15 et suiv.

définir, mais qui se rapproche de celui obtenu par l'action préalable, sur le Lombric, de conditions anormales ?... Peut-être.

Mais lorsque, par l'emploi de nos procédés, nous obtenons à notre tour des imprégnations générales parfaites, à l'état normal et dans des conditions identiques, semble-t-il, à celles qui ne nous ont donné, avec la méthode de *Cajal*, que des imprégnations isolées, quelle interprétation de ces faits peut-on bien hasarder ?

Peut-être les cellules isolées qu'imprègne la méthode de *Cajal*, se trouvent-elles, à l'exclusion des autres, dans des conditions *physiques* favorisant la pénétration des réactifs dans les espaces intra-cellulaires, pénétration que nous réaliserions pour tous les éléments, par nos fixateurs spéciaux.

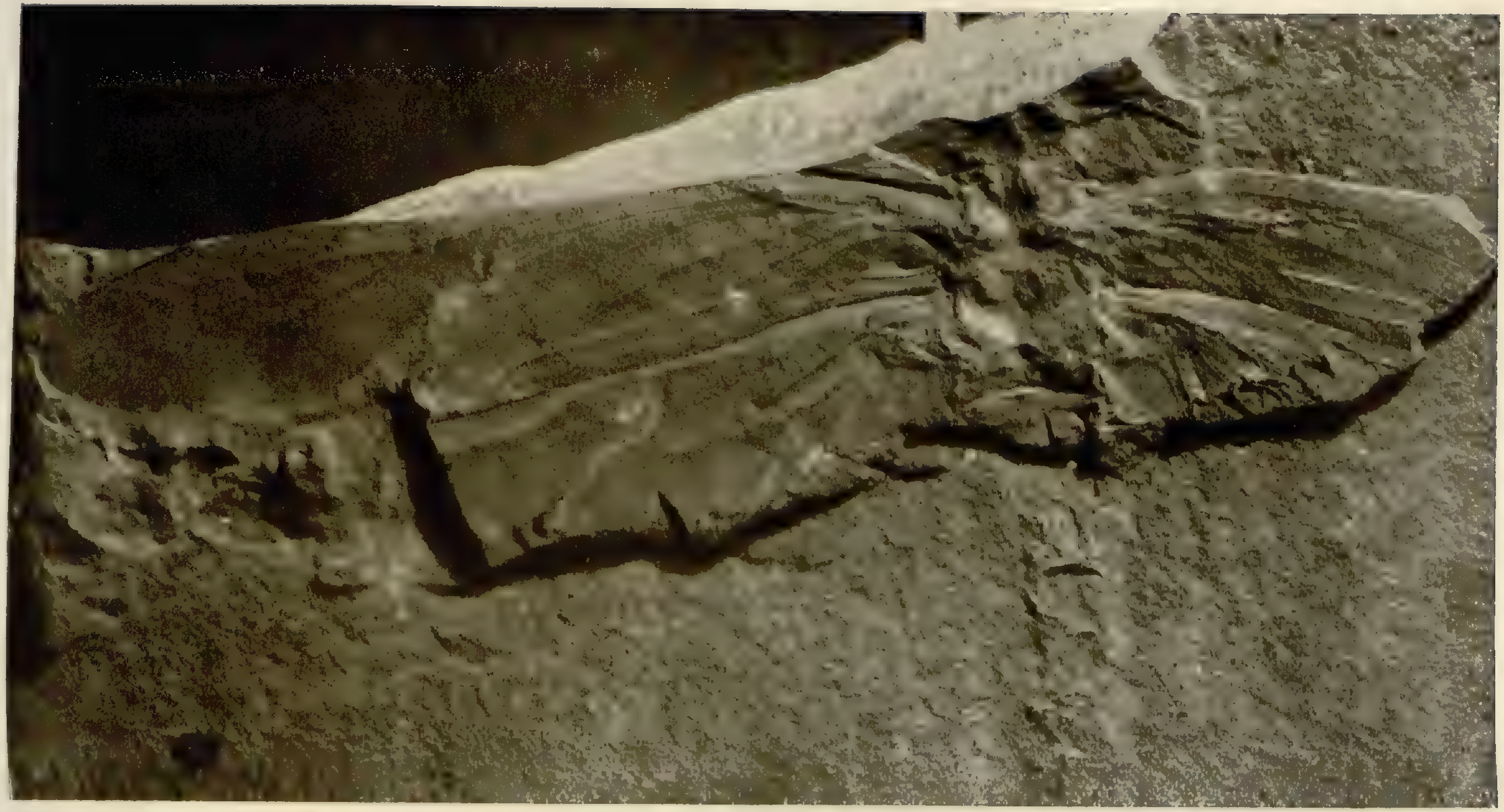
Peut-être aussi les cellules qui s'imprègnent isolément présentent-elles quelque circonstance *chimique* favorable à l'imprégnation et que nos fixateurs, ici encore, réaliseraient pour l'ensemble des éléments.

La question à résoudre serait alors de déterminer de quels facteurs dépend l'établissement de ces conditions physiques ou chimiques, et par quels moyens on peut agir sur ces facteurs, pour mettre les éléments nerveux en tel état que leur structure intime soit plus facilement décelable.

En terminant, nous devons signaler que nous avons eu quelquefois à enregistrer, dans l'emploi de nos méthodes, des échecs complets.

Ces échecs ne s'expliquent point par des raisons physiologiques. La façon dont nous avons procédé ne nous permet pas, en effet, d'admettre une semblable explication.

Pour n'avoir pas à soumettre nos Lombrics à un régime spécial afin de débarrasser leur intestin — ce qui aurait pu déterminer des états anormaux — nous avons, le plus souvent, utilisé la partie antérieure seule de l'animal, qui d'ordinaire ne contient que peu ou point de terre. Nous avons ainsi traité, chaque fois, un assez grand nombre d'extrémités céphaliques, par conséquent, de tronçons appartenant chacun à un animal différent. Or, et cela a été constant, lorsqu'un de ces tronçons n'avait pas été imprégné, aucun ne l'avait été ; jamais non plus nous n'avons trouvé un tronçon imprégné, que tous les autres ne le fussent aussi. Si l'imprégnation ou la non imprégnation, dans notre cas, était sous la



Stenodictya Gaudryi, Meun. (un peu agrandi).

dépendance de conditions physiologiques, il faudrait donc dire que tous les Lombrics d'une région donnée se trouvent, au même instant, et d'une façon constante, dans le même état physiologique, affirmation qui ne repose sur aucun fondement.

Nous inclinons à expliquer les échecs dont nous parlons, qui d'ailleurs ont été fort rares, par des causes accidentelles relevant de la technique : erreurs de manipulation, impureté des réactifs, etc...

Les meilleures méthodes ménagent parfois de ces surprises, et il faudrait être peu familier avec les travaux de laboratoire pour s'en étonner. Il ne faut pas oublier d'ailleurs que les procédés d'imprégnation sont d'un maniement particulièrement délicat. Inutile de faire remarquer que l'interprétation de leurs résultats exige par suite, de la part des travailleurs, une prudence dont il serait fort grave de se départir.

C'est parce que ces résultats ne nous ont pas encore donné à nous-même, sur quelques-unes des questions que nous venons d'exposer, de solution satisfaisante, que nous avons entrepris, sur le Lombric, des recherches neuropathologiques comparatives, qui nous permettront peut-être de préciser certains points.

M. Fernand Meunier fait passer sous les yeux des membres de la section les photographies agrandies de *Nouveaux Paléodictyoptères et Protorthoptères du Stéphanien de Commentry*.

Dans le groupe des Paléodictyoptères, il signale une intéressante forme se distinguant des espèces décrites par Ch. Brongniart, par la fine réticulation transversale ornant tout le champ de l'aile. Il n'a vu que l'aile postérieure de cette nouvelle espèce, bien élargie à la base comme c'est aussi le cas chez les Compsoneura Brongniart. Notre collègue propose de nommer ce Paléodictyoptère (Platyptéride Ch. Brongniart) *Archaecompsoneura superba*.

Aux nouveaux Stenodictya décrits précédemment M. F. Meunier ajoute encore une nouvelle espèce *Stenodictya Gaudryi*, qu'il dédie à feu M. Albert Gaudry, l'éminent naturaliste du Muséum de Paris. Elle se rapproche de S. Thevenini Meun. S. Giardi et Thevenini, soit deux très curieuses formes de Sténodictyoptérides Ch. Brongniart.

Notre collègue a aussi eu la bonne fortune de comparer plusieurs superbes spécimens de Sthenaropoda Fischeri Brgt, ce qui lui a permis d'apprécier plus exactement le réseau des ailes. Parmi les Oedischidae, il signale aussi une nouvelle forme *Archaeacridites elegantissima* se distinguant des Archaeacridites Bruesi Meun. Tout porte à croire qu'il existe des relations phylogéniques évidentes entre les Archaeacridites et les Sthenaropoda.

Dans les Homalophlebinae, M. F. Meunier a découvert un curieux fossile se rapprochant de Homalophlebia Finoti Ch. Brongniart. Il a voulu d'abord le ranger dans une nouvelle coupe générique, mais il considère qu'il est préférable, actuellement du moins, de le maintenir avec les Homalophlebia Brongniart. M. A. Handlirsch, de Vienne, fait rentrer Homalophlebia Filholi Brgt dans le genre Parahomalophlebia. M. F. Meunier dit qu'il a eu entre les mains le type de Brongniart et qu'il est difficile, vu la conservation du fossile, de donner un dessin restauré rigoureux de cet articulé. Les trois types connus : Homalophlebia Finoti, H. Filholi Brongniart et Homalophlebia *Perrieri nov. sp.* ne sont représentés que par un seul spécimen.

Jusqu'à plus amples renseignements, il est prudent de maintenir H. Filholi dans le genre Homalophlebia.

H. Perrieri s'écarte, au premier examen, des H. Filholi et Finoti par la morphologie du secteur du radius.

M. Fernand Meunier présente quelques remarques sur *Un nouveau Protoblattinae, à ailes paléodictyoptériformes, des schistes houillers de Commentry* que lui a communiqué M. Marcellin Boule, professeur au Muséum d'histoire naturelle de Paris.

Il signale que les Blattides sont extraordinairement abondantes sur ces schistes, mais que beaucoup de spécimens sont malheureusement très altérés ou offrent une nervation parfois si enchevêtrée qu'il est difficile, pour ne pas dire impossible, de débrouiller leur degré de parenté. De plus, ce qui complique encore le problème, c'est que le paléontologiste n'a ordinairement à sa disposition que des élytres ou ailes antérieures. Le thorax, qui offre des caractères critères, est souvent détruit ou altéré ; l'abdomen est rarement bien nettement indiqué sur le schiste ; il en est de même des ailes de la seconde paire. Le triage des nomoneures paléozoïques se fait très lentement, l'étude des formes spécifiques étant souvent hérissée de difficultés presque insurmontables. Pour faire des observations utiles à l'avancement de cette partie de la science, il est nécessaire d'avoir des photographies agrandies des spécimens permettant la confection de dessins restaurés au moyen des empreintes originales et facilitant les groupements génériques et spécifiques. L'étude des Blattidae sans l'aide des agrandissements photographiques ne mène qu'à des résultats à peu près négatifs.

Dès à présent, on peut entrevoir, dans ses grandes lignes du moins, la classification générale des nomoneures de ce célèbre gisement. Sa faune se compose de Protoblattinae et de Blattinae. Les premiers se rencontrent relativement en petit nombre. Ce sont des formes d'Arthropodes extrêmement intéressantes par les détails morphologiques de la nervation des ailes rappelant celle des Paléodictyoptères. La phylogénie des Protoblattinae, à l'exception de quelques curieuses formes, est encore peu connue. Citons Fayoliella elongata Meun., Protoblattina Bouvieri nov. sp. (*) et quelques types intéressants signalés par M. A. Handlirsch. Malgré les nervures du champ de l'aile, ces insectes doivent être groupés avec les Blattidae, leur thorax étant construit sur le même plan que celui de ces nomoneures.

Handlirsch relate que les Paléodictyoptères descendent des Blattidés. Dans l'état actuel de la science, on ne doit admettre cette singulière hypothèse qu'avec la plus grande réserve.

Le second groupe des Blattidae, les Blattinae, est très largement représenté sur les schistes houillers de Commentry.

Tout porte à croire que pour les Blattidae de ce gisement, on ne devra pas admettre un aussi grand nombre de genres que le propose M. Handlirsch. Pour l'étude de ces difficiles articulés, on en est toujours à la période de tâtonnements.

Handlirsch a-t-il réellement fait chose utile en remaniant, de fond en comble, la classification des nomoneures proposées par l'éminent paléontologiste américain M. S. H. Scudder? C'est ce que diront les recherches ultérieures.

M. Fernand Meunier signale à la section *Quelques considérations sur la faune d'insectes du copal fossile de Zanzibar, du copal récent d'Accra, de Zanzibar et de Madagascar.*

(*) Bulletin du Muséum de Paris, 1909, n° 1, p. 48, fig. 7.

Il mentionne qu'il a étudié au microscope plusieurs centaines d'inclusions d'insectes de la gomme copal, de différentes provenances africaines, de la collection de M. Evers junior de Altona-Bahrenfeld (Hambourg). Il est regrettable que l'indication exacte du lieu de gisement, pour le copal sub-fossile du moins, fasse toujours défaut, la connaissance stratigraphique rigoureuse de l'endroit de trouvaille étant de la plus haute importance pour l'étude des faunes comparées. Les entomologistes ont eu tort de ne pas examiner, très soigneusement, les formes d'articulés, incluses dans le copal. En effet, cette étude permet de dresser la liste des types inclus les plus fréquents et souvent même, pour les petites espèces, de découvrir des formes inédites. De plus, on peut aussi établir de curieux rapprochements entre la faune du copal africain sub-fossile, d'origine récente et celle de l'oligocène inférieur de la Baltique. En examinant spécialement les diptères notre collègue est arrivé à faire quelques curieuses remarques. La taille des bestioles incluses est extraordinairement voisine de celle des espèces, de mêmes genres, habitant les régions du Nord. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer les Cecidomyidae, les Chironomidae, les Ceratopogonidae, les Mycetophilidae et les Sciaridae du copal avec les espèces paléarctiques récentes. Il en est de même de la morphologie des ailes et des antennes. Ce qui frappe davantage le paléontologiste, c'est la ressemblance des formes incluses dans le copal non seulement avec celles de l'Europe du Nord mais aussi avec celles de l'ambre de la Baltique, dont la faune quoique de l'oligocène inférieur peut être considérée comme étant de l'éocène supérieur. Toutes les espèces du succin sont très voisines de celles du copal (par exemple, les Sciaridae). On peut observer de grandes ressemblances en examinant, les uns après les autres, les caractères de la tête, des antennes, des ailes et des pattes et on sera convaincu de la justesse de cette remarque. Irrécusablement les formes du copal et les formes actuelles descendent directement de celles incluses dans le succin qui sont toutes éteintes actuellement.

L'examen de plusieurs centaines d'insectes du copal africain et particulièrement des diptères montre que la faune de cette gomme présente *un facies bien nettement paléarctique,* dont il est difficile actuellement de fixer le pourcentage qui semble assez grand surtout pour les espèces de taille exiguë.

M. A. Renier présente quelques considérations verbales sur l'*Origine du charbon des Nodules à Goniatites* (bullions).

M. A. Maes présente à la section une carte manuscrite en quatre feuilles, au 1 : 2 000 000, du Congo belge. L'auteur détaille la série des documents qui ont servi de base à sa carte, qui est, à la fois, administrative, religieuse et ethnographique. Il se propose, après l'avoir complétée au moyen des données relatives aux mines, aux forêts et aux vastes domaines exploités ou à la veille de l'être, par des sociétés concessionnaires, de réduire cette carte à l'échelle ordinaire des Atlas, et de la soumettre à la section, lors de la session de Pâques.

Le R. P. Longin Navás S. J. envoie la note suivante sur les *Rhaphidides* (Insectes Névroptères) *du Musée de Paris.*

La faune névroptérologique de France est encore peu connue. Pendant un démi-siècle, les entomologistes français, excepté M. Martin et quelques autres, n'ont pas accordé aux Névroptères l'attention que mérite un ordre aussi varié et aussi complexe. Les constatations qui vont suivre pourront donc intéresser ceux qui s'occupent de l'entomologie en général et en particulier, de celle de France et des régions voisines.

Chargé par M. Bouvier d'étudier quelques groupes d'insectes Névroptères qui existent dans les collections du Musée de Paris, très riche à plusieurs points de vue, je résumerai ici le résultat de mes observations sur les *Raphidides*. La plupart des espèces que je vais énumérer appartiennent à la faune paléarctique et en particulier à celle de France.

Genre Raphidia L.

Je le diviserai en trois sections, par rapport à la couleur du ptérostigme.

Première section. *Phæostigma* (φαιός brun)

Espèces de ptérostigme brunâtre

1. Raphidia notata F. Fontainebleau, Rambouillet (Seine et-Oise), St Nom-la-Bretêche (S.-et-O.), Vimoutier (Orne), Mont Dore (Puy de Dôme), Maisons-Laffitte (S.-et-O.), Arrens (Hautes Pyrénées), Bérisal (Valais). Je ne la connais pas encore dans la faune ibérique.

2. Raphidia major Burm. Fontainebleau, Sénart, Nancy, Arrens. Je ne la connais pas non plus en Espagne.

3. Raphidia assimilis Abarda. Mexique.

Deuxième section. *Dichrostigma* (δίχροος, de deux couleurs)

Espèces à ptérostigme en partie brun et en partie jaune.

4. Raphidia flavipes Stein. Sierre (Valais).

5. Raphidia Harmandi sp. nov. (fig. 1).

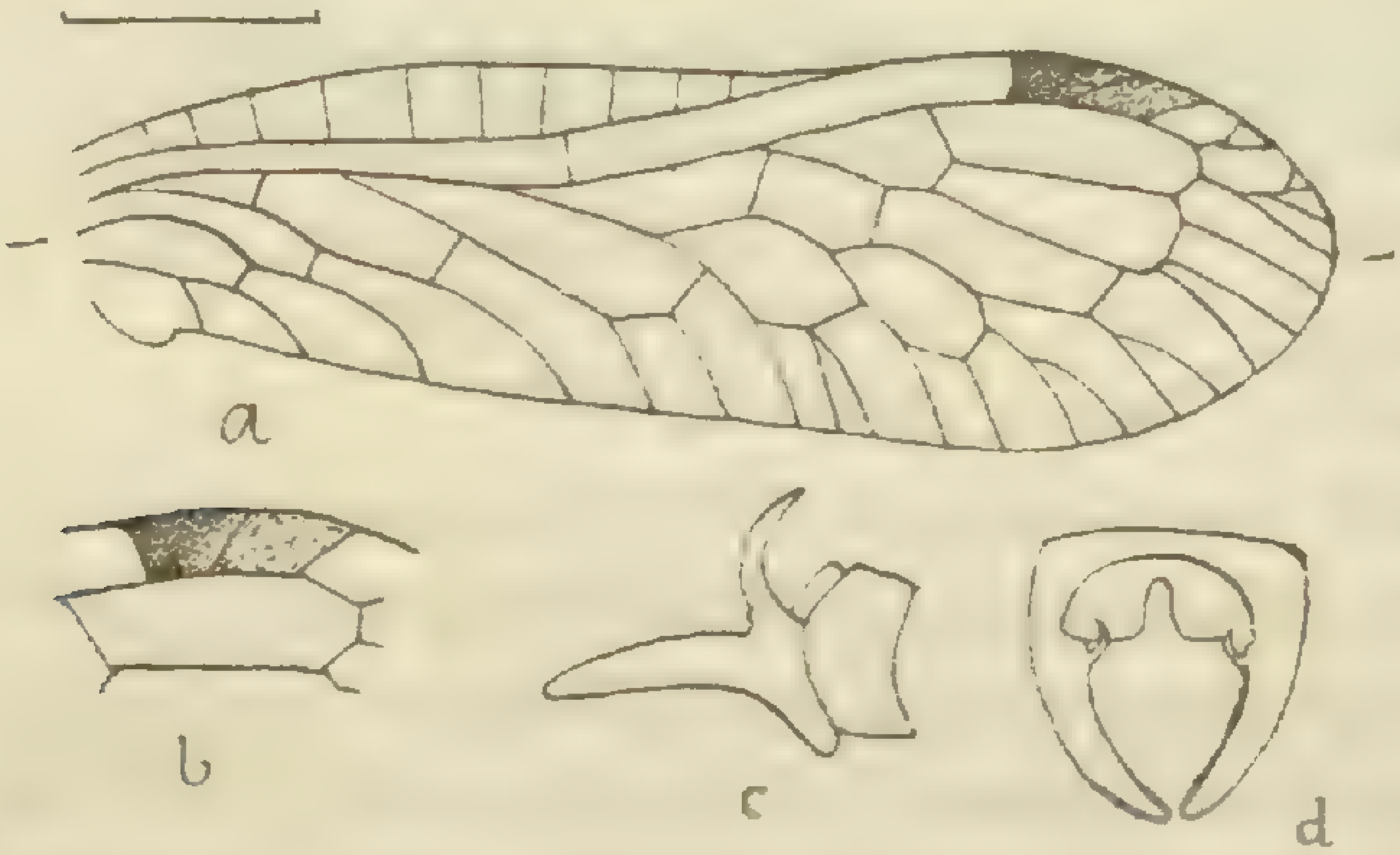


Fig. 1. *Raphidia Harmandi* Nav. — *a*, stile antérieure. — *b*, portion stigmale de la même. — *c*, extrémité de l'abdomen du mâle vue de profil. — *d*, la même vue de dessus.

Affinis *flavipedi* Stein., nigra.

Caput ovale, retrorsum sensim angustatum, medio et antice depressum, nigrum, nitens ; minute impresso-punctatum. Mandibulæ testaceæ, apice fuscescentes. Palpi fulvo-fusci, ultimo articulo fusco. Antennæ nigræ, in tertio basilari fulvæ.Sulcus epicranii et colli distinctus, concolor. Collum mediocre, dente inferiore obtuso.

Prothorax longus, antice cylindricus, postice ante apicem modice inflatus ; superne totus niger, nitens, transverse rugulosus, ad latera et inferne fulvus. Prosternum in parte visibili nigrum, transverse rugosum. Mesothorax niger, opacus, prosculo, scuto et scutello totis fulvis, margine postico tenuissime fulvo. Metanotum scutello fulvo.

Abdomen nigrum, duplici fascia laterali (hoc est, in regione dorsali et ventrali) fulva ; singulis segmentis margine postico inferne flavo. ♂ octavo segmento (*c*) obliquo,inferne in tuberculum rotundatum flavum producto, postice cercis uniarticulatis, cylindro-conicis, retrorsum confluentibus (*d*), desuper ad basim dente

corniformi, basi dentato (*c*, *d*); nono brevissimo (*e*), flavo, postice emarginato (*d*).

♀ ultimo segmento flavo; ovipositore fusco, abdomine longiore.

Pedes fulvi, coxis intermediis et posterioribus fuscis.

Alæ angustæ, hyalinæ, reticulatione fusco-nigra, venis ad basim, radio in ♂ usque ad stigma, fulvis; stigmate bicolore, fusco, obscuriore in medio interno, pallidiore in externo (*a*, *b*).

Ala anterior (*a*) campo costali a basi suaviter ampliato, 8-10 venulis costalibus diviso. Vena subcostalis cum costali longe ante stigma confluens, distantia subæquali longitudini stigmatis. Stigma triplo aut amplius longius quam latius, margine interno subrecto, paululum concavo, margine externo valde obliquo, vena obliqua diviso, ante medium nascente, ultra medium desinente (*b*). Duæ cellulæ radiales a radice sectoris radii, tres discales. Prima cellula discalis heptagonalis, incipiens longius a stigmate quam hujus venula dividens distat a margine interno, desinens ante apicem stigmatis. 1ª venula marginalis furcata, 2ª trifurcata, 3ª simplex, 4ª, 5ª et 6ª furcatæ.

Ala posterior campo costali parum dilatato, subcosta cum costa confluente longius ab stigmate quam est hujus longitudo. Venula dividens stigma a media basi enascens et ultra medium desinens. 1ª venula marginalis furcata, 2ª bifurcata, 3ª simplex, 4ª, 5ª et 6ª furcatæ.

		♂	♀
Longit.	corp.	(*)	11 mm.
»	prothor.		3 »
»	alæ anter.	10 mm	11 »
»	ovipositoris		5 »

Patrie. Nippon moyen, environs de Tokyo, G. Harmand leg., 1901, 1906.

Troisième section. *Xanthostigma* (ξανθός jaune)

Espèces à ptérostigme jaune

6. Raphidia xanthostigma Schummel. Jelan, region du Baikal et environs d'Irkoutsk.

7. Raphidia cognata Ramb. Fontainebleau, Ville Evrard (Seine-

---

(*) La tête et le prothorax du ♂ manquent.

et-Oise), Chaville (S.-et-O.), Maisons Laffitte (S.-et-O.), Vimoutier (Orne), Nantes, Bérisal (Valais).

8. Raphidia maculicollis Steph. Teniet et Haad (Algérie). Je la crois nouvelle pour le continent africain.

9. Raphidia adanana Albarda. Akbés (Syrie).

Le mâle n'étant pas décrit dans la monographie d'Albarda *(Revision des Raphidides,* La Haye, 1891), j'ajouterai ici la description d'un exemplaire de ma collection.

Meso- et metanotum margine postico anguste fulvo limbato. Campus costalis in ala anteriore 7-8 venulis, in posteriore 6-8 divisus. In ala anteriore 1ª venula marginalis furcata, 2ª bifurcata sive ramosa, 3ª simplex, 4ª trifurcata, 5ª et 6ª furcatæ, reliquæ simplices. In ala posteriore 1ª venula marginalis furcata, 2ª bifurcata seu ramosa, 3ª simplex, 4ª bifurcata, hoc est, singulis ramis furcatis, 5ª, 6ª et 7ª furcatæ, reliquæ simplices.

Le ptérostigme de l'échantillon que j'ai sous les yeux offre quelque anomalie : celui de droite est normal dans les deux ailes, divisé par deux nervules ; celui de gauche a une seule nervule divisoire, l'externe, mais fourchue à l'aile antérieure.

Long. corp.	9 mm.
» alæ anter.	9,5 »
» poster.	8,5 »

Patrie. Beyrouth (Syrie). Leg. P. Bélinay, S. J.

Genre Inocellia Schu.

10. Inocellia crassicornis Schummel. Akbés (Syrie), Japon, Nippon moyen, environs de Tokyo. On l'avait déjà signalé au Japon septentrional. Les échantillons que j'ai sous les yeux sont un peu plus petits que celui de Syrie, sans autre différence remarquable.

M. De Wildeman entretient la section des rapports des *sciences biologiques et de la colonisation.*

M. Th. Gollier présente un travail sur l'*enseignement au Japon.* Il a été publié dans la livraison du 20 avril 1907, de la Revue des Questions scientifiques.

Quatrième section

On pourrait dire que la journée du 28 janvier a été pour la section, la journée du *cancer* : le matin, démonstration de l'application d'un nouveau traitement des affections cancéreuses, à l'Institut SS. Jean et Élisabeth ; l'après-midi, en assemblée générale, conférence du Dr Haibe sur le *Problème du cancer*, suivie de la réunion de notre section, où M. le Dr René Desplats, de Lille, fils de l'éminent professeur de la Faculté catholique de Lille, notre président, a traité *ex professo* du *Traitement du cancer par la fulguration.*

C'est que la question du cancer s'impose, plus que jamais, à l'attention du corps médical : sa fréquence, sa gravité, son mode mystérieux de propagation, sa résistance aux efforts de la thérapeutique et de la chirurgie, en font un fléau redoutable, qui appelle les efforts et la sollicitude des hommes de science et des hommes de cœur. Récemment, un Congrès international en faisait, à Bruxelles, l'objet unique de ses travaux, et le gouvernement belge vient d'encourager l'étude des moyens à lui opposer.

Dans ces derniers temps, deux agents ont été proposés, qui permettent de concevoir quelque espoir de voir arrêter la marche de formes de cancer réputées jusqu'ici incurables : le *radium*, et la *fulguration.*

Celle-ci, plus susceptible d'être vulgarisée, a donné déjà, entre les mains de praticiens judicieux et habiles, des résultats encourageants. M. le Dr René Desplats a été l'un des premiers à mettre en œuvre la méthode du Dr Keating-Hart. Lors de notre réunion du matin, grâce à M. le Dr Solé, chef de service à l'Hôpital SS. Jean et Elisabeth, qui nous fit le plus cordial accueil, nous pûmes assister à l'application de la fulguration (effluves électriques de haute fréquence), sur une malade âgée de 51 ans, atteinte d'un cancer ayant ravagé profondément les fosses nasales et une partie de la face (*). M. Solé eut la gracieuse attention de

---

(*) Au moment où paraît ce compte rendu, une amélioration notable s'est produite dans l'état de l'opérée dont M. le Dr Solé continue le traitement.

Depuis notre session, de nouveaux travaux ont été publiés sur le traitement laisser à son confrère français le soin d'user, à cette occasion, de ses belles installations, et de nous démontrer la technique du procédé.

L'après-midi, après l'intéressante conférence de M. le Dr Haibe, M. le Dr René Desplats nous fit un historique complet de la méthode de Keating-Hart ; il nous fit connaître ses applications, le mécanisme de son action sur les tissus cancéreux, et nous relata les cas où le traitement a été appliqué d'une façon suivie ; parmi eux s'en trouvent qu'il a lui-même eus entre les mains et qui lui ont donné des résultats très favorables. Des projections lumineuses complétaient cet exposé, qui se trouve reproduit dans la seconde partie de ce volume.

M. le Marquis de la Boëssière-Thiennes, membre du Conseil de la Société scientifique, que l'intérêt du sujet traité avait amené à la séance, exprime, au nom de la Société, toutes ses félicitations au conférencier ; il s'estime heureux de constater l'activité croissante de la section de médecine, et l'intérêt que présentent ses travaux.

M. le Professeur Desplats donne la parole à M. le Dr Heymans, professeur à l'Université de Gand, pour une communication sur la « survie de la tête isolée des mammifères, à l'aide de la circulation artificielle ». On fixe sur la table d'opération deux animaux de la même espèce, et chez l'un d'eux (animal transfuseur) l'on rend le sang incoagulable à l'aide de la peptone ou de l'hirudine ; ensuite on relie le bout central de la carotide de cet animal transfuseur avec le bout céphalique de la carotide du second animal ; de la même manière on raccorde, pour la circulation de retour, la veine jugulaire des deux animaux. A l'aide de l'écraseur linéaire, on sectionne alors le cou du second animal dont la tête, après séparation complète du tronc, reçoit sa circulation de l'animal transfuseur à un degré suffisant pour que le cerveau, les nerfs et

---

du cancer par la fulguration, parmi lesquels nous aimons à citer deux études, dues à nos collègues : « Ce que l'on peut espérer de la fulguration dans le traitement des tumeurs malignes », par le Dr Morelle (Communication à la Société médico-chirurgicale du Brabant) et « La fulguration dans le traitement du cancer », par M. le Dr Solé (BULLETIN MÉDICO-CHIRURGICAL DE BRUXELLES, 1er mars 1909).

les muscles conservent intégralement leurs fonctions. Cette tête, complètement isolée et artificiellement irriguée par le sang d'un autre individu, sent, goûte, odore, entend, voit, exécute des mouvements réflexes et de défense, et cela pendant des heures.

Ce travail, que M. Heymans compléta par des considérations sur la physiologie de la circulation du sang, fit l'objet d'un échange de vues auquel prirent part MM. Cuylits, D'halluin et Heymans.

Sixième section

La sixième section se réunit à la seconde pour entendre la communication de M. Schmidt-Leybold (voir la *seconde section*).

Elle entre ensuite en séance et M. A. Renier présente la communication suivante : *Note sur l'emploi des marteaux pneumatiques pour l'abatage de la houille.*

Longtemps l'abatage de la houille fut exclusivement manuel, avec ce correctif qu'on le facilitait, autant que possible, par l'emploi d'explosifs. Depuis plusieurs années, on s'est préoccupé de perfectionner l'abatage par l'emploi de machines, mais dans le but unique d'augmenter la production, car le minage en veine était et est encore dans bien des cas le complément du havage mécanique. On peut cependant poursuivre, dans l'abatage mécanique, deux buts différents.

L'objectif le moins important, proportionnellement, — surtout en Belgique, — est la suppression du minage en veine. Les aléas de cette pratique sont en effet incontestés. Même dans les fosses non grisouteuses, subsiste, dans la plupart des cas, le danger d'explosion résultant de l'inflammabilité des poussières de charbon. Dans ces conditions, l'abatage mécanique présente des avantages sur l'abatage à l'aide d'explosifs : s'il entraîne une augmentation du prix de revient, il offre en compensation un surcroît de sécurité.

Mais, le plus souvent, c'est à l'abatage manuel pur et simple que l'on tente de substituer l'abatage mécanique. Le progrès doit alors être absolu : il doit y avoir augmentation de rendement et diminution du prix de revient. Ces deux points sont connexes sans être absolument solidaires : en général, ils marchent de pair. En outre, il peut y avoir amélioration du prix de vente par suite de l'amélioration de la qualité des produits ; cet avantage peut être surtout sensible pour certaines catégories de charbons.

Mais tandis que le travail manuel se prête à tous les cas, et combiné à l'emploi d'explosifs, à la plupart des cas, exception faite des mines grisouteuses, il n'en est pas nécessairement de même du travail mécanique. Là gît la principale difficulté du problème.

Pour être sensiblement de même âge, la plupart des grands bassins houillers sont loin de présenter les mêmes conditions de gisement. Au point de vue minier, celles-ci peuvent varier beaucoup et rapidement dans un même bassin. Ici, les couches de houille sont minces ou moyennes ; là, elles se réunissent, et leur puissance d'ensemble atteint plusieurs mètres. Ces variations de composition sont locales et fréquentes. Mais il y a plus. Ici, les strates sont très régulières et presqu'horizontales ; là, au contraire, sans cesser d'être régulières, elles prennent une pente importante ; ailleurs enfin, elles peuvent être affectées de plis nombreux et de cassures parfois énormes. Ces variations d'allure se constatent dans un même bassin ; mais on peut généralement caractériser l'ensemble de chaque bassin au point de vue tectonique. Remarquons que les influences tectoniques ne déterminent pas seulement l'allure des couches de houille, elles en modifient souvent la composition ; elles affectent en outre la résistance des terrains encaissants. Les difficultés de soutènement peuvent encore être aggravées par d'autres circonstances locales, telles que l'humidité, le grisou, etc.

Ces différences dans les conditions de gisement jouent un rôle prépondérant dans l'emploi des premières machines imaginées pour l'abatage mécanique de la houille : les haveuses à chaîne, à disque, à barre ou à pic, celles-ci montées sur chariot ou sur affût à colonne. De façon générale, les couches doivent être peu inclinées, régulières, et encaissées dans des terrains de très bonne qualité et d'une certaine puissance. C'est dans une différence des conditions de gisement qu'il faut rechercher la raison du peu d'emploi des haveuses mécaniques, tant en Belgique qu'en France, dans le Nord et le Pas-de-Calais, alors qu'elles sont régulièrement employées dans d'autres régions minières.

Le Pas-de-Calais semble avoir tenté délibérement l'introduction des haveuses mécaniques, et l'essai paraît bien avoir été vain. Dans son rapport annuel pour l'exercice 1907, sur la situation de l'industrie minérale dans le Pas-de-Calais, M. l'Ingénieur en chef des mines Léon mentionne que les applications du havage mécanique ont continué à se restreindre en 1907 ; le tonnage abattu mécaniquement n'a plus été que de 53 000 tonnes, dont le quart en traçages et le reste en tailles, contre 79 000 tonnes en 1906 et 100 000 tonnes en 1905. Marles, fosse 5, entre dans ce total pour 2700 (46 000 tonnes en 1905 et 26 000 tonnes en 1906). Courrières a, depuis la catastrophe, renoncé au havage mécanique (36 000 t. en 1905 et 10 400 t. en 1906). Le havage ne continue à être appliqué sur une grande échelle qu'à Béthune, où une haveuse à barre a abattu près de 22 000 tonnes dans une seule couche. Ailleurs les essais ont dû être abandonnés en raison de l'influence désastreuse sur la qualité du toit (*). A Lens, on a poursuivi les essais avec de petites haveuses perforatrices à pied fixé (Hardy, Sullivan). Neuf de ces appareils ont fourni 11 400 tonnes, principalement dans une seule couche. Une rouilleuse Sullivan, mise à l'essai pour les traçages, a abattu 6400 tonnes. Au total, on comptait trente-six haveuses ou haveuses perforatrices utilisées en 1907, contre cinquante en 1906.

Le havage mécanique avait produit 1 p. c. environ de l'extraction du Pas-de-Calais à l'époque de sa plus grande vogue. Il ne joue plus aujourd'hui qu'un rôle insignifiant dans l'abatage du charbon, et « cet insuccès, au moins provisoire — ajoute M. Léon — doit être attribué aux conditions générales de gisement : variations fréquentes dans l'inclinaison et la composition des veines, nombreux rejets, toit médiocre. »

Cette conclusion peut être étendue à la plus grande partie des bassins houillers belges, actuellement exploités. S'il n'y a guère eu jusqu'ici en Belgique de tentative de havage mécanique franchement organisée, c'est que l'inapplicabilité de la plupart des types de haveuses paraissait évidente, eu égard aux conditions ordinaires de gisement. Dans un essai remarquablement organisé que j'ai eu l'occasion de visiter en septembre 1908, ce n'avait été

(*) D'après mes renseignements personnels.

qu'au prix de transformations profondes d'une haveuse à disque, qu'un charbonnage belge avait obtenu quelques résultats. Encore l'essai n'était-il pas complètement au point : sa durée était insuffisante pour que l'on pût le considérer comme décisif. L'hésitation de la plupart des exploitants à tenter semblable expérience se trouve ainsi justifiée : c'est avec raison que beaucoup d'entre eux ont redouté les difficultés très grandes du problème, et d'autre part, le coût toujours élevé de semblables tentatives.

Un nouveau mode d'abatage mécanique est entré depuis deux ans environ dans la pratique des charbonnages, notamment dans le bassin du Pas-de-Calais. Il s'agit de l'abatage au marteau pneumatique, ou, pour employer l'expression usitée en France, au marteau piqueur.

Le marteau Francke, qui appartient à cette catégorie d'outils, est employé depuis quinze ans pour l'abatage du schiste cuivreux du Mansfeld. Mais ce n'est que tout récemment que l'emploi de marteaux pneumatiques pour le forage des trous de mine dans les travaux au rocher, s'est répandu en Allemagne, en France et en Belgique.

Il était dans l'ordre que l'on tentât l'emploi de semblables engins pour l'abatage de la houille. Des essais ont eu lieu à diverses époques dans nombre de charbonnages ; mais ils n'ont généralement pas abouti : ils n'ont été, il est vrai, dans la presque totalité des cas que de courte durée. Les exploitants du Pas-de-Calais semblent cependant avoir réussi à introduire de façon économique l'emploi du marteau pneumatique dans l'abatage de la houille.

J'ai rappelé ci-dessus l'intérêt général du problème. J'ai exposé l'insuccès des haveuses proprement dites. Il résulte de ces préliminaires que l'outil nouveau doit attirer toute notre attention. Aussi ai-je cru devoir, sur les conseils de M. le Prof. L. Denoel, me rendre dans le Pas-de-Calais, en octobre 1908, pour y étudier dans le détail ce mode nouveau d'abatage mécanique et examiner la possibilité de son emploi en Belgique.

Une seule note, d'ailleurs très sommaire, a été publiée jusqu'ici sur le sujet. Elle est due à M. Malpat, et a paru dans les Comptes rendus mensuels de la Société de l'Industrie minérale de Saint-Étienne, livraison de janvier 1907, sous le titre : *L'emploi du* *marteau à air comprimé pour l'abatage du charbon et de couloirs glissants pour le boutage dans les tailles.*

Les renseignements suivants sont puisés exclusivement dans mes notes de voyage. Je les dois donc à l'obligeance de MM. les Ingénieurs du Pas-de-Calais.

Un seul type de marteau pneumatique a été jusqu'ici presqu'exclusivement employé de façon courante comme marteau piqueur dans le Pas-de-Calais. Il est construit par la firme Ingersoll. Les catalogues de cette maison le renseignent sous le n° 55 H. Il pèse 5.5 kilogrammes environ. Sa distribution peut être d'au moins deux types bien différents. Celle qui a fourni les résultats les plus satisfaisants, est dénommée « Crown ». Le croquis 1 donne une coupe schématique du marteau de ce type.

La distribution y est faite par un petit piston transversal, constitué par deux têtes cylindriques extrêmes et un disque médian, reliés entre eux de façon invariable. Le déplacement du piston entraîne la mise à l'admission de la lumière arrière ou de la lumière avant par suite du changement de position du disque médian. D'autre part, le déplacement simultané des têtes entraîne l'ouverture ou la fermeture des lumières d'échappement. Un simple examen du croquis (fig. 1) suffit pour se rendre compte du trajet de l'air tant dans la course avant (position du distributeur figurée en traits pleins) que dans la course arrière du percuteur (position du distributeur figurée en traits interrompus). Le déplacement du piston distributeur est lui-même commandé, par l'intermédiaire de transmissions fluides, par le piston frappeur. A cet effet, la face inférieure du piston distributeur est maintenue sous pression constante p' par un jet d'air comprimé ; mais un orifice débouchant à l'air libre fait que cette pression p' est inférieure à la pression p de l'air comprimé dans la boîte de distribution. Vers la fin de la course avant, le percuteur fait agir la pression totale p de l'air comprimé sur la face supérieure du piston distributeur, grâce à un jeu de conduits que met en relation un anneau évidé du percuteur. Le croquis représente précisément le percuteur à l'instant où il se trouve dans la position favorable. L'action de la pression totale, $p > p'$, entraîne le changement de position du distributeur. Le percuteur revient alors en arrière ; vers la fin de sa course, il démasque deux orifices, dont l'un est en com-

lumière avant
fin course arrière
pression atmosphérique
fin course avant
pression totale p.
lumière avant
lumière arrière
p' < p
émission avant
émission arrière

Fig. 1.

munication avec l'atmosphère. L'air comprimé s'échappe alors de la face supérieure du distributeur ; celui-ci, sous l'action de p', pression supérieure à la pression atmosphérique, revient dans sa position première. Le percuteur est ainsi lancé vers l'avant, et le jeu se poursuit de la sorte, indéfiniment.

Le piston distributeur est le seul organe délicat. Il occasionne la plupart des défauts de marche.

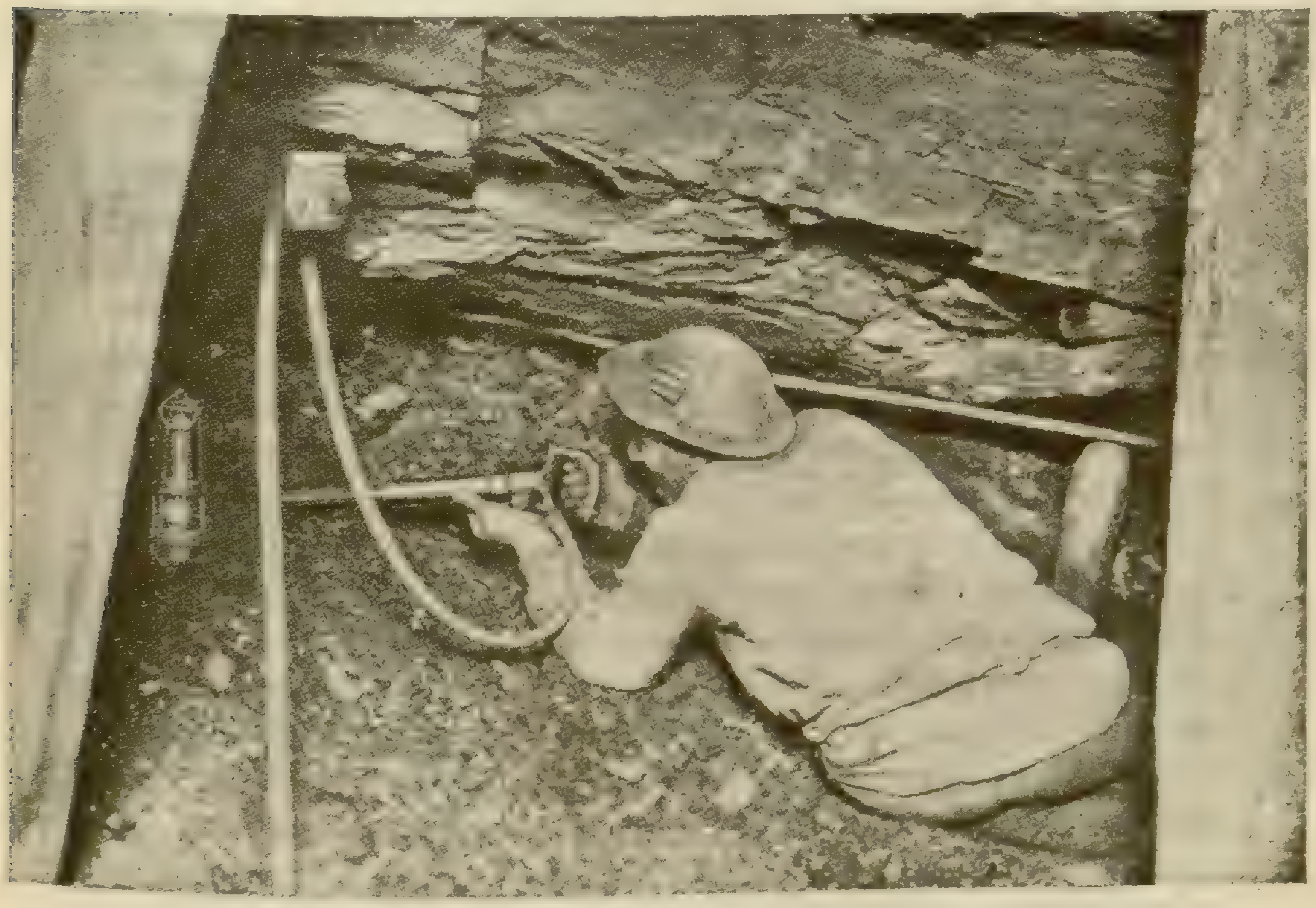


Fig. 2. — Emploi du marteau pneumatique.

La figure 2, empruntée au catalogue de la Compagnie Ingersoll-Rand, montre l'ensemble très robuste de ce petit marteau. La poignée se raccorde directement au cylindre. Une gâchette fixée à l'avant et au haut de la poignée, actionne une soupape et commande l'admission d'air comprimé. Le fonctionnement du marteau se trouve ainsi limité aux périodes de travail ; d'où résulte une réduction de la consommation du fluide moteur. L'outil ne fonctionne de façon réellement satisfaisante que sous pression relativement élevée. D'après le fournisseur, cette pression doit être de 6 kilogrammes par cm^2. La pratique confirme pleinement cette donnée.

Dans deux des mines que j'ai visitées, la pression était de 6 kilogrammes à la surface et de 5 kilogrammes à front, à quelque 1200-1500 mètres des puits. Dans un seul siège, on ne disposait que d'une pression de 4,5 kilogrammes à la surface et de 4 kilogrammes à front ; le travail des marteaux m'y a paru inférieur.

D'ailleurs, les tuyauteries sont largement proportionnées. Certaines mines n'ont pas hésité à les transformer complètement. Le fer étiré est employé exclusivement. J'ai noté, au cours de mes visites, pour le diamètre extérieur de ces tuyauteries : dans les puits, 125-170 millimètres ; dans les travers bancs, 80-125 millimètres ; dans les voies principales, 70-80 millimètres ; dans les voies secondaires, 30-50 millimètres. Pour les installations nouvelles, on adopte la série suivante : 150, 125, 80 et 30 millimètres.

Il faut certainement chercher la principale cause d'insuccès d'un bon nombre d'essais tentés en Belgique en ceci : Certains traités renseignent qu'une pression de 4 kilogrammes par cm^2 est suffisante pour la perforation mécanique. Le renseignement est exact pour les perforatrices proprement dites ; mais il ne l'est pas pour les marteaux pneumatiques.

Le marteau piqueur consomme, d'après les catalogues du fournisseur, 560 litres par minute à la pression atmosphérique. Ce chiffre est considéré comme exact par une mine. Dans une autre, on évalue la consommation par minute à 160 litres sous la pression de 4 kilogrammes par cm^2.

L'entretien du marteau réclame la plus grande attention, car il est incontestablement plus important ici que dans le cas de marteaux utilisés pour des travaux à la pierre. On graisse l'outil durant le travail à l'aide d'un mélange d'huiles de graissage et de pétrole que l'on verse par l'orifice d'emmanchement du pic. Il y a lieu de proscrire les petites bouteilles en verre et de n'utiliser que des burettes en métal. Comme les chutes de pic sont fréquentes, il faut, avant graissage, curer d'un coup d'air comprimé et répéter ce curage avant d'emmancher à nouveau le pic.

Les marteaux sont remontés à la surface après chaque poste. Dans certaines mines, c'est l'abatteur même qui transporte son marteau, le remet à la forge et l'y reprend au poste suivant. Le transport des marteaux peut également se faire à l'aide de berlines spécialement aménagées. A cet effet, on place horizontalement dans une berline ordinaire, un peu en contrebas de son bord supérieur, une tôle régulièrement perforée. Les marteaux sont introduits dans ces trous et viennent, par leur poignée, s'appuyer contre la tôle. Un couvercle à deux panneaux, également en tôle, protège les marteaux. Semblable berline peut transporter 24 à 32 marteaux. Le système a un certain intérêt dans le cas de chantiers importants où l'abatage au marteau piqueur est régulièrement organisé. La berline contient alors la réserve. Il semble toutefois que le contrôle doive être rendu plus difficile. En tous cas, les marteaux sont chaque jour visités à la forge. Cette visite se borne à constater la régularité de fonctionnement par admission d'air comprimé. Puis on place les marteaux en bon état dans un bain de pétrole, d'où ils sont retirés le lendemain, une demi-heure avant la descente du poste. Ce temps suffit à l'égouttage. Moyennant ces précautions, un marteau peut faire 300 postes sans réclamer de réparations sérieuses. Ce chiffre toutefois est un maximum.

En vue d'empêcher l'encrassage du marteau, on pose parfois des filtres en toile métallique, à l'extrémité des canalisations fixes, c'est-à-dire avant le raccord des tuyaux en caoutchouc (15 mm. de diamètre) qui relient les marteaux aux canalisations. Ce sont surtout les paillettes de rouille des tuyauteries que l'on cherche à retenir de la sorte. Le distributeur s'encloue aisément à la rencontre de ces paillettes.

Venons à la description du pic. Dans les débuts, on a fait usage d'aiguilles droites de section rectangulaire. Aujourd'hui on utilise exclusivement des aiguilles rondes ou octogonales avec pointe quadrangulaire assez effilée. Leur diamètre est de 20 mm. La longueur préférée est de 0^{m}20 ou 0^{m}15 à 0^{m}30. On peut tolérer l'usure jusqu'à ce que la longueur soit ramenée à 0^{m}15-0^{m}18. Chaque ouvrier a à sa disposition un certain nombre de pics.

De façon générale, on ne procède pas au havage proprement dit. On ne crée nullement un sous-cave régulier, ainsi que cela se pratique avec les haveuses mécaniques. Le travail au marteau piqueur est, dans son allure, analogue à celui au pic. On débite la veine en utilisant tous les joints de détachement facile et notamment les clivages.

Il est à remarquer que le marteau n'agit pas seulement au point où il travaille ; ses vibrations ébranlent la veine et font jouer les cassures naturelles. Souvent l'ouvrier fait une brèche, de largeur très variable. L'utilité de la brèche serait très faible dans les charbons très durs, au moins en traçages.

L'ouvrier habile tient l'outil d'une main et appuie l'autre contre le front, de manière à percevoir le degré d'ébranlement et de fissuration. Si le détachement du charbon ne se fait pas assez rapidement, il se sert du marteau comme d'un levier pour écarter le bloc desserré, bloc d'importance d'ailleurs très variable.

J'ai vu employer le marteau piqueur dans des couches moyennes et minces dont l'ouverture variait de 1m85 à 0m60 et exceptionnellement à 0m45, par suite d'étreinte. Toutefois on m'a signalé le cas de l'exploitation régulière d'une couche de 0m35 à 0m50 peu dure. Lors de ma visite, ce chantier venait malheureusement de butter à un accident. En général, l'ouverture était inférieure à 1 m. Dans presque tous les cas, il s'agissait de couches en une laie, qui paraissent d'ailleurs être les plus nombreuses de ces gisements. Lorsque la dureté ou la compacité tant de l'intercalation pierreuse que de la seconde laie de charbon permet l'abatage par fractionnement, l'emploi du marteau est encore possible, sans que les produits soient trop cendreux. C'est ce que j'ai pu constater dans un cas. On ne peut donc conclure de façon absolue que l'abatage au marteau piqueur doive se limiter aux couches en une laie. L'importance de l'intercalation et sa nature, la composition exacte de la couche doivent être examinées dans chaque cas.

Partout, il s'agissait de plateures. La pente atteignait, dans pulsieurs cas, 30°. Les couches, assez régulières, étaient affectées cependant d'étreintes et de crains ; l'abatage au marteau s'y poursuivait régulièrement. Les parois étaient de qualité très variable, le toit était parfois très médiocre. Il fallait le soutenir par un garnissage au fur et à mesure de l'avancement. Ailleurs le mur était irrégulier et tout bosselé.

Il y a donc une différence capitale entre l'abatage au marteau piqueur et le havage mécanique ; elle existe, ainsi que nous l'avons vu, dans le mode même de travail. Il est tout naturel qu'elle ait sa répercussion dans les conditions de gisement imposées.

L'abatage au marteau piqueur semble possible dans tous les cas ; peut-être ne serait-il pas applicable dans le cas de toits très friables, constitués par exemple par des béziers.

J'ajouterai que la totalité des chantiers que j'ai visités, exploitaient des charbons gras, voire flambants ; mais on exploite de même les demi-gras dans d'autres fosses.

Je n'ai eu l'occasion de visiter qu'un seul chantier de tailles chassantes, exploité entièrement et exclusivement par abatage au marteau piqueur. J'y reviendrai à l'instant. Dans beaucoup d'autres cas, il s'agissait soit d'avalements, soit de chassages en ferme. Tous ces travaux se faisaient par petites tailles d'une dizaine de mètres de longueur, à deux voies jumelles, avec massif de remblai médian. J'ai vu aussi employer le marteau piqueur dans quelques tailles montantes, mais de façon irrégulière. La note de M. Malpat, signalée ci-dessus, se rapporte précisément aux tailles montantes.

Le chantier de tailles chassantes, que j'ai eu l'occasion d'examiner en détail, était, par suite de circonstances géologiques, exploité en défoncement. Le défoncement était poussé régulièrement vers la rencontre d'une faille, mais on installait les tailles de l'une et l'autre ailes, aussitôt que le défoncement avait découvert la hauteur suffisante. Les tailles supérieures se trouvaient ainsi régulièrement en avance sur les tailles inférieures.

Chaque taille comprenait une basse taille de 3 mètres, la voie large de 2 mètres, bosseyée en mur, la taille proprement dite, longue de 10 à 12 mètres. Remblais complets. On retrouait de distance en distance le massif de remblais de la basse taille immédiatement supérieure. La couche de charbon dur en un sillon de 0^m80 à 1^m10, présentait deux systèmes de clivages souvent très nets, mais de directions peu constantes. Le toit schisteux avec zones carbonatées, était souvent bon et fort, parfois fracturé et pesant, ailleurs déliteux ; le mur schisteux assez résistant, tantôt régulier, tantôt bosselé ; la pente, assez régulière, variait progressivement : 10 à 25° ; la couche n'était pas grisouteuse.

L'exploitation se fait non seulement avec remblais complets, mais encore avec boisage systématique. On pose des rallonges en file en inclinaison, que soutiennent des bois distants de 1 m. environ, potellés dans le mur. Les files de rallonges sont distantes de 1 m., avancement journalier. Dans certaines tailles, il fallait garnir le toit de queues (sclimbes ou wates), et même poser un boisage provisoire en garnissant le toit de queues avec fausses queues (remplaçant la potelle en veine), au fur et à mesure de l'avancement.

Les canalisations d'air comprimé suivaient la descenderie et les voies de niveau. Au pied de chaque taille, la conduite était terminée par un plateau garni de trois tubulures avec robinets. Il faut en outre un robinet à chaque branchement de la tuyauterie principale afin de faciliter les réparations.

Chaque taille occupait trois ouvriers qui possédaient deux marteaux piqueurs.

Ainsi que cela se pratique souvent encore dans le Pas-de-Calais, ces trois hommes devaient faire non seulement l'abatage, le boisage et le boutage, mais aussi le mur ou bosseyement et le remblayage. Le tir des mines de bosseyement se faisait d'ailleurs durant le poste d'abatage. Il n'y avait donc, en fait, qu'un poste par jour. Le second poste, très réduit, était occupé aux travaux préparatoires ou dans les traçages.

En général, deux ouvriers travaillaient à l'abatage, l'un dans la voie ou dans la basse taille, en desserrage, l'autre dans la taille ; ce dernier abattait par brèches montantes de 1 m. de largeur. Il arrivait cependant — c'était le cas pour l'unique taille installée au-dessus du niveau d'étage — que le poste de chaque taille s'organisait autrement : un ouvrier travaillait continuellement à l'abatage, l'autre au boutage, le troisième au bosseyement, que facilitait une passée de veine à 60 centim. dans le mur.

Ajoutons que normalement le poste qui descend entre 4 et 5 heures du matin, remonte à 1 1/2 heure. Au moment des longues coupes, c'était le cas lors de ma visite, la remonte a lieu entre 3 et 4 heures. Le repos étant d'une demi-heure par poste, on peut compter normalement sur 7 1/2 heures de présence au chantier (5 1/2-13), dont 7 heures de travail effectif.

Avant d'examiner par le menu les résultats obtenus, je crois intéressant de transcrire ici le passage du rapport, cité plus haut, de M. l'Ingénieur en chef des mines Léon, relatif aux marteaux piqueurs. « Les marteaux pneumatiques de faible poids actionnant des aiguilles à la veine, qui avaient fait leur apparition en 1906, sont de plus en plus employés dans les charbons durs et surtout dans les charbons à clivages (limets). On estime qu'ils procurent une économie de 20 à 30 p. c., remédiant ainsi dans une certaine mesure à la pénurie de la main-d'œuvre. Il y avait en fin d'année 375 de ces appareils en service (types Ingersoll-Sergeant, François, etc.) et le tonnage produit par eux s'est élevé à 153.000 tonnes, dont 20.400 en traçages, le reste en tailles. Dourges, à elle seule, a produit la moitié de ce tonnage (92.000 t. dont 14.500 en traçages) avec 188 marteaux, le reste venant surtout de Lens, Meurchin, Marles et un peu de Bruay, Béthune, Liévin, Nœux et Ferfay. »

Ces chiffres permettront de se faire une idée plus concrète de la situation et d'apprécier l'importance toute relative au marteau piqueur, puisque ces 153.000 tonnes ne représentent que 0,89 p. c. de la production totale du bassin.

Dans aucune des mines visitées, on n'a pu me signaler d'accident grave survenu, notamment par éboulement, dans les travaux où se pratiquait, et où s'était pratiqué, l'abatage au marteau piqueur. C'est là une constatation importante, surtout après les indications données ci-dessus, et corroborées par la description du boisage, sur la mauvaise qualité de certains toits.

Aucun des chantiers que j'ai vus, n'était bien poussiéreux. Le marteau piqueur n'y soulevait pas de poussière. Je dois à la vérité d'ajouter que l'on m'a signalé un cas, non contrôlable pour l'instant, où il en aurait été autrement.

J'ai esquissé ci-dessus l'organisation générale de certaines mines du Pas-de-Calais à propos d'un chantier en tailles chassantes. Dans d'autres mines, il existe un poste de l'après-midi qui fait le mur et le remblai. On évite ainsi le tir des mines durant l'abatage.

Dans tous les cas, l'abatage, y compris le boutage et le boisage, se paie à la berline. Un cachet est introduit avant remplissage, dans une encoche située près du fond de la caisse. Il ne peut ainsi y avoir substitution en cours de route. Le cachet est recueilli au triage, après basculage et examen sommaire de la propreté des produits.

Comme dans le cas où le poste du matin fait le mur, ce travail est payé sur une base spéciale, à tant par mètre d'avancement, tant pour le bosseyement que pour le remblayage consécutif, il n'y a pas lieu de distinguer entre les deux modes d'organisation en ce qui concerne l'abatage proprement dit. C'est d'ailleurs dans une mine où n'existait que le poste du matin, que j'ai pu constater une organisation spontanée de l'équipe. L'ouvrier le plus habile avait, de commun accord avec ses camarades, été chargé de l'abatage au marteau et y travaillait régulièrement sans se plaindre de la moindre fatigue. Sa production journalière avait été, durant la dernière quinzaine, de 17.5 tonnes moyennement. Ce chiffre doit toutefois être considéré comme exceptionnel. La production prévue de la taille était de 11 à 14 tonnes.

Deux points sont particulièrement à considérer au point de vue économique : le rendement et le prix de revient.

Le rendement s'évaluera toujours ici en comprenant dans l'abatage, le boisage et le boutage ; il en sera de même du prix de revient, puisque la base du salaire est le payement à la berline.

En ce qui concerne le rendement, le fournisseur évalue dans ses catalogues l'augmentation à 200 ou 300 p. c. Dans la notice qu'elle a rédigée pour l'Exposition Franco-Britannique (Londres 1908), la Compagnie des Mines de Lens annonce que le marteau piqueur peut procurer une augmentation de rendement de 100 p. c. Il paraît qu'en fait, lors d'essais, des ouvriers exceptionnels ont atteint les chiffres signalés par le fournisseur. Mais il faut calculer sur une moyenne et surtout sur une moyenne normale. Les résultats sont alors moins extraordinaires. Dans le chantier en tailles chassantes, décrit ci-dessus, le rendement avait augmenté de 40 p. c., ce qui est déjà remarquable. Ainsi qu'il est naturel, l'augmentation de rendement dépend surtout de la dureté de la couche, ou encore et surtout, de sa compacité. Le rôle des limets est prépondérant.

Dans la note déjà signalée, M. Malpat annonce que le prix de la berline est tombé de fr. 1.60 à fr. 1.10, soit une réduction du prix de revient de 31 p. c. Il s'agit d'une couche de charbon dur, à gros limets, en un sillon massif de 50 à 60 centimètres, avec mauvais toit et mur variable.

Voici quelques chiffres assez complets obtenus à une même fosse, en un an d'expériences, et qui sont comparables :

Couche.	Puissance.	Rendement par ouvr. de taille. Pic. Tonnes.	Rendement par ouvr. de taille. Marteau Tonnes.	Prix payé par berline de 500 k. Pic. Francs.	Prix payé par berline de 500 k. Marteau Francs.
Très dure, à limets .	0.50-0.60	1.44	1.92	2.20	1.70
Dure à limets. . .	0.80-1.00	2.50	3.20	1.15	0.80
Dure	0.50-0.60	1.80	2.20	»	»
Peu dure	0.35-0.50	1.40	1.60	2.00	1.80

Le gain net, en tenant compte de la consommation d'air comprimé, est dans la progression indiquée. Fort pour le premier cas, il est encore sensible et presqu'égal pour le second et le troisième cas. Il est nul, et il y a même perte dans le quatrième cas.

Il faut pour l'établissement du bénéfice net compter environ 1 franc par marteau et par journée de travail, pour l'amortissement et les réparations. Les renseignements que j'ai recueillis à cet égard, sont concordants.

Ces quelques chiffres résument bien les renseignements qu'il y a à retirer de ces intéressants essais. Il faut toutefois noter que la pression inférieure de l'installation d'air comprimé de la fosse citée en dernier lieu, doit jouer un rôle défavorable au bon rendement du marteau, et qu'en tous cas, les prix payés pour l'abatage au marteau sont un peu plus élevés qu'ils ne devraient l'être normalement ; étant donnée la nouveauté du système, on cherche assurément à intéresser l'ouvrier.

Il résulte de façon générale de mes renseignements que l'abatage au marteau piqueur est d'autant plus avantageux que la couche est plus dure. Toutefois il y a une limite supérieure. Dans des couches très dures et très tenaces, à 33 p. c. de matières volatiles, l'effet du marteau est peu sensible, et s'il fallait abandonner l'emploi d'explosifs, le rendement y baisserait de 60 p. c. Constatons donc en passant que l'emploi du marteau piqueur n'entraînera pas de façon absolue la suppression du minage en veine dans les houillères.

Près des dérangements, lorsque le charbon n'est pas « naturel », le rendement baisse considérablement, car la présence de limets facilite le travail au marteau. Or ces limets sont moins nets près des dérangements.

Quant à l'amélioration possible de la qualité des produits, je n'ai pu recueillir des chiffres certains. D'aucuns estiment qu'il y a une augmentation de 10 p. c. du rendement en gros, mais celui-ci était déjà élevé dans le travail au pic.

Lorsque le toit est déliteux et se détache en plaquettes, le bruit de la décharge du marteau peut empêcher l'ouvrier de percevoir la chute de schiste. Quand le boisage est systématique, il ne paraît pas y avoir en cela aggravation du danger, ainsi que je l'ai dit. Je n'ai pu me renseigner plus exactement sur l'influence néfaste qu'exerceraient ces chutes de pierres sur la propreté des produits.

Les couches en une laie massive, et encore celles permettant un déhouillement par lits successifs, ne manquent pas dans les bassins actuellement exploités en Belgique. Certaines d'entre elles sont des charbons durs, à limets. Il est à souhaiter que des essais sérieux soient faits pour l'introduction du marteau piqueur dans l'abatage de semblables veines. Diverses tentatives faites dans ce sens en Belgique, et dont nous avons eu connaissance, sont des plus encourageantes.

Il y a lieu d'espérer non seulement une augmentation du rendement, mais encore une diminution du prix de revient. L'habileté professionnelle de nos ouvriers est certes plus grande que celle de la population minière du Pas-de-Calais. Or il ne faut pas perdre de vue que le marteau piqueur est essentiellement différent des haveuses mécaniques et que l'habileté individuelle joue un grand rôle dans son emploi.

Certains charbonnages du Pas de Calais estiment que l'abatage au marteau pneumatique peut s'étendre économiquement à 30 p. c. des cas ; d'autres à 20 ou 15 p. c., voire seulement 10 p. c. Tout porte à croire qu'il en sera de même en Belgique. L'applicabilité sera variable, mais pourra dans certains cas être très importante. Toutefois l'extension de l'emploi du marteau piqueur aux chantiers en dressant devra être spécialement étudiée.

La plus sérieuse difficulté que rencontra la diffusion du système dans beaucoup de charbonnages belges, résultera des hautes pressions d'air comprimé que réclame le marteau piqueur pour finir un travail satisfaisant. Diverses installations déjà anciennes pourront à cette occasion être avantageusement remplacées. Il y aura lieu en outre de proportionner largement les tuyauteries, ainsi que je l'ai signalé au cours de cette note.

Ces transformations exigeront d'importantes immobilisations ; mais elles pourront, dans bien des cas, être rapidement amorties, grâce à la diminution du prix de revient.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

La séance s'ouvre à 2 heures et demie, sous la présidence de M. Ed. Van der Smissen, vice-président de la Société.

La parole est donnée à M. le Dr Haibe, directeur de l'Institut provincial de bactériologie de Namur, pour une conférence sur le *Cancer*. En voici le résumé :

Le chapitre des tumeurs est encore, à l'heure actuelle, un des plus obscurs et des plus troublants de la pathologie.

Une tumeur est caractérisée par une prolifération anormale des tissus qui tend à *persister* et à *s'accroître*. On a divisé les tumeurs en deux classes : les tumeurs dites de bonne nature et les tumeurs de mauvaise nature. Les premières sont, avant tout, l'apanage de la jeunesse et les secondes se rencontrent principalement chez l'homme adulte et le vieillard ; les tumeurs bénignes présentent au microscope, la disposition des tissus normaux, tandis que les tumeurs malignes, rompant cette disposition, dirigent leurs bourgeons cellulaires vers l'intérieur et envahissent ainsi peu à peu l'économie. Aussi ces dernières causent-elles fatalement la mort, si on ne les arrête pas dans leur évolution.

Les tumeurs *cancéreuses* sont caractérisées par une prolifération anormale des cellules épithéliales. Il résulte de cette définition qu'un cancer vrai ne peut débuter que dans les tissus ou les organes qui contiennent du tissu épithélial. Toutefois on a élargi la signification du mot « cancer », et on désigne souvent ainsi des tumeurs de mauvaise nature très variées qui n'ont comme caractère commun que leur retentissement fatal sur l'économie.

Le nombre des tumeurs cancéreuses de l'homme a pris, dans ces derniers temps, des proportions tellement inquiétantes, que tous les gouvernements des pays civilisés ont cru devoir s'en préoccuper. Toutes les races humaines et toutes les classes de la société y sont sensibles ; il semble même que le cancer se rencontre plus fréquemment dans la classe aisée.

L'étude de la pathogénie du cancer est au début ; aucune découverte n'en a encore éclairci le mystère troublant. Deux hypothèses sont en présence pour expliquer le développement d'un cancer : la théorie *cellulaire*, et la théorie *parasitaire*. Les partisans de la première veulent qu'un cancer provienne d'une désorientation suivie de multiplication des cellules, dont la cause première nous échappe ; les partisans de la seconde invoquent, à l'appui de leur thèse, l'analogie qui existe entre le cancer et certaines maladies microbiennes ou parasitaires capables de provoquer des tumeurs, comme la tuberculose, les épithélioses, les infections coccidiennes. Les images microscopiques d'un cancer au début semblent prouver — écrit Borrel — que tout se passe comme si quelque agent virulent ou toxique, présent dans la cellule cancéreuse, en commandait les divisions cellulaires. Seulement l'existence de ce virus n'est pas démontrée, et voilà précisément le problème étiologique du cancer.

Cependant, l'étude expérimentale des tumeurs malignes a été reprise il y a peu de temps et on peut dire que ces quinze dernières années d'expérimentation ont mieux fait connaître le cancer que vingt siècles d'observation.

Les conditions de transplantation du cancer ont été précisées ; une tumeur cancéreuse n'est transplantable que chez les animaux de l'espèce qui l'a fourni, et pour réussir une inoculation, il faut insérer sous la peau non pas des cellules isolées, mais un fragment de tumeur. On fait ainsi une véritable greffe de tissu cancéreux que l'on peut comparer à un bouturage végétal pratiqué en terrain approprié qui permet de reproduire indéfiniment la souche qui a fourni le cep initial.

Les expériences de transplantations cancéreuses ont été faites surtout chez la souris, animal qui se prête bien à ce genre d'inoculation. On peut immuniser ces rongeurs contre le cancer en leur injectant des cellules cancéreuses atténuées ou le produit de broyage d'une tumeur. Dans ces derniers temps on a montré que des inoculations de tissus normaux pouvaient immuniser également, à condition que l'on injecte des tissus provenant d'un animal de même espèce. Les tentatives d'immunisation *passive*, au moyen des sérums, sont infructueuses jusqu'ici ; cependant certains résultats font espérer qu'on est en bonne voie.

De toutes parts, on poursuit activement l'étude du cancer ; on cherche s'il est contagieux, s'il est héréditaire ; on cherche sa nature et les moyens de le traiter efficacement. Espérons que cet immense effort scientifique ne restera pas stérile, et attendons avec confiance les résultats des expériences qui se poursuivent dans les laboratoires du monde entier.

Le président remercie et félicite le conférencier, et déclare close la session de janvier 1909.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-TROISIÈME ANNÉE, 1908-1909
TROISIÈME ET QUATRIÈME FASCICULES

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1909

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Session des 20, 21 et 22 avril 1909, à Bruxelles.— Séances des Sections.
Première Section **169**
Deuxième — **192**
Troisième — **212**
Quatrième — **222**
Cinquième — **246**
Sixième — **247**
Assemblées générales **249**
Liste des ouvrages offerts à la Société scientifique de Bruxelles du 1er mai 1908 au 1er mai 1909 . . . . **262**

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

L'Hydrolyse citrique du Maltose, par M. J. Piraerts. 305
Sur la Géométrie du Tétraèdre, par M. J. Neuberg 320
Description de nouveaux Dryinides et Belytides d'Amérique, par M. l'abbé J. J. Kieffer 334
Description de nouveaux Diapriides et Belytides d'Europe, par M. l'abbé J. J. Kieffer 381

Le volume des Annales de la Société scientifique paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la Revue et des Annales, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique*, au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

Adresse du secrétaire général : **M. Paul Mansion,**
6, quai des Dominicains, Gand.

SESSION DES 20, 21, 22 AVRIL 1909

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

Mardi 20 avril 1908. — La section procède au renouvellement de son bureau. Sont nommés :

Président :	M. le Vicomte R. de Montessus de Ballore.
Vice-Présidents :	M. G. Verriest.
	M. de Béthune.
Secrétaire :	M. H. Dutordoir.

La section met au concours la question suivante :
On demande de résumer et d'apprécier l'œuvre géométrique de Grégoire de St Vincent.

M. G. Verriest expose les recherches faites par M. Casteels *Sur quelques constructions relatives aux coniques.*

Ces constructions ont pour point de départ le théorème général suivant :

Si parmi les n^2 points d'intersection de deux courbes d'ordre n il y en a np situés sur une courbe d'ordre p, les $n\ (n - p)$ qui restent appartiennent à une courbe d'ordre $n - p$.

Lorsque les deux courbes d'ordre n sont des cubiques dégénérées en systèmes de trois droites et que l'on fait $p = 2$, on obtient le théorème de Pascal. M. Casteels étudie le cas où $n = 4$ et $p = 2$. Le théorème général donne alors la proposition suivante :

Si parmi les seize points d'intersection de deux quartiques il y en a huit sur une conique, les huit points d'intersection restants sont aussi sur une conique.

Ce théorème donne lieu à deux cas particuliers intéressants :

1. *Octogone inscrit dans une conique.*

Numérotons les côtés de 1 à 8. L'ensemble des côtés d'ordre impair et celui des côtés d'ordre pair forment chacun une courbe du quatrième ordre. Huit points d'intersection de ces courbes sont sur la conique, les huit points restants seront sur une autre conique : ce sont les points (*)

14 16 36 38 52 58 72 74.

Cette dernière conique peut se composer de deux droites d et d_1.

Réciproquement, si les huit points d'intersection indiqués ci-dessus de huit droites numérotées de 1 à 8 sont situés sur deux droites, l'octogone formé par les huit droites prises dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 est inscrit dans une conique.

Cette propriéte peut être utilisée pour construire par points au moyen de la règle seule une conique donnée par cinq points A, B, C, D, E. Pour que les constructions soient pratiques et générales, il faudra que les huit points appartenant à la conique dégénérée dd_1 soient répartis de la façon suivante :

sur d les points 14 36 58 72,
sur d_1 les points 16 38 52 74.

a) On considère les points A, B, C, D, E comme étant respectivement les sommets 81, 12, 23, 34, 45 d'un octogone inscrit. Les côtés 1, 2, 3, 4 sont alors donnés ; l'on trace arbitrairement le côté 8 par le point A et le côté 5 par le point E. On demande les côtés 6 et 7.

On détermine les points 14 et 58, la droite d est ainsi connue. On détermine d_1 par les points 38 et 52. Le côté 6 est déterminé

(*) 14 représente le point d'intersection des droites 1 et 4.

par les points $3d$ et $1d_1$, le côté 7 est déterminé par les points $2d$ et $4d_1$.

Les points 56, 67 et 78 sont trois nouveaux points de la conique. Pour en obtenir d'autres on fait varier les directions des droites 5 et 8.

b) Les points A, B, C, D, E sont pris respectivement pour les sommets 81, 12, 23, 34 et 67. Les côtés 1, 2, 3 sont donc donnés. On trace arbitrairement le côté 4 par D et le côté 6 ou 7 par E.

c) Comme ci-dessus, mais on trace arbitrairement les côtés 6 et 7.

d) Les points A, B, C, D, E sont pris respectivement pour les sommets 81, 12, 23, 56 et 67. Les côtés 1, 2 et 6 sont donc donnés. On trace arbitrairement les côtés 3 par C et 5 par D.

e) Comme ci-dessus, mais on trace arbitrairement les côtés 3 par C et 8 par A.

f) Comme ci-dessus, mais on trace arbitrairement les côtés 5 par D et 8 par A.

2. *Système de deux quadrilatères inscrits dans une conique.*

Numérotons les côtés de l'un d'eux de 1 à 4, ceux de l'autre de 5 à 8. L'ensemble des côtés d'ordre impair et celui des côtés d'ordre pair forment chacun une courbe du quatrième ordre. Huit points d'intersection de ces courbes sont sur la conique, les huit points restants seront sur une autre conique. Ce sont les points suivants :

16 18 36 38 52 54 72 74

Si cette dernière conique se réduit à deux droites d et d_1, ces huit points peuvent être répartis sur ces droites de deux manières différentes :

$$\text{I}\left\{\begin{array}{lcccc} \text{sur } d & 16 & 38 & 52 & 74\\ \text{sur } d_1 & 18 & 36 & 54 & 72\end{array}\right.$$

$$\text{II}\left\{\begin{array}{lcccc} \text{sur } d & 16 & 38 & 54 & 72\\ \text{sur } d_1 & 18 & 36 & 52 & 74\end{array}\right.$$

Réciproquement, si les huit points d'intersection, indiqués ci-dessus, de huit droites numérotées de 1 à 8 sont situés sur deux droites suivant l'un des schémas ci-dessus, les deux quadrilatères formés par les droites 1, 2, 3, 4 et 5, 6, 7, 8 sont inscrits dans une même conique.

Remarque. On peut considérer aussi les côtés 1, 3, 6, 8 et 2, 4, 5, 7 comme formant deux quartiques. On obtient alors un théorème analogue au précédent, mais la disposition des points sur les deux droites sera l'une des deux suivantes :

III	sur d	15	37	62	84
	sur d_1	17	35	64	82
IV	sur d	15	37	64	82
	sur d_1	17	35	62	84

Ces théorèmes peuvent également être utilisés pour la construction d'une conique donnée par cinq points A, B, C, D, E.

Il y a plusieurs façons distinctes de procéder :

a) On considère les points A, B, C, D comme les sommets du quadrilatère 1, 2, 3, 4 et le point E comme l'un des sommets de l'autre quadrilatère, par exemple 56. On trace 5 et 6 arbitrairement par E. Si l'on adopte le schéma I, on détermine d par 16 et 52 et d_1 par 36 et 54 ; 7 sera déterminé par $4d$ et $2d_1$ et 8 par $3d$ et $1d_1$. Les points 67, 78 et 85 sont trois points nouveaux de la conique.

Remarque I. En adoptant les schémas II, III ou IV on obtient des constructions différentes.

Remarque II. Cette construction n'est autre que celle que M. Carnoy a présentée à la Société scientifique le 5 avril 1880, mais elle est envisagée à un autre point de vue.

b) On considère A, B, C comme trois sommets de l'un des quadrilatères et D, E comme deux sommets adjacents de l'autre. On trace arbitrairement un côté par D et un côté par E.

Chacune de ces constructions donne lieu à une construction corrélative permettant de mener des tangentes à une conique donnée par cinq tangentes.

Si l'on suppose que deux sommets adjacents de l'un des polygones inscrits soient confondus, on obtient des constructions dans lesquelles interviennent à la fois des points de la courbe et des tangentes et, corrélativement, des tangentes et leurs points de contact.

M. Casteels a obtenu aussi des résultats intéressants relatifs à d'autres polygones inscrits dans une conique.

M. de la Vallée Poussin fait une communication sur l'*approximation minimum d'un système d'équations* dont voici le résumé.

Étant donné un système de m équations linéaires à n inconnues $(m > n)$

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{c} a_ix + b_iy + \ldots + l_iu - m_i = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots m) \end{array} \right.$$

ce système est généralement incompatible. Nous lui substituons le suivant :

$$\begin{array}{c} a_ix + b_iy + \ldots + l_iu - m_i = r_i \\ (i = 1, 2, \ldots m) \end{array}$$

où nous donnons aux quantités r_i le nom de résidus. Nous appelons, avec M. Goedseels, *approximation minimum* du système (1) la plus petite valeur que l'on puisse assigner au plus grand résidu (considéré en valeur absolue) du système (2) pour que ce système (2) soit compatible.

Voici les énoncés de quelques théorèmes sur cette approximation minimum. Ils supposent que n quelconques des premiers membres des équations (1) forment un système d'expressions linéaires indépendantes.

Théorème I. *Les valeurs des inconnues qui fournissent l'approximation minimum* M *du système* (1) *donnent au moins $n + 1$ résidus atteignant en valeur absolue cette limite* M.

Théorème II. *L'approximation minimum et les valeurs correspondantes des inconnues, pour un système de $n + 1$ équations à n inconnues, s'obtiennent par des formules générales.*

Théorème III. *Si m est $> n + 1$, l'approximation minimum d'un système de m équations à n inconnues est celle d'un certain système de $n + 1$ équations qui font partie du système proposé.*

On peut déduire de ces théorèmes un procédé de proche en proche pour déterminer cette approximation minimum.

Le mémoire de M. de la Vallée Poussin paraîtra *in extenso* dans une autre publication.

Le R. P. Willaert fait une communication *Sur une méthode de combinaison des équations de condition en usage dans les observations à la lunette méridienne.*

1. On rencontre, dans la pratique courante des observations méridiennes, des équations de condition du type :

$$a = bx + y.$$

Les inconnues x et y représentent respectivement la déviation en azimut de l'axe de rotation de la lunette et la correction à faire subir à l'heure de la pendule sidérale. Les quantités a et b sont des fonctions des coordonnées de l'étoile observée, des temps de passage aux fils du réticule, des constantes d'inclinaison et de collimation de l'instrument supposées connues préalablement.

Nous avons appris que, en général, dans les observatoires, en particulier à l'Observatoire Royal de Belgique, à Uccle, on conduit les observations et les calculs de la manière suivante :

1° On observe les passages d'une série de n étoiles de déclinaison relativement faible ; on obtient ainsi n équations de condition,

$$a_i = b_i\,x + y, \qquad i = 1, 2, \dots n$$

2° On fait une observation sur une étoile voisine du pôle ; d'où une nouvelle équation,

$$a_{n+1} = b_{n+1}\,x + y.$$

3° On additionne membre à membre les n premières équations ; on résout par rapport à x le système formé par l'équation obtenue

$$\sum_n a = x \sum_n b + ny$$

et par la $(n+1)^{\text{ième}}$ équation. Cette valeur de x, adoptée pour valeur finale, est substituée dans chacune des équations de condition ; on en déduit autant de valeurs de y, dont on prend la moyenne arithmétique Υ pour valeur finale de l'inconnue y.

Nous ferons quelques remarques au sujet de ce procédé.

2. Notons d'abord que la moyenne Υ n'est autre que la valeur que fournirait directement, pour l'inconnue y, le système des deux équations dont on a déduit la valeur de x. En effet, désignant

par x et y les solutions du système de ces deux équations, et par Υ la moyenne dont il a été question, on a identiquement

$$\sum_n a = x \sum_n b + ny,$$

$$a_{n+1} = x \quad b_{n+1} + y\,;$$

d'où

$$\sum_{n+1} a = x \sum_{n+1} b + (n+1)\,y.$$

D'autre part,

$$\Upsilon = \frac{\sum\limits_{n+1} (a - bx)}{n+1},$$

ou

$$\sum_{n+1} a = x \sum_{n+1} b + (n+1)\,\Upsilon.$$

D'où

$$\Upsilon = y \ (^1).$$

On pourrait donc s'épargner les laborieuses substitutions qui donnent les valeurs de y, à moins que l'on ne veuille, dans cette opération, trouver un contrôle des observations, en s'assurant que les écarts individuels demeurent compris dans des limites acceptables.

3. Constatons en second lieu que le procédé employé ici pour la combinaison des équations de condition ne rentre dans aucun des types classiques. Ce n'est ni la méthode des moindres carrés, ni celle de Mayer, ni une des méthodes récemment proposées (2). Les considérations qui vont suivre peuvent être regardées comme une justification de la méthode suivie.

Si dans l'équation

$$a = bx + y \tag{1}$$

nous regardons les quantités x et y comme des constantes et les

---

(1) Si Υ désignait la moyenne des n premières valeurs de y, on arriverait à la même conclusion.

(2) Goedseels, *Théorie des Erreurs*. 3me édition, pp. 22 et 32.

quantités a et b comme des coordonnées cartésiennes de points par rapport à des axes a et b, cette équation représente une droite du plan des ab. Les observations fournissent une série de systèmes de valeurs (a_i, b_i), en d'autres termes, un certain nombre de points du plan des ab que nous appellerons *points observés*. Si les mesures s'étaient effectuées sans erreurs, tous ces systèmes de valeurs (a_i, b_i) satisferaient à l'équation (1) ; géométriquement, tous les points observés seraient situés sur une même droite, dont les paramètres x et y seraient les valeurs exactes des inconnues cherchées. Si nous supposons les erreurs d'observation relativement petites, les points observés s'écarteront peu de la droite théorique. Inversement, les points étant donnés, le problème pratique à résoudre consistera à *mener une droite passant dans le voisinage de tous les points observés*. La manière dont on choisit cette droite permet de caractériser les différentes méthodes étudiées dans la théorie des erreurs.

Dans la méthode de Mayer, pour la donner en exemple, on range les équations d'après un coefficient croissant, p. e. d'après les a croissants. On les divise en deux groupes contenant à une unité près le même nombre d'équations et, additionnant membre à membre les équations de chaque groupe, on résout les deux équations finales obtenues. Géométriquement, ce procédé revient à séparer par une parallèle à l'axe des b les points observés en deux groupes contenant le même nombre de points, et à faire passer la droite cherchée par le centre de gravité de chacun des groupes de points. En effet, soit p le nombre de points du premier groupe. L'équation finale peut se mettre dans la forme

$$\frac{\sum_p a}{p} = \frac{\sum_p b}{p}\, x + y,$$

qui exprime que la droite $a = bx + y$ passe par le centre de gravité de coordonnées

$$\frac{\sum_p a}{p}, \quad \frac{\sum_p b}{p}.$$

Dans le cas des observations méridiennes qui nous occupe, l'ensemble des points observés se présente de la manière suivante. Les n étoiles équatoriales donnent un groupe de n points peu distants les uns des autres. L'étoile circompolaire donne un point isolé à grande distance du groupe des premiers. Dans ces conditions, il est naturel et avantageux, en général, de mener la droite inconnue par le point isolé et par le centre de gravité du groupe des n points.

On définit ainsi la droite par deux *points approximatifs distants l'un de l'autre*, tandis que la méthode de Mayer la définirait par deux points beaucoup plus rapprochés.

4. Généralisant ces indications, faisons les trois remarques suivantes :

1° Au lieu de diviser les équations de condition en deux groupes renfermant le même nombre d'équations, il sera préférable, en général, de les partager de manière que l'intervalle des valeurs extrêmes d'un coefficient se trouve divisé en deux parties égales. Ainsi, si a_i et a_k sont les valeurs extrêmes de a, on rangera dans le premier groupe d'équations celles dont le coefficient a est inférieur à $\frac{a_i + a_k}{2}$. Le reste des équations formera le second groupe.

2° Lorsque, possédant une série d'équations de condition, on veut trouver rapidement par la résolution de deux d'entre elles une valeur provisoire des inconnues, il faudra choisir deux équations de coefficients les plus dissemblables possible, de manière que $(a_p - a_q)^2 + (b_p - b_q)^2$ soit le plus grand possible. On aura utilisé ainsi, pour fixer la position de la droite, deux points approximatifs à grande distance l'un de l'autre.

3° Ces considérations s'étendent sans peine au cas où l'on aurait dans les équations plus de deux coefficients dépendant de grandeurs observées, et plus de deux inconnues.

On voit que cette représentation graphique, qui nous a déjà permis de prévoir et de prévenir des mécomptes possibles dans l'application de la méthode de Mayer (1), se montre d'une singulière souplesse pour s'adapter aux groupements variés que peuvent présenter les points observés dans les différents genres de recherches.

---

(1) Ann. de la Soc. scientif., 1907, 1re partie, p. 240.

M. Neuberg fait une communication sur le *tétraèdre*. Après un résumé des propriétés déjà connues du tétraèdre podaire d'un point variable par rapport à un tétraèdre donné, l'auteur expose quelques nouveaux développements de ce chapitre de la Géométrie du tétraèdre. Le mémoire de M. Neuberg sera publié dans la seconde partie des ANNALES.

M. Mansion fait la communication suivante *sur le procédé de la Quadruple pesée*.

1. M. Goedseels a exposé le procédé de la quadruple pesée dans la séance du 9 avril 1907 de la seconde section de la *Société scientifique de Bruxelles* (ANNALES, 1907, t. XXXI, 1^re^ partie, pp. 266-272), à propos de l'exemple suivant : Un objet pesé seul sur une balance de précision, pèse 8639 dixièmes de milligramme ; un autre 4099 ; ensemble, 12729 ; le premier pèse autant que le second augmenté de 4552 grammes. Les poids x, y des deux objets vérifient donc des équations

$$\begin{aligned} x &= 8639 + z, \\ y &= 4099 + u, \\ x + y &= 12729 + v, \\ x &= y + 4552 + t, \end{aligned}$$

où z, u, v, t désignent les erreurs éventuelles commises dans les quatre pesées. Si α est l'approximation inconnue des pesées, on doit avoir

$$-\alpha < z, u, v, t < \alpha$$

De ces inégalités et des relations précédentes, *on déduit que α est supérieur à 5 1/4*.

L'auteur prend arbitrairement $\alpha = 6$. Il résulte alors des inégalités relatives à α et des équations données

$$\begin{aligned} 8639 < x < 8642, \\ 4093 < y < 4094{,}5. \end{aligned}$$

Ces résultats nous paraissent singuliers : si les deux dernières pesées avaient concordé avec les deux premières, c'est-à-dire, si l'on avait eu

$$x + y = 12738 + w,$$
$$x = y + 4540 + s,$$

il aurait fallu se contenter de dire que

$$x = 8639, \quad y = 4099,$$

avec une erreur maxima possible de ± 6. Mais *comme on a eu la chance d'avoir des observations discordantes*, on peut dire

$$x = 8640{,}5$$

avec une erreur maxima possible ± 1,5,

$$y = 4093{,}75$$

avec une erreur maxima possible ± 0,75 !

Selon nous, la méthode repose sur des postulats cachés : 1) La balance n'est pas identique à elle-même, quand elle est soumise à des poids 8639, 4099, 12729. 2) On ne connaît pas l'erreur sur les divers poids ; il faudrait les regarder comme des inconnues pour lesquelles on écrirait aussi des relations de la forme

$$X = 8639 + X',$$
$$Y = 4099 + Y', \text{ etc.}$$

X', Y' étant des erreurs constantes et non des erreurs accidentelles provenant de la pesée. Autrement dit, il n'est pas certain que l'on puisse écrire pour les poids l'égalité correspondant à l'égalité numérique

$$8639 + 4099 - 12729 = 9.$$

2. Selon nous, d'ailleurs, *on ne peut pas, de deux mesures discordantes, déduire une quantité avec une approximation supérieure à celle que l'on peut déduire de deux mesures à peu près concordantes*, comme le suppose M. Goedseels.

Soient deux observations

$$A - \delta < x < A + \delta,$$
$$A + a - \delta < x < A + a + \delta,$$

où l'on a supposé, *pour des raisons partiellement subjectives*, que l'erreur maxima possible est δ, en plus ou en moins, sur les deux mesures observées A; $A + a$, a étant supposé positif. On doit en conclure, non pas

$$A + a - \delta < x < A + \delta, \qquad (1)$$

mais plutôt

$$A - \delta < x < A + a + \delta,$$

parce que l'on n'est pas assez certain que δ n'est pas trop petit.

Si l'on admettait les inégalités (1), on pourrait poser

$$x = A + \frac{a}{2}$$

avec une erreur maxima possible $\delta - \frac{a}{2}$, d'autant moindre que a serait plus grand, c'est-à-dire que les observations seraient plus discordantes ; deux observations très discordantes fourniraient une valeure meilleure que cent observations très concordantes. Si a était égal à $2d$, on trouverait même la valeur absolument exacte $x = A + d$. En revanche, si a surpassait $2d$ d'une quantité si petite qu'elle fût, les inégalités (1) deviendraient absurdes, mais en modifiant un peu d, on pourrait transformer des observations mauvaises en observations très favorables !

La méthode des moindres carrés s'accorde mieux avec les données du bon sens ; elle donne la même importance à toutes les observations reconnues bien faites ; les observations qui s'écartent le plus des autres, diminuent la précision des résultats au lieu de l'augmenter, mais elles influent peu sur la valeur finale adoptée si elles sont peu nombreuses en comparaison des observations à peu près concordantes.

Cette communication donne lieu à une discussion à laquelle prennent part M. Goedseels et la plupart des autres membres présents.

M. Mansion fait la communication suivante : *Sur le baccara à propos d'une erreur et d'une lacune dans l'étude de Bertrand sur ce jeu.*

1. *Le jeu.* Au jeu de baccara « le ponte reçoit deux cartes, le banquier en prend deux. Le ponte a le droit de demander une carte qui s'adjoint aux deux premières, ou de s'y tenir en gardant son jeu. — Le banquier a les mêmes droits, mais il a l'avantage, avant de prendre sa décision, de savoir si l'adversaire a demandé une carte, de connaître celle qu'il a reçue. — Chaque carte vaut le nombre des points marqués sur elle. Les figures valent 10. Le gagnant est celui qui a le point le plus fort, les chiffres des dizaines ne comptant dans aucun cas : 11 vaut 1, 13 vaut 2, 23, si l'on a trois cartes, vaut 3. — Le jeu se termine immédiatement, si l'un des joueurs reçoit, quand on donne les cartes, l'un des points 8 ou 9. Il *abat* et gagne si l'adversaire n'a pas un point meilleur. Dans ce cas, il n'est pas donné de cartes nouvelles. » — Si les deux points sont égaux, le coup est nul.

2. *Manières de jouer les meilleures.* La théorie mathématique du jeu de baccara prouve que le ponte ne doit demander une troisième carte, s'il veut jouer le mieux possible, que si les deux premières cartes reçues par lui, lui donnent un point 0, 1, 2, 3, 4 ou 5. Toutefois un raisonnement incomplet, mais très séduisant, fait croire à beaucoup de pontes qu'il vaut mieux ne pas demander de troisième carte quand ils ont le point 5. Il en résulte qu'il y a des pontes qui tirent à 5, des pontes qui ne tirent pas à 5. Nous désignons la première manière de jouer par le symbole V, la seconde par W.

Que le ponte tire à 5 ou non, le banquier doit toujours prendre une troisième carte si son propre point est 0, 1 ou 2 ; il ne doit pas en prendre, si son point est 7. Mais quand il a un autre point, il peut jouer de deux manières légèrement différentes, que nous désignerons par A et B.

A. 1° Si le banquier a le point 3, il prend une troisième carte, sauf s'il a donné 8 au ponte.	B. 1° Idem, sauf s'il a donné 8 *ou* 9 au ponte.
2° Si le banquier a le point 4, il prend une troisième carte, sauf s'il a donné 8, 9 ou 0 au ponte.	2° Idem, sauf s'il a donné 8, 8, 0 *ou* 1 au ponte.

3° Si le banquier a le point 5, il prend une troisième carte, sauf s'il a donné 8, 9, 0, 1, 2 ou 3 au ponte.	3° Idem, sauf s'il a donné 8, 9, 0, 1, 2, 3 *ou* 4 au ponte.
4° Si le banquier a le point 6, il ne prend pas de troisième carte, sauf s'il a donné 6 ou 7 au ponte *ou si celui-ci n'a pas pris de troisième carte.*	4° Idem, sauf s'il a donné 6 ou 7 au ponte.

Si le ponte tire à 5 et si le banquier sait que telle est son habitude, ce banquier jouera le mieux en suivant les règles A. Si le banquier sait que le ponte ne tire pas à 5, le banquier jouera le mieux en suivant les règles B.

Mais si le banquier ne sait rien sur les habitudes du ponte, il doit jouer d'une troisième manière C, intermédiaire entre les règles A et B ; *C comprend les règles A1, B2, A3, B4.*

3. *Avantage du banquier dans les six cas possibles.* On peut désigner ces six cas par les symboles AV, AW, BV, BW, CV, CW. Voici, en pour cent, l'avantage du banquier, dans ces six cas :

AV . . .	1.367	moyenne 1,11,
AW . . .	0.857	
BV . . .	1.188	moyenne 1,36,
BW . . .	1.537	
CV . . .	1.228	moyenne 1,37.
CW . . .	1.512	

4. *Bertrand sur le sort du ponte qui a 5.* Bertrand s'est occupé du sort du ponte et du banquier quand le ponte a le point 5, dans les quatre cas AV, AW, BV, BW (Bertrand, *Calcul des probabilités*, n° 33, Prob. XIX, pp. 38-42). Si nous désignons par p, b, n la probabilité de gagner du ponte, celle du banquier et la probabilité des coups nuls, voici les résultats donnés par Bertrand :

	AV	AW	BV	BW
p	0,4444	0,4896	0,4471	0,4647
b	0,4347	0,4155	0,4264	0,4694
n	0,1209	0,0949	0,1265	0,0859

Nous avons refait plusieurs fois les calculs dans ces quatre cas, et nous les avons trouvés exacts, sauf dans le cas AV, où nous avons obtenu $p = 0,4391$, $b = 0,4319$, $n = 0,1290$.

Bertrand ajoute : « Si le banquier ignore ce que fait le ponte quand il a 5, doit-il tirer à 6 ? Quelle est, dans cette indécision, la chance du ponte qui a 5 ? *Il est impossible de la calculer* ». Il n'en est rien. Dans cette hypothèse, — et même dans toutes les hypothèses, puisque, en général, le ponte est libre de changer de système, — le banquier emploie la règle C. Voici, dans ce cas, quelles seront les valeurs de *p, b, n*.

	CV	CW
p	0,4423	0,4447
b	0,4299	0,4694
n	0,1278	0,0859.

Il est facile de voir pourquoi les résultats BW et CW sont identiques.

M. le V^te^ d'Adhémar présente quelques remarques à propos d'un Mémoire qu'il va publier dans le JOURNAL DE MATHÉMATIQUES et qu'il a résumé dans une Note des COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (mars 1909).

1° Soit l'équation

$$\frac{fipxp}{d^2z} = f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)$$

Si l'on cherche, par le calcul fonctionnel, une solution contenant deux courbes gauches sans point commun, le dit calcul fonctionnel reflète l'impossibilité du problème en nous renvoyant au point commun, s'il existe.

Ceci est lié à des *prolongements non analytiques* très intéressants.

2° Soit posé

$$S_x = e_1^x + e_2^x + e_3^x$$

$$\sum\nolimits_x = \epsilon_1^x + \epsilon_2^x + \epsilon_3^x$$

avec

$$e_1 + e_2 + e_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$e_1 \, e_2 \, e_3 = \epsilon_1 \, \epsilon_2 \, \epsilon_3$$

Peut-on avoir $S_x - \sum_x = 0$ pour des valeurs *entières* de x, autres que *un ?*

Cette question ne peut être abordée que par l'intégrale logarithmique de Cauchy, dans le plan de la *variable complexe.*

On peut aussi remplacer l'équation transcendante par une équation algébrique, ou enfin utiliser un beau théorème de Laguerre, qui limite le nombre des vérifications à effectuer.

M. Mansion met sous les yeux de la section un exemplaire de l'*Arithmétique* de Jean Trenchant (*) intitulé :

L'ARITHMETIQUE DE IEAN TRENCHANT, Departie en trois Liures. *Ensemble vn petit discours des Changes*, Auec l'art de calculer aux Getons. *Reueuë & augmentee en ceste derniere edition, de plusieurs regles & articles, par l'Autheur.* A. LYON, PAR IEAN DEGABIANO, & SAMUEL GIRARD, 1602. (**)

Le R. P. Bosmans S. J. fait quelques remarques sur cet ouvrage.

Cette édition n'est ni la seule, ni surtout la première. L'*Arithmétique* de Trenchant parut à Lyon dès 1558 et M. Eneström n'en cite pas moins de 16 rééditions. (***)

Le savant directeur de la BIBLIOTHECA MATHEMATICA a appuyé avec une certaine insistance sur l'existence de cette première édi-

---

(*) Jean Trenchant, ou Tranchant est peu connu. La *Nouvelle Biographie Générale* de Didot ne le nomme même pas. Il est évidemment Français ; mais je ne connais ni son lieu d'origine, ni sa date de naissance, ni celle de sa mort.

(**) In-8° de 375 pages. L'exemplaire présenté à la section avait été obligeamment prêté par M. le capitaine Schuermans auquel il appartient.

(***) BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3e sér., t. 2. Leipzig, 1901 pp. 356 et 357. Les exemplaires de *L'Arithmétique* de Jean Trenchant ne sont pas nombreux dans les bibliothèques publiques belges. Je puis cependant citer à l'Université de Gand l'édition qui parut à Paris en 1617, chez la veuve de Jean Regnoul. Elle a identiquement le même nombre de pages que l'édition de Lyon 1602, dont elle ne diffère que par des détails insignifiants.

tion de 1558 et l'a signalée à plusieurs reprises à des auteurs qui l'oubliaient (*).

Je ne l'ai jamais vue. Mais M. Eneström a raison, car pour en indiquer au moins un exemplaire, je citerai celui du Collège de la Sainte Trinité, à Dublin (**).

L'*Arithmétique* de Trenchant est une Arithmétique dans le sens le plus particulier du mot et sans aucun caractère algébrique ; elle ne traite, par exemple, ni les équations, ni même le calcul des radicaux. Le corps de l'ouvrage se divise en trois livres, suivis de « deux petits discours », c'est-à-dire deux appendices, l'un sur les « Changes », l'autre sur « l' Art de calculer aux getons ».

Le premier livre est consacré aux quatre opérations fondamentales sur les entiers et les fractions. Le livre II traite les problèmes de mélanges, d'alliages, de monnaies, de compagnie, etc. etc. ; en un mot, les questions analogues à celles qui, de nos jours encore, se résolvent dans les traités d'arithmétique élémentaire, par des règles de trois ou de fausse position.

Le livre III est plus original et plus important. Trenchant n'y a pas mis de titre, mais voici en quels termes il en donne l'objet, dans la « Préface » :

« Le troisième (livre), dit-il, enseigne ce qui est moins vulgaire, et toutesfois qu'on pourroit désirer d'avantage, tant pour le fêt de marchandise que pour l'intelligence et pratique des autres parties de Mathématique : comme l'extraction des racines, la doctrine des proportions, mediétés, et des progressions sur lesquelles avons trouvé et mis une invention pour continuer toutes les autres qui ne sont multiples : et conséquemment montré à soudre plusieurs questions, même certains contes des banquiers envers le Roy, et assez d'autres, autrement ou sans celà insolubles. » (***)

(*) BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3e sér., t. 2, 1901, p. 356 ; t. 4, 1904, p. 215 ; t. 5, 1905, p. 403.

(**) D'après le *Catalogus librorum impressorum qui in Bibliotheca Collegii Sacrosanctae et individuae Trinitatis Reginae Elizabethae, juxta Dublin adservantur*. T. 8, Dublinii. E typographeo Academico, 1885, p. 166. — Il y est renseigné en ces termes : Trenchant (Jan). — L'arithmetique departie en troys livres ; ensemble vn petit discours des changes ; avec l'art de calculer aux getons. Lyon 1558, in-8°.

(***) Pp. 9 et 10. Je n'ai pas osé changer l'orthographe de Trenchant ; à entrer

L'invention dont se réclame ici Trenchant, mérite en effet d'être remarquée, ce sont ses tables d'intérêt, les premières qui furent publiées (*). Elles ont à bon droit empêché *L'Arithmétique* de Trenchant de tomber tout à fait dans l'oubli (**).

Il est peut-être à propos de rappeler ici ce qu'en disait le grand promoteur des tables d'intérêt, Simon Stevin. Je traduis la préface de l'édition originale de ses *Tafelen van Interest* (***), car le passage a été omis dans l'édition classique des *Œuvres* de Stevin, publiée par Albert Girard (****). Voici donc comment il s'exprime :

« Je ne donne pas ces tables, dit-il, pour une invention personnelle ; je me suis contenté de développer celles qui existaient. Jean Trenchant a écrit avant moi sur le même sujet au livre 3, chapitre 9, article 14 de son Arithmétique. Cet auteur y donne, pour 41 échéances successives, une table de ce genre, au taux de 4 pour cent en trois mois. Ces tables sont, il est vrai, d'un usage moins général que les miennes telles que je les donne ici. Elles

---

dans cette voie, on ne sait où s'arrêter ; mais pour la facilité du lecteur j'ai cru pouvoir, sans inconvénient, régulariser son accentuation, sa ponctuation et les lettres redoublées. J'écris aussi, *i, j ; u* et *v* suivant les habitudes modernes.

(*) J'emploie à dessein le mot « publiées » ; car dans les Pays-Bas, par exemple, les banques et les maisons de commerce en possédaient de manuscrites. Mais les propriétaires les regardaient comme de précieux secrets de métier qu'ils conservaient par devers eux avec un soin jaloux.

(**) C'est à ce point de vue, par exemple, que Cantor nomme *L'Arithmétique* de Trenchant, dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* 2^e éd., t. 2, Leipzig, 1900, pp. 611 et 612. Il fait aussi remarquer son calcul par les jetons.

(***) *Tafelen van Interest, Midtsgaders De Constructie der seluer, ghecalculeert Door Simon Steuin Brugghelinck.* T'Antwerpen, By Christoffel Plantyn inden gulden Passer. M. D. LXXXII. J'en connais, dans les bibliothèques belges trois exemplaires : Bibliothèque Royale de Belgique ; Université de Gand ; Musée Moretus-Plantin, à Anvers. Elles ont été minutieusement décrites dans la *Bibliotheca Belgica* par le Bibliothécaire en chef et les Conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand, Gand 1880-1890, 1^e sér. t. 23, S. 124. De Reiffenberg leur a consacré un article intéressant dans l'ANNUAIRE DE LA BIBLIOTHEQUE ROYALE DE BELGIQUE (3^e année, Bruxelles, 1842, pp. 335-337), intitulé : *Édition de Simon Stevin négligée par les bibliographes.* (Pour plus de renseignements, voir : *Bibliotheca Belgica* par le bibliothécaire en chef et les conservateurs de la bibliothèque de l'Université de Gand, 1^e sér. t. XXIII, Gand, 1880-1890, 5 S. 124.)

(****) A. Leyde, Chez Bonaventure et Abraham Elzevier, 1634.

furent dressées uniquement pour pouvoir juger le gain des banquiers dans les deux emprunts qu'ils proposèrent au roi Henri de France en l'an 1555. »

Ce problème de Trenchant est assez curieux (*) :

« En l'an 1555, dit-il, le Roy Henry pour ses affères de guerre, prenoit argent des banquiers, à raison de 4 pour 100 par foyre : c'est meilleure condition pour eux, que 16 pour 100 par an (**). En ce même an, avant la foyre de la Toussaincts, il reçeut aussi par les mains de certeins banquiers la somme de 3 954 641 écuz et plus, qu'ils appeloyent le grand parti : en condition qu'il payeroit à raison de 5 pour 100 par foyre, jusques à 41 foyre ou payement, qu'il demoureroit quitte de tout. Assavoir laquelle de ces conditions est meilleure pour les banquiers ?

« La première à 4 pour 100 par foyre est évidente, c'est-à-dire, l'on voit son proffit évidemment. Mais la dernière est difficile, de sorte que les inventeurs d'icelle ne l'ont trouvée qu'à tâtons et à peu près avec un labeur inestimable. Or veux je montrer à fère telles calculations legièrement et précisément, avec raison démonstrative facile à entendre en cette sorte : »

Vient ici la solution du problème. Le procédé de Trenchant consiste à construire une table d'intérêt, le résultat s'obtient ensuite par de simples règles de trois. Tout ceci est expliqué, par l'auteur, fort en détail, mais ses développements n'offrent rien de bien particulier ; je ne m'y arrête pas.

Dans ses *Tafelen van Interest*, Stevin revient à l'*Arithmétique* de Trenchant à propos de la discussion d'un problème. Je traduis de nouveau l'édition originale, le passage ayant été encore une fois omis dans les *Œuvres* de l'auteur éditées par Girard.

« Parmi tous ceux, dit Stevin (***), qui ont écrit dans leurs Arithmétiques sur la règle d'intérêt, je n'ai eu sous la main personne qui aît traité le sujet avec plus de subtilité que Jean Trenchant. Chez bien des gens son Arithmétique est loin de jouir d'une mince considération, car il en a paru une troisième édition. J'y ai trouvé une erreur au sujet d'un problème d'intérêt ; erreur d'autant plus

---

(*) P. 307.

(**) Il y avait, on le sait, quatre foires par an.

(***) P. 62.

dommageable que l'autorité de cette Arithmétique est plus grande. On ne trouvera donc sans doute pas mauvais de me voir saisir ici l'occasion de la corriger. Elle se trouve au livre 2, chapitre 9, article 10. »

Il serait oiseux de transcrire ici l'énoncé du problème indiqué. Il n'y a pas lieu de décider entre Stevin et Trenchant. En lui-même le problème est banal et des plus élémentaires et le litige porte sur un sujet de pure convention.

Dans les problèmes d'intérêt et d'escompte composés, comment faut-il compter l'intérêt ou l'escompte des mois et des jours complémentaires ?

A intérêt composé, dit Trenchant.

A intérêt simple, soutient Stevin, et il cherche à le démontrer. Ses arguments, cela va sans dire, n'ont aucun caractère mathématique. Mais encore une fois à ce dernier point de vue, le seul à considérer ici, Trenchant et Stevin ont tous les deux raison ; tout consiste à définir avec précision le sens du problème.

Stevin cite encore Trenchant à une troisième reprise (*), mais si je le relève ici, c'est dans le seul but de pouvoir dire une fois de plus que le passage est supprimé dans l'édition des *Œuvres* de Stevin par Girard.

A ce propos, on me pardonnera, je l'espère, une très courte digression.

Avec son grand sens d'historien M. Maurice Cantor a signalé le danger d'étudier Stevin dans l'édition de Girard, sans recourir aux éditions originales (**). Une pratique déjà longue de ces dernières me permet de l'affirmer, Girard n'ajoute rien à Stevin sans le dire ; avec un peu d'habitude on ne saurait s'y tromper. Il ne change pas non plus de texte. Mais Girard n'est qu'un mathématicien. Certains renseignements historiques ou bibliographiques très curieux lui paraissent, à lui, dénués de toute importance. Il fait alors des coupures.

C'est pour aujourd'hui tout ce que je voulais remarquer sur ce sujet, car il mériterait une étude approfondie.

(*) P. 23. Il s'agit du problème donné par Trenchant au liv. 3, ch. 9, art. 6, p. 301.

(**) *Vorlesungen*, 2ᵉ éd., t. 2, p. 573.

Outre les tables d'intérêt, un autre chapitre du livre III de l'*Arithmétique* de Trenchant mérite un instant d'attention ; c'est le chapitre 4 intitulé : « Doctrine générale pour extrère toutes racines ».

Trenchant, dans les chapitres précédents, vient d'expliquer l'extraction de la racine carrée et de la racine cubique. « Il me sembloit, dit-il alors (*), assez avoir montré l'art d'extrère les racines quarrée et cubique, car les autres ne viennent comme rien en usage. Toute fois pour satisfère aux studieux, j'ay voulu icy mettre une règle générale pour les extrère toutes. Pour fondement de laquelle, j'ay formé ce trigône semé de nombres, s'imbolisans *(sic)* et s'engendrans les uns les autres par un ordre de grandissime considération. »

2
3 . 3
4 . 6 . 4
5 . 10 . 10 . 5
6 . 15 . 20 . 15 . 6
7 . 21 . 35 . 35 . 21 . 7
8 . 28 . 56 ; 70 . 56 . 28 . 8
9 . 36 . 84 . 126 . 126 . 84 . 36 . 9
10 . 45 . 120 . 210 . 252 . 210 . 120 . 45 . 10

En se reportant à ma *Note sur l'histoire du Triangle Arithmétique des coefficients du binôme* de Stifel à Pascal, publiée dans le tome XXXI des ANNALES (**) on voit que le Triangle de Trenchant n'est qu'une légère modification de celui de Tartaglia.

« Ces nombres pour la pratique, ajoute Trenchant (***), sont plus au naturel couchez sous la forme de cet autre triangle : »

(*) P. 249.
(**) 1re partie, pp. 65-72.
(***) P. 250.

								10
							9	45
						8	36	120
					7	28	84	210
				6	21	56	126	252
			5	15	35	70	126	210
		4	10	20	35	56	84	120
	3	6	10	15	21	28	36	45
2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}

Cette dernière disposition est personnelle à l'auteur. C'est le Triangle de Stifel auquel on aurait imprimé une rotation de 90 degrés, tout en maintenant les barres de séparation verticales. Elle est, pourrait-on dire, à peu près au Triangle de Stifel, ce que le Triangle de Pascal est à celui de Tartaglia. Mais dans cette dernière comparaison la rotation du Triangle de Tartaglia a été de 45 degrés seulement.

Les puissances de l'inconnue imprimées au bas des colonnes sont écrites, dans l'original, en signes cossiques de Stifel. Pour éviter des embarras d'imprimerie, j'emploie la notation moderne x^2, x^3, x^4... etc.

Comme application du Triangle, Trenchant expose l'extraction de la racine 5e (*). Le nombre sur lequel il opère est 2059 62976 dont la racine est 46. Ses explications sont fort claires. Quant aux calculs, ils se disposent, d'après lui, le plus avantageusement comme ci-dessous. C'est une imitation fidèle de sa disposition des calculs de l'extraction de la racine cubique (**). Pour en faciliter la lecture, à l'exemple de Treutlein (***), j'y joins la signification en notations modernes.

(*) Pp. 250-253.

(**) Pp. 238-241. Je l'omets ici pour abréger. Trenchant y donne les deux dispositions de calculs employées dans son extraction de la racine cinquième.

(***) *Das Rechnen im 16. Jahrhundert.* ABHANDL. ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK, Leipzig, Teubner, 1877, pp. 71-75. Il est intéressant d'y comparer le procédé de Trenchant à ceux de ses contemporains. Treutlein donne, au

Le premier tableau a quatre colonnes verticales.

La 1^{re} renferme la puissance des dizaines des termes successifs du développement du binôme. La 2^e contient en regard le coefficient respectif de chaque terme ; la 3^e, là puissance des unités ; la 4^e enfin le produit des trois nombres précédents.

Les chiffres imprimés ici en italique sont, suivant un usage courant au XVI^e siècle, barrés par un trait dans l'original. Tout le reste se comprend aisément sans explications ultérieures.

Extraction de la racine cinquième (*)

$$\begin{array}{rrrrl}
2560000 & 5 & 6 & 76800000 = & 5d^4u \\
64000 & 10 & 36 & 23040000 = & 10d^3u^2 \\
1600 & 10 & 216 & 3456000 = & 10d^2u^3 \\
40 & 5 & 1296 & 259200 = & 5du^4 \\
 & & 7776 & 7776 = & u^5 \\
\cline{4-5}
 & & & 103562976 = & 5d^4u + 10d^3u^2 + 10^2d^2u^3 + 5du^4 + u^5
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
2059 & 62976 & (\text{R. }46 \\
1024 & \ldots\ldots & = d^5 \\
\hline
1035 & 62976 & \\
\mathit{128} & \mathit{00000} & = 5d^4 \\
1035 & 62976 & \\
\hline
\ldots. & \ldots.0 &
\end{array}$$

« Les nulles (**) qui se mettent après la racine 4 et ses produiz.

---

passage indiqué, les méthodes d'Etienne De La Roche, Chr. Rudolff, Apian, Cardan, Gemma Frisius, Stifel, Ramus, Menher et Stevin. Depuis lors j'ai fait connaître celles de Gosselin (*Le De Arte Magna De Guillaume Gosselin*. BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3^e sér., t. 7, Leipzig, 1906-1907, p. 49), Nicolas Petri (*La « Practicqve om te leeren cypheren » de Nicolas Petri de Deventer*. ANN. DE LA SOC. SCIENT., t. XXXII, 2 part., p. 284) et Adrien Romain (*Le fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Mahumed ben Musa el-Chowârezmi*, ANN. DE LA SOC. SCIENT., t. XXX, 2^e part., p. 284).

(*) P. 252.

(**) Les « Nulles » sont les zéros ; « La racine 4 » signifie la 4^e puissance d^4 des dizaines. Ceci posé, l'équivalence des deux dispositions des calculs saute aux yeux.

ajoute Trenchant (*), se peuvent mettre après les nombres tirez du triangle, sçavoir est, un après l'inférieur nombre, puys deux, puys troys, et ainsi par ordre après les autres nombres en montant comme à ce triangle cy après : car prenez les nombres servans à chaque espèce de racine que vous voudrez, vous avez aussi les nulles à dextre qui se rapportent à chaque figure : comme aussi cette formule (qui est une autre disposition du précédent article) le montre : »

256	5	0000	6
64	10	000	36
16	10	00	216
	5	0	1296
			7776

						8	0000000
					7	28	000000
				6	21	56	00000
			5	15	35	70	0000
		4	10	20	35	56	000
	3	6	10	15	21	28	00
2	3	4	5	6	7	8	0
x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	

Seconde section

Mardi 20 avril 1909. — La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président : R. P. Wulf, S. J.
Vice-présidents : M. Van de Vyver.
M. J. Delemer.
Secrétaire : R. P. Lucas, S. J.

(*) Pp. 252 et 253. Dans l'original les puissances des inconnues placées au bas des colonnes du tableau sont naturellement exprimées en signes cossiques de Stifel.

M. Delemer fait une communication sur *la correspondance des champs visuels des deux yeux dans la vision bi-oculaire.* On la trouvera *in extenso* dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 juillet 1909 ; en voici un résumé.

On sait qu'une ligne droite tracée sur un mur blanc et regardée *en face avec un seul œil,* ne paraît exactement verticale à l'œil droit que si elle penche légèrement à droite ; et à l'œil gauche, que si elle penche légèrement à gauche. — C'est du moins le fait des yeux emmétropes normaux (Meissner).

L'angle des deux lignes qui paraissent verticales à chacun des deux yeux est intéressant à connaître pour les études d'optique physiologique. Le but de cette note est d'indiquer une méthode très simple permettant aisément *aux personnes non initiées aux expériences de l'optique physiologique*, de déterminer l'angle des deux lignes *paraissant verticales à l'un et à l'autre de leurs yeux.*

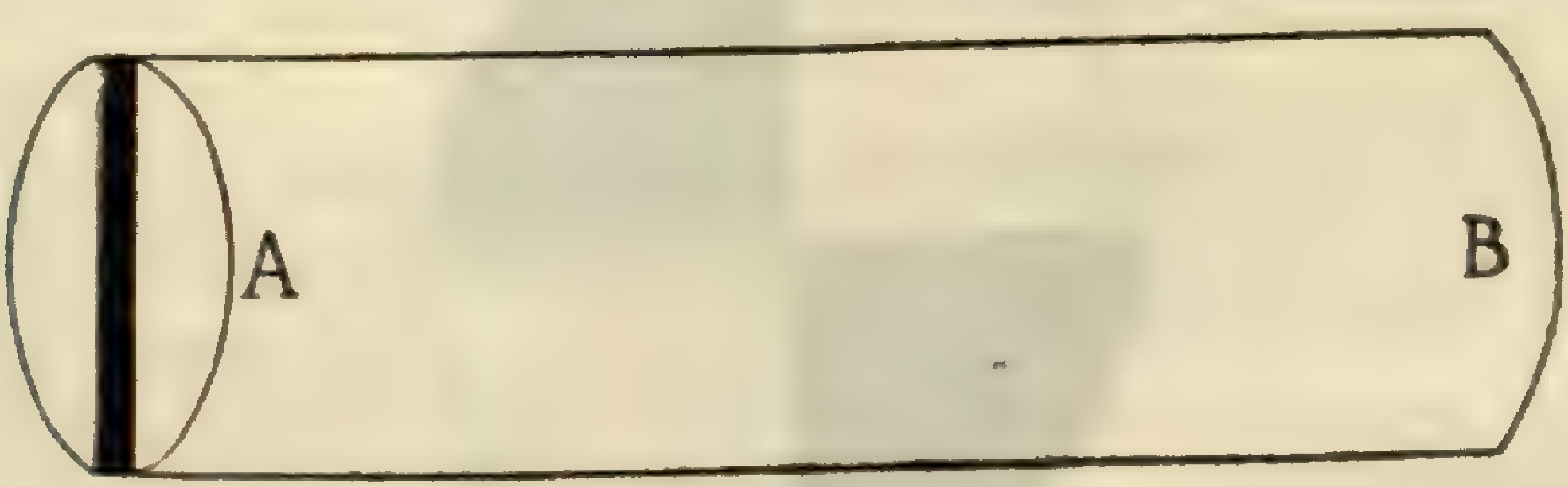


Fig. 1.

Cette méthode sert aussi à mesurer l'angle beaucoup plus petit que font entre elles les droites paraissant horizontales à l'œil droit et à l'œil gauche ; à cause de cela, elle nous semble avoir quelqu'intérêt, au point de vue de l'étude de la correspondance des deux champs visuels dans la vision bi-oculaire.

Expériences pour déterminer l'angle des deux droites paraissant verticales. — Soit un cylindre AB (fig. 1) ouvert à ses deux extrémités, ayant environ 1 mètre de longueur et 15 centimètres de diamètre ; il doit avoir son axe horizontal. L'observateur ayant les yeux à *l'extrémité B* du cylindre, regarde les objets à travers ce cylindre et dans la direction de son axe.

Première expérience. — La figure à regarder se compose de deux bandes de teinte foncée sur fond clair. L'une des bandes est rigoureusement verticale, l'autre l'est à peu près, mais on peut faire varier un peu sa direction à volonté. Les bords intérieurs des bandes sont distants de 4 à 5 centimètres l'un de l'autre.

A *l'extrémité A* du cylindre se trouve un écran en forme de barre placé verticalement.

Cet écran doit cacher exactement la bande de droite à l'œil gauche, et la bande de gauche à l'œil droit de l'observateur.

Dans ces conditions, si l'observateur apprécie le parallélisme des bandes, celles-ci ne lui paraîtront généralement parallèles que si elles divergent vers le haut. L'angle de divergence mesuré en réalisant nous-même l'expérience fut trouvé de 1°. Par ailleurs notre vue est normale relativement à la réfraction.

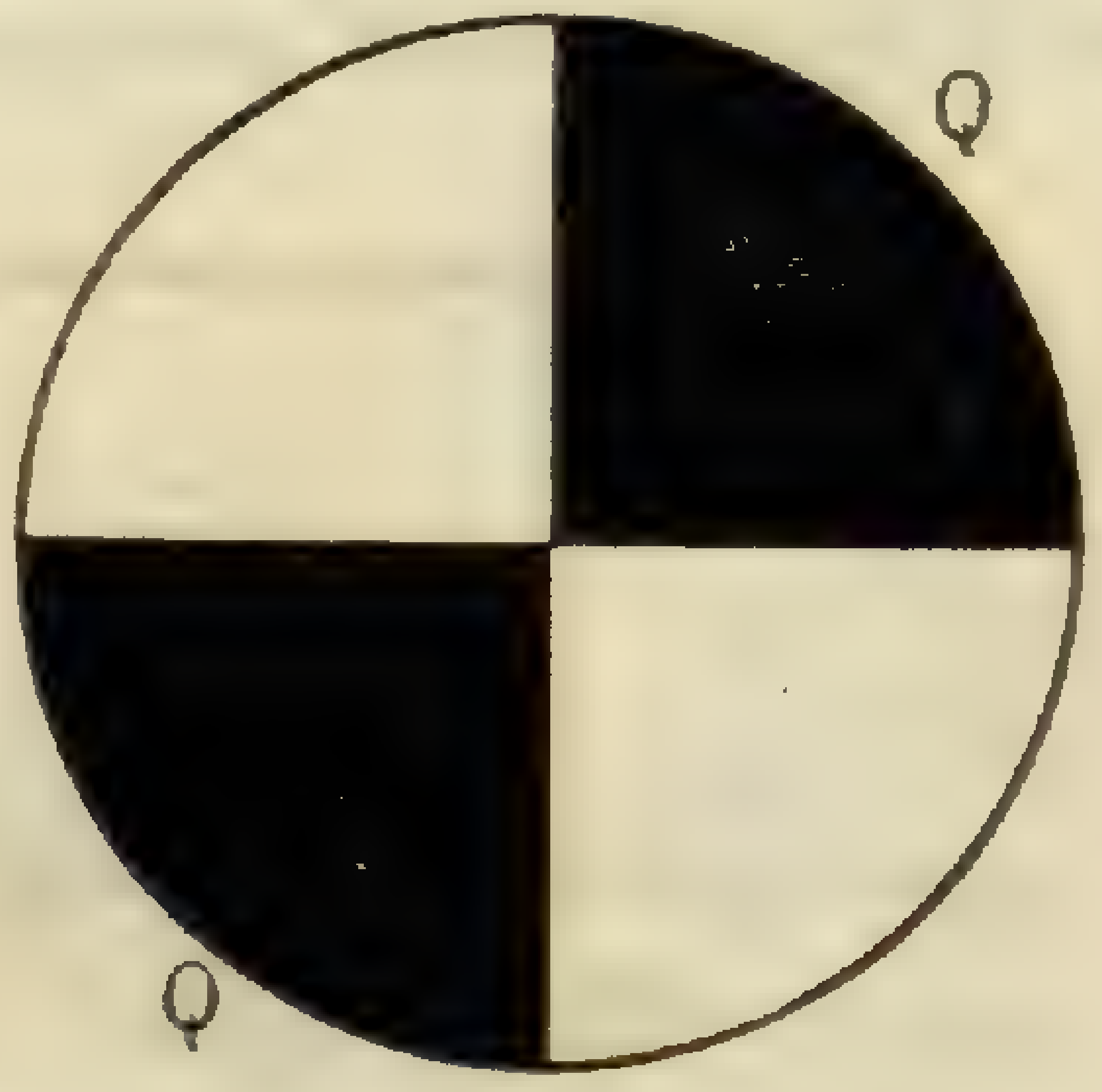


Fig. 2.

Deuxième expérience. — On remplace les deux bandes parallèles par : 1° une bande fixe verticale ayant son extrémité inférieure à la hauteur des yeux ; 2° une bande mobile de même largeur que l'autre, tournant comme une aiguille autour de son extrémité supérieure confondue avec l'inférieure de la bande fixe. Ces deux bandes formeront en général une ligne brisée, mais pourront être mises en ligne droite.

L'écran en forme de barre à l'extrémité A du cylindre est remplacé par un écran en *forme de deux quadrants* (fig. 2). On place cet écran de façon à cacher la bande supérieure à l'un des yeux de l'observateur et la bande inférieure à l'autre.

Quand les bandes paraissent en ligne droite, elles forment en réalité une ligne brisée. La bande vue par l'œil droit s'incline plus à droite que l'autre. L'angle des deux bandes est pour nous de 1°. C'est la même valeur que nous a donnée l'expérience précédente.

Expérience relative à l'angle des droites paraissant horizontales. — En plaçant horizontale la bande fixe que nous venons de décrire, l'autre formera une ligne brisée avec la première et cette ligne brisée pourra être exceptionnellement une droite horizontale.

On met au cylindre le système d'écrans nécessaire, de façon à ne voir la bande qui est à droite qu'avec l'œil droit ; l'autre, qu'avec l'œil gauche.

Or, quand les bandes paraissent en ligne droite, elles font en réalité une ligne brisée. L'extrémité libre de la bande mobile est toujours plus abaissée que l'autre. L'angle est beaucoup plus faible que 1°.

Les lignes verticales et horizontales apparentes précédemment étudiées sont-elles correspondantes dans les champs visuels des deux yeux ?

D'après le traité d'optique physiologique de Helmholtz, les lignes verticales apparentes sont, dans les deux champs visuels, correspondantes point par point ; de même les lignes horizontales apparentes.

D'ailleurs, Helmholtz indique pour la moyenne des sujets emmétropes, l'angle de 2° 25′ entre leurs lignes verticales apparentes. Cette valeur est beaucoup plus forte que celle que nous avons mesurée sur nous-même, 1° environ. Persuadé que l'écart ne tient pas à une particularité qui nous serait personnelle, nous nous sommes proposé d'examiner de plus près cette anomalie.

Autre expérience. — On peut modifier la première expérience citée plus haut, des deux bandes à mettre parallèles. On remplace l'une des bandes par une autre de teinte tranchant avec celle de la seconde bande. Puis on fait un effort de divergence des yeux, ou l'on place un prisme très léger devant l'un des yeux, de manière à voir les bandes se rapprocher.

Les bords internes de ces bandes pourront ainsi venir se confondre ou au moins se croiser, dans le champ visuel bi-oculaire.

On facilitera beaucoup l'expérience en plaçant devant les deux bords internes, juste à hauteur des yeux, mais très près des bandes deux petites figures identiques, par exemple deux losanges coupés dans du papier noir ; il faut placer ces deux losanges bien parallèlement. On cherchera ensuite, en regardant dans l'appareil, à voir confondus en un losange unique, les deux losanges vus par chacun des deux yeux.

L'expérience une fois réalisée, et le losange unique apparaissant au centre du champ visuel commun, on distinguera les bords des deux bandes de couleurs différentes ; et s'ils sont croisés, on cherchera à les mettre parallèles ou confondus. On constate ainsi aisément que quand les bords des bandes paraissent parallèles ou confondus, ils font en réalité un angle de 2° 30′ environ.

Nous faisions l'expérience en ayant les yeux à 1,75 m. des bandes.

Des essais avec cartons stéréoscopiques très faciles à réaliser nous ont donné des résultats identiques et nous ont permis d'étudier très simplement aussi l'angle des droites horizontales qui se correspondent dans les deux champs visuels.

Conclusion. — Il résulte de cet exposé que les droites qui se correspondent verticalement dans les deux champs visuels, sont celles dont nous venons d'indiquer la manière de déterminer l'orientation. Ce sont les droites *vues coïncidantes* suivant la verticale lorsque l'on fait se superposer les deux champs visuels sans les laisser se confondre, comme dans la vision ordinaire. Même remarque pour les droites horizontales correspondantes.

Les lignes droites paraissant verticales à l'examen par un seul des deux yeux ne nous semblent pas, contrairement à ce que Helmholtz indique, devoir être considérées comme correspondantes dans les deux champs visuels.

Cependant, pour que notre conclusion soit générale, il faudrait la vérifier sur un grand nombre de personnes. C'est ce que nous nous proposons de faire avec l'appareil très simple décrit cidessus.

M. le chanoine De Muynck expose ses recherches sur *l'ionisation dans la flamme d'éther*.

Les auteurs (*) qui traitent de l'ionisation dans les flammes,

---

(*) J. Stark, *Die Elektrizität in Gasen*, p. 464 (dans A. Winkelmann. *Handbuch der Physik*, 2e Aufl. IV. *Elektrizität und Magnetismus*, Leipzig 1905). J.-J. Thomson, *Conduction of electricity through gases*, 2e éd. Cambridge, 1906, p. 229.

sont d'accord pour considérer cette propriété comme la conséquence de la température élevée produite par la combustion.

Il ne paraît pas impossible que d'autres causes interviennent : ainsi le rayonnement lumineux et la réaction chimique elle-même pourraient exercer une influence. Mais l'expérience prouve que cet effet est, en tout cas, minime comparé à celui de la chaleur.

J.-J. Thomson notamment a constaté (*) que H et Cl ne conduisent pas le courant, même lorsqu'ils se combinent sous l'action de la lumière ultra-violette. Il en conclut que l'action chimique seule est insuffisante à provoquer l'ionisation. D'ailleurs (**) on a observé que les gaz et les vapeurs présentent dans la flamme sensiblement la même conductibilité que lorsqu'on les porte, par un autre procédé, à la même température.

Cela étant, on sait d'autre part que la température est très variable d'une combustion à l'autre, et on peut dès lors se demander s'il n'existe pas de flammes assez froides pour n'être pas notablement ionisées.

Effectivement J.-J. Thomson mentionne (***) que les flammes à température très basse, comme la flamme pâle de l'éther, ne produisent pas de gaz ionisés. Il ne cite pas les expériences sur lesquelles cette affirmation est basée, et il m'a été impossible de les retrouver. Certains auteurs affirment la conductibilité de la flamme ordinaire d'éther. Ainsi Ermann (****), après avoir montré qu'une flamme conduit l'électricité, ajoute que « les flammes de naphte, d'huile et d'éther se comportent de même ». Becquerel trouve (*****) que tout autour de la flamme de l'hydrogène, une couche gazeuse de dix millimètres d'épaisseur est électrisée positivement, et qu'il en est de même de flammes diverses : alcool, éther, huiles, etc.

Ces affirmations ne sont pas nécessairement contradictoires, car on sait (******) qu'une même flamme, d'après les conditions dans lesquelles elle est produite, peut être à des températures très

---

(*) Proc. Camb. Phil. Soc. xi, p. 90, 1901.

(**) J. Stark, *l. c.*

(***) J.-J. Thomson, *l. c.*

(****) Gilb. Ann. 11, p. 150, 1802.

(*****) Pogg. Ann. 11, p. 427, 1827.

(******) Cfr. p. e. A. de Hemptinne, Zeitschr. f. physik. Chem. xii, p. 256, 1893.

diverses, et il peut s'agir dans les deux cas de flammes froides d'une part, de flammes chaudes de l'autre.

Quoi qu'il en soit, la même question se pose relativement aux explosions d'éther. Il paraît bien que dans ce cas la température n'est pas exactement connue, et il ne semble pas dépourvu d'intérêt de rechercher si l'ionisation s'y produit ; dans l'affirmative, si la cause en réside dans l'élévation de température, et si la conductibilité ainsi manifestée est analogue à celle qui s'observe dans les explosions des gaz.

Quelques expériences ont été faites dans ce but sur un mélange de vapeurs d'éther et d'oxygène ou d'air, enflammé par une étincelle électrique.

Le dispositif était fort simple, et le même qui fut employé pour les gaz. Deux lames métalliques de 0,8 cm. de largeur sur 5,2 cm. de longueur, isolées à l'ébonite, étaient juxtaposées parallèlement l'une à l'autre, et à un centimètre environ de distance, à l'intérieur d'un large tube en plomb, où se trouvait le mélange explosif. Ces deux lames étaient dans un circuit comprenant deux accumulateurs et un galvanomètre très sensible. Au moment de l'explosion la flamme, formant un pont entre les lames, ferme le circuit. Si donc elle est ionisée, une déviation instantanée doit être observée dans le galvanomètre.

Les premières expériences furent faites avec un mélange d'oxygène et de vapeur d'éther, à la pression atmosphérique.

Il se produisait une explosion considérable, et le bouchon du tube était violemment projeté. Le galvanomètre accusait un écart instantané. La déviation, considérable dans une première expérience, où elle atteignit 40 cm., fut encore nettement constatée la seconde fois, mais ne put être lue avec précision à cause de la rapidité avec laquelle elle se produisit. Elle sembla être cependant notablement moindre que la première et ne parut guère dépasser deux ou trois centimètres.

Pour essayer la conductibilité de la flamme non explosive, on versa dans le fond du tube en plomb, quelques gouttes d'éther, et on les enflamma. On put ainsi voir que, brûlant à l'air entre les mêmes électrodes et dans le même circuit, la flamme ne produisit pas la moindre déviation.

Une seconde série de mesures fut entreprise avec le même mélange d'oxygène et de vapeur d'éther, mais à une pression inférieure à la pression atmosphérique.

Dans ce cas, lorsque l'étincelle éclate, on ne voit pas la flamme explosive se propager vers le tube. On obtient cependant une déviation du galvanomètre, instantanée, très nette, quoique faible : elle fut successivement de

0,6 cm.
0,6 »
0,3 »

En répétant l'expérience dans les mêmes conditions, sauf à ne pas remplir le tube de mélange explosif, on nota que le galvanomètre se maintint parfaitement immobile.

Ayant augmenté quelque peu la pression, on obtint, comme les premières fois, une explosion violente, qui fit sauter le bouchon du tube, et produisit une déviation de 35 centimètres

Un mélange d'air et d'éther, à pression réduite, fit ensuite l'objet d'une dernière série de mesures.

Ici encore la flamme fut imperceptible, même en opérant dans une obscurité presque parfaite. Le galvanomètre dévia instantanément à chaque expérience, mais les écarts furent très variables. On obtint successivement, en centimètres :

50
5
2
18
7
25
30
25
30

A vide, sans vapeur d'éther, il n'y avait pas de déviation.

Ces valeurs sont supérieures aux précédentes. En outre, dans le mélange éther et oxygène les déviations étaient toutes dans le sens qu'aurait eu un courant provenant des deux accumulateurs : ici quelques-unes sont dirigées en sens contraire. Même, dans une des expériences, on observa un écart initial de 1 centimètre dans un sens, puis brusquement une déviation considérable en sens contraire.

Il se superpose ici manifestement deux effets différents. Le même phénomène fut observé dans les explosions d'un mélange d'oxyde de carbone et d'oxygène (*), pour les mêmes métaux, cuivre et aluminium, qui servaient ici aussi d'électrodes, et fut attribué à une action propre de ces électrodes.

Comme conclusion de ces expériences, il semble bien qu'on peut affirmer que la flamme explosive d'éther est ionisée.

Quant aux caractères que présente cette ionisation, on vient de noter, au moins pour les mélanges avec l'air, un phénomène analogue à la différence de potentiel présentée par les métaux dans l'explosion des gaz. De même on peut admettre que les variations du courant avec la composition du mélange, avec la force électromotrice, etc. s'y retrouveraient, mais on a jugé inutile de le rechercher systématiquement.

De l'ionisation ainsi constatée peut-on tirer une conséquence relativement à la température de la flamme explosive, et affirmer que celle-ci doit être élevée ? A notre avis, cette conclusion n'est pas absolument nécessaire, car on pourrait admettre à priori — et une des expériences mentionnées plus haut semble plutôt favorable à cette hypothèse — qu'à défaut d'une température élevée, l'explosion seule, par un effet purement mécanique, serait capable de provoquer l'ionisation.

Enfin une dernière circonstance mérite d'être relevée : toutes les fois que, par suite d'une explosion plus forte, le bouchon est projeté du tube, la conductibilité atteint des valeurs très considérables. Le même fait fut observé dans les gaz. M. de Hemptinne a montré (**) que ce phénomène est dû à la rentrée de l'air, et pense qu'il est en connexion avec une condensation plus facile de l'eau produite par la combustion.

M. le chanoine De Muynck étudie ensuite le *Potentiel entre électrodes enveloppées.*

Plusieurs physiciens ont étudié le phénomène de la décharge disruptive entre conducteurs électrisés.

(*) ANN. SOC. SCIENTIF., t. XXXII, avril 1908.

(**) BULL. AC. ROY. BELG., p. 610, 1901.

Ils ont pu constater ainsi que la nature du métal servant d'électrode n'exerce pas d'influence sur le potentiel de décharge, si l'on excepte toutefois le magnésium et l'aluminium, pour lesquels certains doutes subsistent (*).

Mais tout en ne manifestant pas d'action spécifique, variable avec sa nature, l'électrode pourrait, semble-t-il, agir comme simple conducteur, par des influences communes à tous les métaux, qui se produiraient par exemple dans la couche de contact entre l'air et l'électrode. Partant de là, on peut se demander ce que deviendrait le mécanisme de la décharge s'il était possible de supprimer, par un moyen ou l'autre, cette couche de passage.

Or on peut réaliser cela en choisissant comme électrode un ballon en verre, contenant un liquide conducteur, celui-ci étant relié par un fil métallique aux deux pôles d'une source d'électricité.

On ne se place pas de cette façon dans le cas des électrodes « enveloppées » de Holtz (**), qui entourait de soie les pointes ou boules entre lesquelles jaillissait la décharge. Si d'ailleurs on choisit des ballons à parois suffisamment épaisses, on évite de provoquer la décharge sous forme d'étincelle ou d'effluve à travers la masse du verre.

Le dispositif suggéré se rapproche plutôt des expériences bien connues de Bouty (***) qui a étudié la cohésion diélectrique de telle façon que les électrodes métalliques entre lesquelles se produit la différence de potentiel, jouent un rôle entièrement passif. A cet effet un ballon plat, rempli du gaz qu'on se propose d'examiner, vient s'insérer, sans les toucher, entre les plateaux d'un condensateur. On constate, dans ces conditions, que tant que le champ n'a pas atteint une certaine valeur critique, qui dépend de la pression du gaz enfermé dans le ballon, celui-ci se comporte comme un diélectrique parfait. Si le champ critique est dépassé, il joue le rôle d'un conducteur, et s'illumine plus ou moins brillamment, l'air extérieur restant d'ailleurs parfaitement obscur. Cette expérience indique que, sous l'action d'un champ électrique

---

(*) J.-J. Thomson. *Conduction of Electricity through Gases*, 2d Ed. Cambridge, 1906, p. 437.

(**) Holtz. Wied. Ann. *11*, 1880, p. 513.

(***) Bouty. Journ. de Phys. 3e série *9*, 1900, p. 10.

suffisamment puissant, le gaz se déchire, comme un carton ou une lame de verre se perce, mais « en vertu de son homogénéité plus » grande, le gaz cède à la fois en un très grand nombre de points » de sa masse, et il s'illumine, non sur un trajet précis et relative- » ment étroit, comme cela a lieu à la pression ordinaire, entre des » électrodes métalliques, mais sur un trajet diffus, qui paraît » envelopper toute la masse. Au fond, il ne semble y avoir aucune » différence essentielle entre la décharge qui éclate dans l'inter- » valle de deux électrodes métalliques, et le phénomène de » l'illumination des tubes sans électrodes. » De même, dirons-nous, il ne semble y avoir en principe aucune différence essentielle entre l'étincelle qui éclate entre deux sphères métalliques juxtaposées dans l'air atmosphérique et la décharge qui passera entre deux ballons sphériques en verre, de même rayon intérieur que les sphères, et placés dans les mêmes conditions, à la même distance l'un de l'autre.

Une certaine différence devra exister du fait que, dans le cas d'électrodes métalliques, l'intervalle entre les conducteurs est, sur toute sa longueur, occupé par de l'air, tandis que les sphères liquides enveloppées sont séparées par un intervalle d'air et par deux épaisseurs de verre, constituées par les parois du ballon. Il semble difficile de prévoir l'effet qui doit en résulter. M. Odeurs a trouvé (*) que l'interposition d'une lame diélectrique exerce une influence assez considérable sur le potentiel de décharge, mais il a opéré avec des épaisseurs plus grandes, et par un dispositif différent, où l'électrode n'était pas complètement enveloppée par le verre. Dans les expériences de Bouty au contraire, l'effet du verre était peu appréciable, mais on doit noter qu'ici, à cause de la longueur des couches de gaz étudiées, l'épaisseur du verre était proportionnellement beaucoup moindre.

A part cela, le dispositif proposé est l'expérience de Bouty transformée en ce sens que les plateaux du condensateur y sont supposés au contact avec la paroi du ballon plat, et que le volume d'air soumis au champ n'est pas cylindrique, mais présente un minimum d'épaisseur sur la ligne des centres des ballons. Vrai-

---

(*) A. Odeurs. Bull. Ac. royale de Belgique, p. 873, 1908.

semblablement la décharge ne jaillira pas sous forme de lueur d'effluve, mais constituera une véritable étincelle.

D'autre part, certaines causes perturbatrices peuvent se produire : ainsi la conductibilité superficielle du verre, imparfaitement sec, pourrait compliquer ou même masquer entièrement le phénomène ; en outre, après une première étincelle des charges peuvent rester adhérentes à la surface du verre : il semble cependant qu'elles ne peuvent être considérables, car elles proviennent des charges inverses libérées sur le trajet de l'étincelle : on pourrait d'ailleurs au besoin neutraliser les sphères après chaque décharge, par exemple au moyen d'un brûleur Bunsen. Enfin les parois pourraient exercer une action, comme Bouty l'a noté dans certaines circonstances.

Quoi qu'il en soit des prévisions qui viennent d'être développées, il a paru intéressant de les vérifier expérimentalement par quelques mesures préliminaires au moyen d'un dispositif d'ailleurs fort simple.

Les deux petits ballons sont juxtaposés à la distance choisie ; l'eau qu'ils contiennent est mise en relation par un fil métallique, recouvert de tubes en verre ou en caoutchouc, pour éviter les effluves, avec les deux pôles d'une bonne machine de Holtz. Sur ce circuit est mis en dérivation un micromètre, à boules métalliques. Pour faire une mesure, on fait varier la distance entre les sphères de ce micromètre jusqu'à obtenir que l'étincelle éclate, pour une première position, dans le micromètre, pour une deuxième, aussi rapprochée que possible, entre les ballons de verre : la moyenne de ces deux positions est considérée comme représentant la distance pour laquelle on aurait une décharge indifféremment dans le micromètre ou entre les ballons. Connaissant d'ailleurs le rayon des sphères métalliques, on peut calculer le potentiel au moment de la décharge.

RÉSULTATS

Aspect de la décharge. — On remarque facilement que l'étincelle qui éclate entre les deux ballons est notablement moins nourrie que celle qui jaillit dans le micromètre. La chose ne surprend pas si l'on songe que les charges qui se trouvent à l'intérieur du verre ne pouvant traverser celui-ci, il ne circule en somme dans la décharge entre les ballons que les quantités minimes d'électricité libérées sur le trajet même de l'étincelle dans l'air.

La décharge d'ailleurs se présente sous deux formes : tantôt elle est constituée par un faisceau de petites étincelles grêles, plus ou moins parallèles, allant d'une boule à l'autre sur la ligne des centres ; d'autres fois elle prend la forme d'une étincelle ordinaire entre électrodes métalliques, mais avec la différence qu'ici, du point de contact entre l'étincelle et le ballon, jaillissent de belles arborescences, très apparentes, qui enserrent dans leurs ramifications toute la sphère de verre. A première vue il ne semble pas y avoir de différence notable entre les potentiels disruptifs des deux genres de décharge, mais cette question n'a pas été étudiée systématiquement.

Valeurs numériques. — Les divers chiffres obtenus dans les expériences sont renseignés dans les tableaux qui suivent.

Dans une première série de mesures les sphères du micromètre avaient un rayon de 0,81 cm., le rayon des ballons était de 3,3 cm. Dans la première colonne du tableau sont portées les distances *d* auxquelles furent placés successivement les ballons ; dans la deuxième, les intervalles *d'* dont il a fallu écarter l'une de l'autre les deux sphères du micromètre afin d'obtenir que l'étincelle éclate indifféremment entre ces boules ou entre les ballons. La troisième colonne donne, en U. E. S. C. G. S., le potentiel V de décharge, calculé en se basant sur les nombres de la deuxième colonne, et sur les valeurs des potentiels disruptifs données par les tables de Landolt et Börnstein (3^e édit. p. 778) comme moyennes des observations de Baille, Bichat et Blondlot, et plusieurs autres expérimentateurs.

Tableau I

d	*d'*	V
1,41	1,46	118,5
1,50	1,98	135,0
1,77	2,45	—

Cette série d'expériences semblait indiquer que le phénomène se passe conformément aux prévisions, mais elle ne permettait pas de comparer les distances d à celles qu'on aurait obtenues avec des sphères conductrices de même diamètre, les données numériques pour de si grandes dimensions faisant défaut dans la littérature.

On choisit alors des ballons d'un rayon intérieur de 2,3 cm., qui donnèrent, avec le même micromètre, les chiffres portés dans le tableau suivant, où d, d' et V ont les mêmes significations que précédemment.

Tableau II

d	d'	V
0,78	0,83	82,7
0,82	0,89	85,5
0,88	1,03	92,4
1,03	1,07	94,8
1,10	1,22	103,9
1,25	1.36	112,4
1,30	1,46	118,5
1,33	1,61	124,1
1,48	1,91	133,0

On peut construire le graphique représentant V en fonction de d.

On voit ainsi tout d'abord que les points trouvés se rangent assez régulièrement sur une courbe qui est très voisine d'une droite. Ce résultat peut s'interpréter comme indiquant qu'il existe réellement un potentiel disruptif entre électrodes enveloppées.

On constate ensuite que l'une des mesures, la quatrième, s'écarte assez bien de la courbe formée par les autres. D'aprés les conditions de l'expérience, il ne paraît pas que cet écart soit dû à une erreur de lecture ; il semble provenir plutôt de l'une ou l'autre des causes perturbatrices mentionnées plus haut. Des expériences ultérieures pourront seules apprendre ce qu'il faut en penser, jusqu'à quel point notamment la conductibilité superficielle du verre peut intervenir.

Enfin les chiffres trouvés peuvent être comparés aux distances explosives qu'on observerait entre sphères métalliques de même rayon que les ballons de verre. Pour le faire, on a calculé quelle serait, pour chaque valeur de V trouvée plus haut, la longueur d'étincelle entre deux boules métalliques de 2,3 cm. du rayon, en se basant :

1° Sur les valeurs données par Landolt et Börnstein comme moyennes des résultats de plusieurs expérimentateurs (L. et B.).

2° Sur les déterminations de Heydweiller rapportées par J. Stark (*) (H.).

3° Sur les mesures récentes de C. Müller (**) ramenées à la pression atmosphérique normale (M.).

On a trouvé de cette façon le tableau suivant :

Tableau III

Valeurs observées pour électrodes enveloppées	Valeurs calculées pour électrodes métalliques			Différence entre électrodes enveloppées et non enveloppées		
	L. et B.	H.	M.	L. et B.	H.	M.
0,78	0,77	0,72	0,76	0,01	0,06	0,02
0,82	0,80	0,74	0,78	0,02	0,08	0,04
0,88	0,88	0,82	0,86	0,00	0,06	0,02
1,03	0,91	0,85	0,89	0,12	0,18	0,14
1,10	1,02	0,95	0,98	0,08	0,15	0,12
1,25		1,04	1,09		0,21	0,16
1,30		1,11	1,17		0,19	0,13
1.33		1,17	1,24		0,16	0,09
1,48		1,27	1,37		0,21	0,11

On voit que les chiffres des divers expérimentateurs ne sont pas entièrement concordants, mais que tous cependant sont inférieurs aux valeurs entre électrodes enveloppées. L'écart, qui devient considérable pour les distances supérieures à un centimètre, devrait même être augmenté de 0,02 cm. environ, pour tenir compte des deux épaisseurs de verre, qui ne sont pas comprises dans les distances de la première colonne.

(*) J. Stark dans Winkelmann. *Handbuch der Physik* IV_1 *Elektrizität u. Magnetismus*, 2e Aufl. Leipzig 1905, p. 541.

(**) C. Müller, Ann. d. Physik IV *28*, p. 612, 1909.

Faut-il y voir une influence du diélectrique ? La chose est probable, mais il serait téméraire de la considérer comme certaine avant que des expériences plus nombreuses aient confirmé cette vue.

Notons, pour terminer, que cette question des électrodes enveloppées a un rapport immédiat avec certains phénomènes connus, par exemple avec la décharge sans électrodes, et avec des appareils industriels, comme les ozonisateurs et les appareils à effluves, dont les applications se développent de jour en jour davantage.

Jeudi 22 avril 1909. — Sur le rapport du R. P. Pauwels, S. J., la section vote l'impression de deux notes présentées par M. Pieraerts, à la session de juin. La première, l'*hydrolyse citrique du maltose*, est publiée dans la seconde partie des ANNALES ; voici la seconde :

Des chimistes prétendent, tout en reconnaissant le bien fondé des conclusions de Schoorl et van Kalmthout (*), que la réaction à la résorcine chlorhydrique ne présente pas de causes d'erreur, c'est-à-dire, n'est due qu'au lévulose ou à ses dérivés, si l'on opère au bain-marie à une température ne dépassant pas 70°.

Nous avons tenu à vérifier l'exactitude de ces affirmations ; à cet effet, nous avons comparé l'action à la température prônée, de diverses recettes de solutions résorciniques sur certains sucres, pris isolément ou en mélanges.

Les sucres, soumis à l'expérimentation, ont été les suivants :

a) le dextrose pur, qui ne renfermait pas de lévulose, du moins en quantité appréciable, puisque 1 cc. de solution à 10 °/o de ce sucre et 10 cc. de liqueur cupro-acétamique, abandonnés à la température du laboratoire, ne donnèrent pas la moindre trace d'oxydule de cuivre, après un contact prolongé, durant 24 heures,

b) un mélange de 90 parties de dextrose et de 10 parties de lévulose
c) » 95 » » 5 » »
d) » 96 » » 4 » »
e) » 97 » » 3 » »

(*) BER. DER DEUTSCH. CHEM. GESELLSCH., 1906, p. 280.

f)	un mélange de	98	parties de dextrose	et de	2	parties de	lévulose
g)	»	99	»	»	1	»	»
h)	»	95	»	»	5	»	saccharose
i)	»	90	»	»	10	»	raffinose.

Circonstancions les détails de manipulation observés et décrivons brièvement les solutions de m. diphénol employées :

A) DÉTAILS DE MANIPULATION OBSERVÉS.

1) Tous les essais ont été effectués dans des tubes à essai, placés dans un support, genre « étoile de Reischauer-Lintner », à portion centrale creuse.

Ce support occupait, durant l'opération, le centre d'un très grand vase de Berlin, rempli d'eau distillée et placé lui-même dans un bain-marie, chauffé à l'aide d'une rampe à gaz. Un agitateur à ailettes (*) dans la tige duquel se trouvait un thermomètre, assurait la répartition uniforme du calorique au sein de l'eau du vase de Berlin.

2) On a noté le moment de l'apparition de la coloration ainsi que la tonalité de celle-ci après cinq, dix, quinze, vingt, vingt-cinq, et trente minutes.

3) L'opération a été interrompue au bout d'une demi-heure de chauffe ; laps de temps plus que suffisant au point de vue qui nous occupe.

B) RÉACTIFS RÉSORCINIQUES EMPLOYÉS.

1) *Recette de Tollens* (**). On dissout 0,5 gr. de résorcine dans 30 cc. d'acide chlorhydrique de densité 1,19 et 30 cc. d'eau distillée, on agite vivement et on conserve en flacon bien bouché et à l'obscurité. Pour se servir de ce réactif, on dissout 0,05 gr. de dextrose ou d'un des mélanges précités dans 1 cc. d'eau distillée, on ajoute 1 cc. d'acide chlorhydrique fumant et 5 cc. de solution Tollens.

2) *Recette de Pinoff* (***). On introduit dans des tubes à essai 0,05 gr. de sucre, 5 cc. d'un mélange parfaitement refroidi, de 750 cc. d'alcool à 96° et 200 cc. d'acide sulfurique pur et concentré, 5 cc. d'alcool à 96° et 0,2 cc. d'une solution de résorcine à 5 %.

(*) ANNALES DE PHARMACIE, Louvain, 1907, p 145.

(**) *Die Landwirtschaft*. Versuchs-Stationen, 1891, p. 421.

(***) BER. DER DEUTSCH. CHEM. GESELLSCH., 1904, p. 611.

3) *Recette inédite :* On dissout 1 gr. de résorcine dans 20 cc. d'alcool à 94°.

Le mode d'emploi de cette liqueur a été le suivant : à 5 cc. d'une solution à 5 °/₀ de la substance, on ajoute trois gouttes du réactif résorcinique, puis 5 cc. d'acide chlorhydrique fumant.

Nous nous contenterons de relater ici les principaux résultats de nos recherches ; les voici :

a) Quelle que soit la durée du chauffage, la teinte est la même pour le dextrose pur que pour le mélange de 98 °/₀ de dextrose et 2 °/₀ de lévulose.

b) La teinte est également identique, *à tout moment,* tant pour le dextrose pur et le mélange 95 °/₀ de dextrose et 5 °/₀ de saccharose, que pour le dextrose pur et le mélange 90 °/₀ de dextrose et 10 °/₀ de raffinose.

C) CONCLUSION :

Le réactif de Seliwanoff ne constitue pas une réaction, *nettement élective,* du groupe cétosique et, conséquemment, elle ne peut être considérée comme un moyen de diagnose permettant de conclure *avec certitude* à la présence ou à l'absence du lévulose ou de ses anhydrides, dans des mélanges de plusieurs sucres.

Le R. P. Wulf, S. J., développe sa *nouvelle méthode de détermination des petites capacités au moyen de l'électromètre bifiloire.* Cette méthode est décrite dans le mémoire couronné de l'auteur que publieront prochainement les ANNALES.

Le R. P. Schaffers, S. J., présente, de la part du R. P. Mulder, S. J., une note sur *la charge initiale de la machine Wimshurst,* et y joint quelques réflexions personnelles. Voici un résumé de cette communication.

Le P. Mulder, observant un jour que la machine refusait de se charger spontanément; bien qu'il fit assez sec, trouva, en la démontant, que les plateaux avaient presque partout une charge électrique. Après les avoir soigneusement déchargés, il remit la machine en mouvement, sans réussir davantage à obtenir l'excitation spontanée. Mais, s'étant avisé que les brosses étaient oxydées, il en remplaça une par une brosse fraîche tenue à la main, et aussitôt la machine s'amorça. Dans l'exploration des plateaux démontés au moyen d'un fil de cuivre isolé relié à un électroscope, il eut l'occasion d'observer que l'instrument manifestait une charge tant que le fil était en mouvement au contact de l'ébonite même non chargée, et restait, au contraire, inerte dès que le fil demeurait immobile. Il se propose de revenir sur cette dernière observation.

Le P. Schaffers montre ensuite que les phénomènes constatés sur la machine de Wimshurst sont bien d'accord avec la théorie qu'il a développée à diverses reprises devant la Section. Pour que l'excitation spontanée puisse se produire, il faut que les plus petites différences de potentiel, telles que les forces électromotrices de contact, déterminent le passage de l'électricité des brosses sur les plateaux. La petite couche d'oxyde les en empêchait.

M. Vande Vyver présente un *appareil de cours servant à montrer la différence de conductibilité calorifique des métaux.*

Les appareils de cours employés à prouver la différence de conductibilité calorifique des métaux sont en général, ou bien du type de l'appareil d'Ingenhousz, ou bien se rapprochent du type imaginé par Tyndall.

Dans les appareils du premier type,on implante une série de tiges de métaux différents, dans une paroi métallique, que l'on peut chauffer d'une façon quelconque, à une certaine température. Ces tiges ont été enduites préalablement de cire ; de la distance à laquelle se fond cette cire, on déduit le plus ou moins de conductibilité du métal. Ces appareils ne sont guère à recommander si l'auditoire est un peu nombreux, car, loin de voir à distance ce qui se passe sur les tiges, il faut déjà de la bonne volonté pour s'en rendre compte à une couple de mètres des appareils.

Les modèles du type de l'appareil de Tyndall sont à billes de bois, attachées par de la cire, à des distances égales des points de jonction des différents métaux en expérience. Ces types sont supérieurs aux premiers, car ils permettent aux élèves de se rendre compte à distance du phénomène qu'on leur présente. Toutefois ceux qui se servent de ces appareils savent combien leur préparation est agaçante : que l'on applique les billes directement sur le métal, ou qu'on les soutienne par l'interposition de fils, peu importe, on court à chaque instant le risque de voir se détacher intempestivement l'une des billes, ce qui est toujours de nature à provoquer l'hilarité parmi les auditeurs.

Voici comment j'ai évité ces inconvénients (fig. 1).

Dans un talon en fer T, soutenu par un appendice Q, sont encastrées deux tiges métalliques *Fe* et *Cu* d'environ 10 mm de diamètre sur 25 à 30 cm de long. De 35 en 35 mm, sont forés des trous assez fortement évasés vers le haut, comme le montre la figure 2. Chaque bille B est traversée par une tige en laiton D de 25 cm. de longueur, fixée à sa partie inférieure dans une petite masse de plomb P noyée dans la bille et qui lui sert de lest.

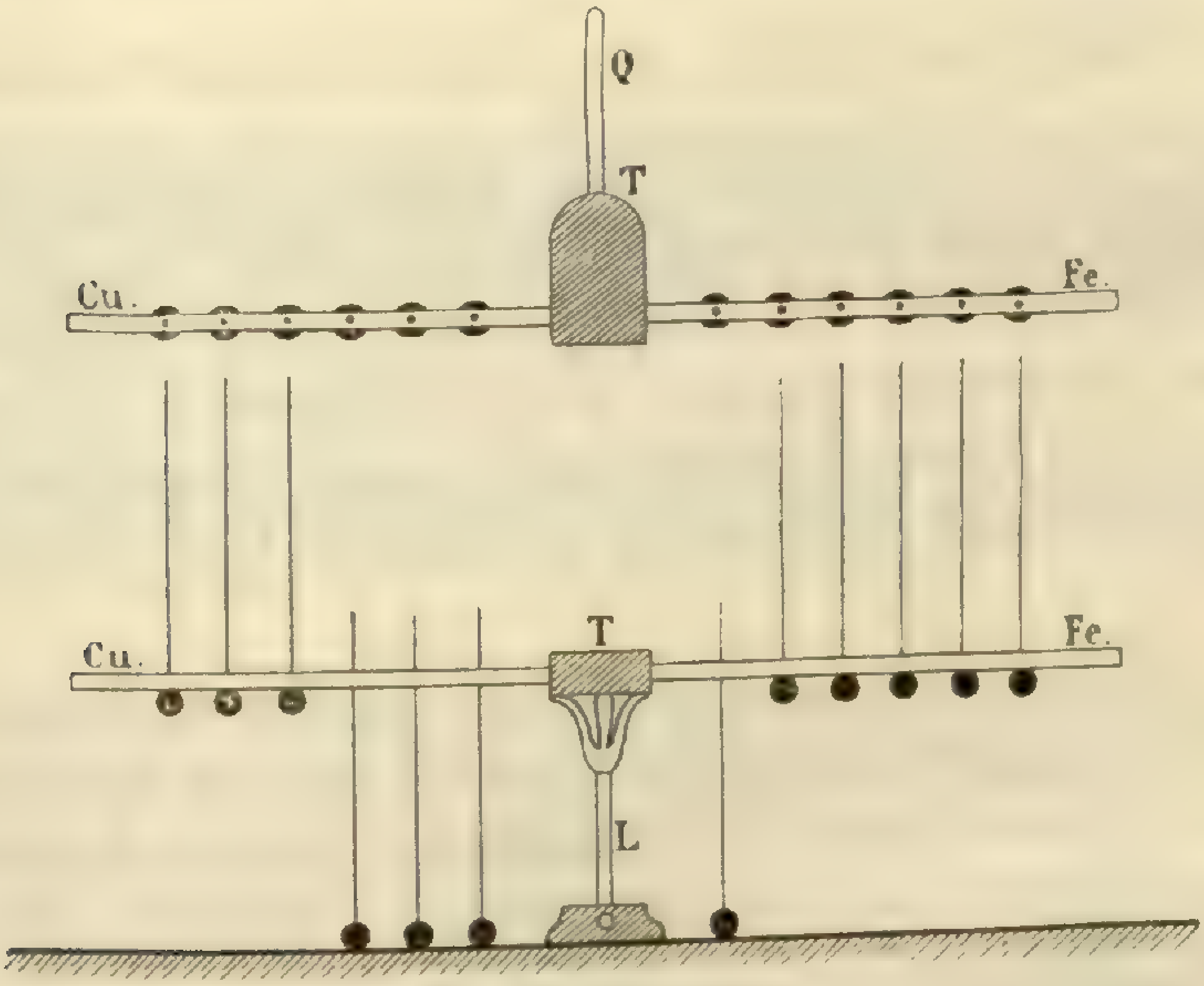


Fig. 1.

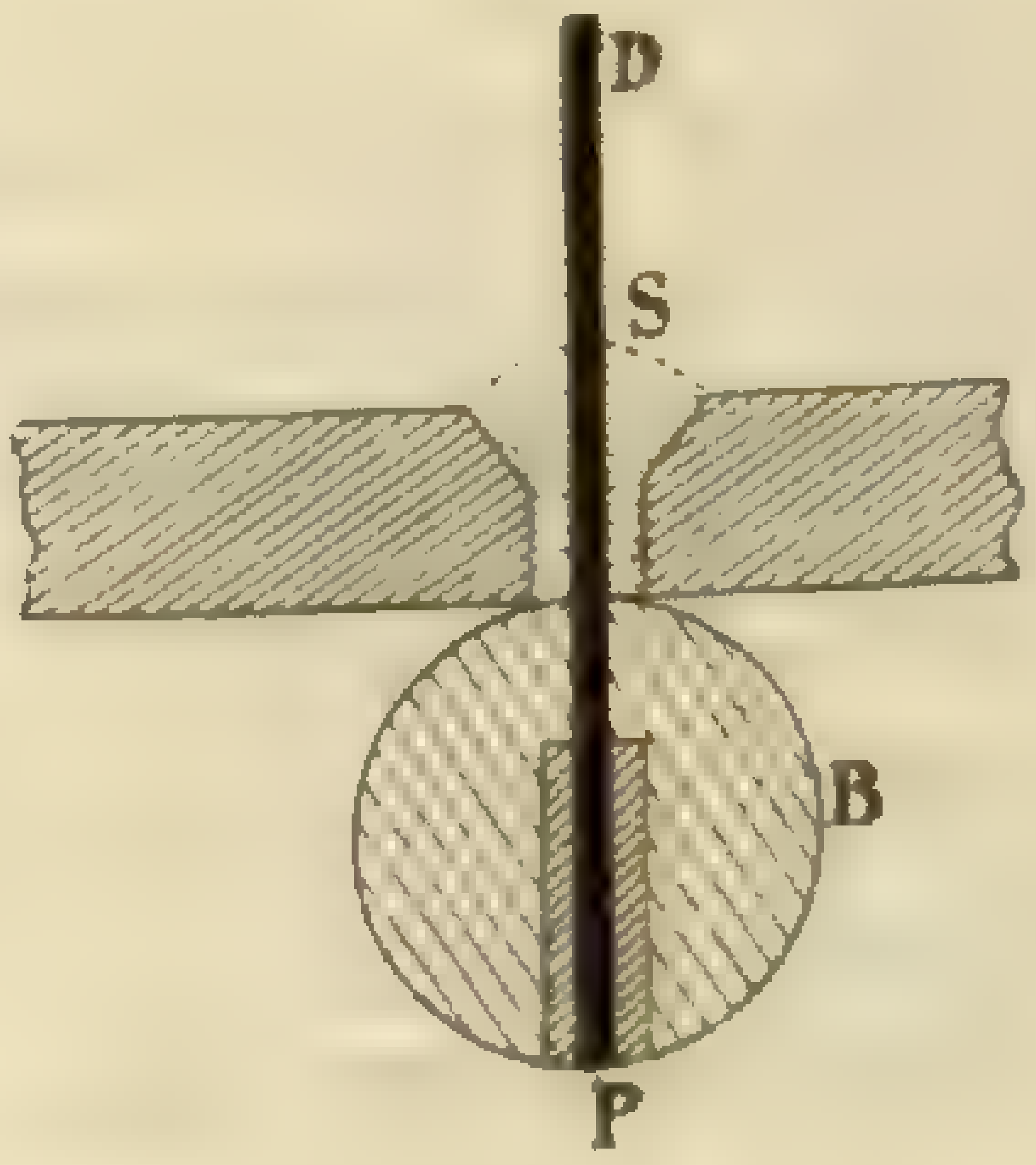


Fig. 2.

La figure nous dispensera de longues explications.

Pour préparer l'expérience, on fixe l'appareil à une hauteur convenable ; puis ayant fait fondre un peu de stéarine dans une capsule à bec, on soulève chaque bille jusqu'à ce qu'elle vienne former le fond du petit godet creusé dans la tige et l'on remplit ce petit creux de quelques gouttes de cire ; celle-ci se fige instantanément et forme un petit bourrelet S qui empêche la bille de choir. Il ne faut que quelques instants pour achever ces préparatifs et l'on peut de suite manier l'appareil sans aucune crainte de voir tomber les billes.

Veut-on peindre les billes en rouge vif ? cela n'en vaut que mieux.

Dès que l'on a chauffé le talon pendant quelque temps, les billes viennent une à une choquer la table dans l'ordre annoncé. Le lest en plomb qui fait contrepoids à la tige empêche celle-ci de chavirer pendant sa chute et la tige elle-même retient la bille à l'endroit de sa chute. Présentée de la sorte, l'expérience est très suggestive et répond entièrement au but que l'on se propose.

A propos de cette communication de M. Vande Vyver, le R. P. Lannoy S. J., rappelle un autre dispositif, qui permet de réaliser la même expérience, basé sur l'emploi des iodures de mercure. Ce dispositif est décrit dans les catalogues de Kohl (n. 32 566), de Leybold (n. 1924), etc.

Le R. P. Lucas, S. J., ajoute que M. Abraham, dans son *Recueil d'expériences élémentaires de Physique*, t. II, p. 126, expose le mode de préparation des iodures de mercure sensibles à l'action de la chaleur.

La section fait choix d'une question de concours. Elle s'arrête à celle-ci : « *On demande des expériences nouvelles sur le timbre et, notamment, sur le timbre des voyelles chantées, en tenant compte des recherches déjà faites sur ce sujet* ».

Troisième section.

Mardi 20 avril 1909. M. A. Renier s'occupe de l'empreinte médullaire de l'*Asolanus Camptotænia* Wood.

Pour des raisons d'opportunité, la section décide de ne pas insérer ici les procès-verbaux de la Commission des sols ; le secrétaire de cette commission sera prié de bien vouloir soumettre à la section, aussitôt après la clôture des travaux, un rapport résumant les diverses opinions émises, et accompagné d'une série d'annexes, telle la monographie de M.-A. Renier pour la partie géologique de l'enquête.

Il est donné communication d'un travail de M. Viaene intitulé *Étude comparative des noms des peuplades du Congo belge.* Sur la proposition des commissaires, le R. P. Van den Gheyn, S. J. et M. F. Van Ortroy, ce mémoire remanié pourrait paraître dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Une étude de M. le professeur Fabre sur *Le ver luisant,* paraîtra dans la même REVUE.

La section émet le vœu, qui sera transmis au Conseil, qu'un télégramme soit adressé à M. le Ministre des Colonies le jour de son départ pour le Congo belge (1).

Mercredi 21 avril. M. De Wildeman fait un exposé assez détaillé de la valeur de certaines plantes cultivées par les indigènes de notre Congo. Il cherche à démontrer que les arguments émis par certains auteurs sur l'indigénat de certaines cultures ne sont pas basés sur des matériaux suffisants. Il expose ensuite les idées qui ont cours sur l'origine de certaines de ces plantes ; suivant les auteurs et les explorateurs, les bananiers à fruits comestibles cultivés au Congo, et qui appartiennent principalement au groupe des bananes à cuire, seraient indigènes ou introduits. Ceux qui plaident en faveur de l'indigénat essayent de démontrer que le bananier est surtout abondant en dehors de la forêt centrale ou vers sa limite. Les mêmes arguments ont été également présentés pour l'Arachide ; il est très certain qu'il n'est pas possible de décider de cette question !

M. De Wildeman attire surtout l'attention sur deux plantes, la première indigène au Congo, l'*Elaeis* ou palmier à huile, la seconde, le *Manioc,* introduite depuis peu d'années seulement.

Il insiste sur l'utilité de la première, non seulement comme source d'une matière première utilisable dans l'alimentation du noir et particulièrement recherchée par lui, mais encore comme productrice d'une matière faisant l'objet d'un trafic étranger considérable. Il fait voir combien peu nous sommes avancés dans notre colonie dans la connaissance des variations de cette plante qui sont cependant très importantes à connaître, car dans leur croissance et dans leurs rendements il y a des différences notables, parfois même du simple au double. Il y a donc nécessité de faire étudier les *Elaeis* et de pousser la culture, par l'indigène et même par des sociétés commerciales, des variétés les plus productrices.

---

(1) Ce vœu a été ratifié par le conseil.

Les questions que soulève l'étude du manioc, sont très complexes. On sait qu'il existe des variétés dites *douces* et des variétés dites *amères*. La saveur amère est de peu d'importance, mais ce qui est plus utile à connaître c'est la teneur en acide cyanhydrique; or cette teneur qui peut être très faible dans les variétés dites douces, augmente parfois notablement dans ces mêmes variétés sous l'action des conditions de culture ou sous celle de facteurs inconnus. Il devient donc dangereux, dans ces conditions, de consommer le manioc cru, car l'acide cyanhydrique qu'il renferme peut occasionner, et a parfois occasionné, des empoisonnements suivis de mort chez les indigènes qui avaient mangé ces tubercules.

Dans bien des cas l'indigène ne consomme pas, il est vrai, la tubercule frais ; mais la préparation compliquée qu'il fait subir à la poudre de ces tubercules est souvent si mal faite, que de l'acide cyanhydrique et bien d'autres produits toxiques peuvent rester dans la chikwangue ou pain de manioc.

Il y aurait donc lieu d'insister sur la sélection des variétés de culture du manioc et de rechercher si les formes diverses de cette plante que l'on trouve au Congo sont d'importation, ou si elles ont été formées sur place par les conditions de milieu.

M. De Wildeman fait voir que dans ce domaine, comme dans beaucoup d'autres, un vaste champ est ouvert au Congo, aux recherches de tous ceux qui ont à cœur le développement de notre colonie.

Jeudi 22 avril. M. le Comte Ad. de Limburg-Stirum présente un curieux morceau de bois fossile de l'Éocène de la Flandre occidentale.

Sur l'avis des rapporteurs, M. F. Meunier, et le R. P. Dierckx, S. J., la section vote l'impression de la note suivante du R. P. Navás, S. J. sur *Deux Hémérobides* (insectes névroptères) *nouveaux*.

A cause de leur petitesse et de leur délicate morphologie, les Hémérobides ont été assez négligés par les entomologistes, ils ont toujours échappé à leur attention et à leur étude. Ils sont pourtant très intéressants, non seulement par leur élégance mais aussi par la variété des formes. Actuellement, j'ai le plaisir d'en faire connaître deux espèces nouvelles provenant de l'un et de l'autre côté de l'Atlantique.

Hemerodomia gen. nov.

Affine generibus *Hemerobio* et *Boriomyiæ* et inter utrumque medium.

Antennæ moniliformes. Vena subcostalis marginem anteriorem attingens. Ala anterior campo costali ad basim regulariter dilatato, venula recurrente instructo ; venulis costalibus furcatis aut ramosis. Radius quatuor sectoribus plerumque instructus ; primus cum vena procubitali (mediana) ad hujus furcam conjunctus. Duæ series venularum gradatarum ; in interna prima venula (superior sive anterior) tribus spatiis a secunda separatur. Ala posterior duobus sectoribus radii ; primus multo exterius furcatur quam procubitus. Duæ series venularum gradatarum. Tibiæ posticæ fusiformes.

Ce genre convient avec les genres *Hemerobius* et *Boriomyia* en quelque chose, mais il en diffère aussi. Il a de commun avec l'*Hemerobius* la structure de l'aile postérieure, et avec le *Boriomyia* la présence de la vénule qui unit le premier secteur du radius au procubitus à l'aile antérieure. Il s'éloigne en cela même de l'*Hemerobius*, et du *Boriomyia* dans le complexe de l'aile postérieure. Et de tous deux, il se sépare encore en ce que la deuxième vénule en gradins dans la série interne de l'aile antérieure est distante de trois espaces de la première, au lieu de deux, comme d'habitude dans ce genre, et dans d'autres semblables, des Hémérobides.

Il est à remarquer aussi que la vénule qui va du secteur du radius au procubitus se tient à une position différente à divers endroits dans les trois genres *Hemerobius, Boriomyia* et *Hemerodomia.* Elle manque d'ordinaire dans le premier, ou, si elle existe, elle se trouve plus reculée, près de la racine des deux veines. Dans le *Boriomyia* elle tombe toujours sur la branche supérieure du procubitus. Finalement dans l'*Hemerodomia* elle est plus extérieure que dans l'*Hemerobius*, et plus intérieure que dans le *Boriomyia*, aboutissant à la racine même du procubitus. Les figures A, B et C (fig. 1) donnent une idée nette de la disposition de cette région de l'aile antérieure des trois genres.

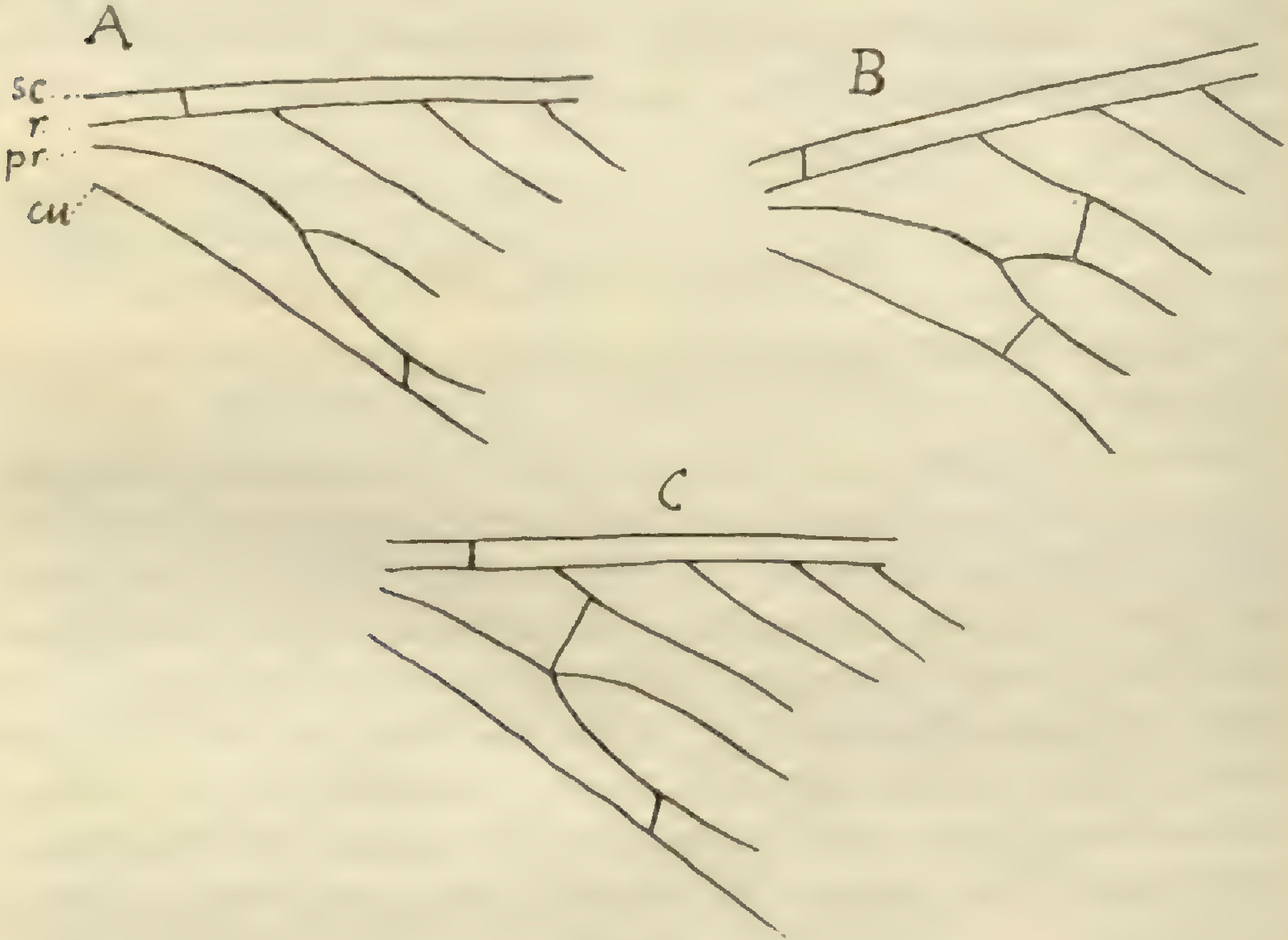


Fig. 1.

Région basilaire de l'aile antérieure. A. *Hemerobius orotypus.* Wall. *sc.* souscostale. — *r.* radius. — *pr.* procubitus. — *cu.* cubitus. — B. *Boriomyia subnebulosa* Steph. — C. *Hemerodomia Buyssoni* Nav.

J'ai formé le nom générique *Hemerodomia* par rapport au genre *Hemerobius* et à la région, Puy-de-Dôme (France), où s'est trouvée l'espèce typique de ce genre.

HEMERODOMIA BUYSSONI sp. nov.

Fusca, ochraceo mista.

Caput fronte ochracea ; genis, præter maculam circularem ochraceam, fusco-nigris ; palpis fuscis, ultimo articulo maxillarium elongato cylindrico, apicem versus inflato, claviformi, mucrone tenui, longo, testaceo ; vertice ochraceo-pallido, ad oculos infuscato ; antennis moniliformibus, ochraceis.

Prothorax transversus, ochraceus, marginibus fascia fusca notatis. Meso- et metanotum ad latera infuscata.

Abdomen fusco-ochraceum, margine postico segmentorum fusco-limbato.

Pedes ochracei, posteriores pallidiores.

Alæ elongatæ, hyalinæ, reticulatione fusco-ochracea.

Ala anterior membrana fascia lata ad marginem posteriorem et exteriorem dilute fusco-tincta, venis alternatim et punctatim fusco et albido notatis, colore fusco interdum membranam invadente. Campus costalis a basi mox et sensim dilatatus, venula recurrente cellulam ellipticam elongatam depressam formante ; venulis omnibus costalibus furcatis aut ramosis. Venulæ intercalares marginales præsentes inter singulas venulas ramosque costales ; item in margine externo et posteriore usque ad tertium basilare. Sectores radii quatuor (*), quartus quater furcatus, primus venula cum procubito conjungitur ad hujus furcæ radicem. Cellulæ cubitales (postcostales) duæ, seu 2ª clausa. Venulæ gradatæ in serie externa 8, fuscæ, ultimæ pallidæ, in serie interna 6, prima tribus spatiis a secunda distans, fusca præter quintam.

Ala posterior membrana penitus hyalina ; venulis marginalibus intercalaribus ut in ala anteriore ; campo costali marginibus subparallelis, ad stigma subrufum ampliato, venulis fuscis. Venulæ gradatæ in serie externa 3, in interna 2, fuscæ. Sectores radii duo, primus ter, secundus quinquies furcati. Procubitus multo ante quam secundus, paulo ante quam primus sector radii furcatus.

(*) Dans l'échantillon que j'ai sous les yeux, les secteurs 3 et 4 sont confluents à la base à l'aile droite, simulant un seul secteur, mais ils sont bien séparés à l'aile gauche, occupant la position normale.

Long. corp.	5 mm.
— alæ anter.	8 »
— — poster.	7 »

Patrie. La Bourboule (Puy-de-Dôme). Legit R. du Buysson, 1907.

Ce m'est un plaisir de dédier cette espèce à M. du Buysson, à l'amabilité duquel je suis redevable de l'étude des Hémérobides du Muséum de Paris et de plusieurs autres Névroptères du même établissement.

A première vue, cette espèce est semblable à l'*Hemerobius orotypus* et aux *Boriomyia cylindrica* et *subnebulosa* ; elle se distingue tout de suite du premier par la vénule basilaire du secteur du radius, et des *Boriomyia* par l'absence des taches penniformes de la membrane de l'aile qui caractérise ces *Boriomyia*, par la frange nébuleuse de l'aile antérieure, etc., etc.

Psectra Buenoi sp. nov. (fig. 2).

Major, fusca. Caput grande, fusco-castaneum, vertice convexo, facie, clypeo, epistomate fusco-nigris ; palpis maxillaribus longis, fuscis, ultimo articulo elongato, apice pallescente, acuto ; antennis corpore longioribus, fuscis, primo articulo elongato inflato, secundo testaceo, reliquis moniliformibus, fuscis.

Prothorax transversus, marginibus anteriore et posteriore subparallelis, lateralibus convexis, disco tuberculis grandibus ornato, duobus ad medium, duobus lateralibus, duobus ad marginem posteriorem, margine antico ipso ad latera incrassato. Meso- et metanotum fusco-nigra, nitentia.

Abdomen fuscum, pilosum, pilis pallidis, in ♂ cylindricum, in ♀ oviforme, singulis segmentis margine postico incrassato, superne pallidiore.

Pedes testacei, pilosi, tibiis dilatatis, tarsorum articulis 5 longitudine decrescentibus, primo duobus sequentibus æquali ; unguibus valde arcuatis, divaricatis.

Alæ in utroque sexu bene evolutæ, in ♀ paulo minores, reticulatione crassa, membrana hyalina.

Ala anterior oblonga, marginibus antico et postico subparallelis, apice elliptico-rotundato, venis fulvis fusco maculatis, venulis et

venarum furculis fuscis; membrana plurimis maculis conspersa, aliquot in fasciam obliquam juxta venulas discales gradiformes. Campus costalis basi angustatus, mox dilatatus, dein marginibus parallelis, venulis plerisque simplicibus, aliquot furcatis, ad basim venam recurrentem simulantibus, stigmate invisibili. Campus subcostalis marginibus parallelis, tribus venulis, duabus distantibus ante medium, tertia ante apicem. Radius duobus sectoribus instructus, secundo prope basim, primo prope basim et apicem furcatis. Series venularum gradatarum haud interrupta, ultra medium alæ sita, sex venulis constante fusco-nigris, quarta seu inter procubitum et primum sectorem thyridio lineari angusto hyalino longitudinali fracta. Procubitus cum cubito tribus venulis conjunctus, quarum externa ad seriem obliquam pertinet.

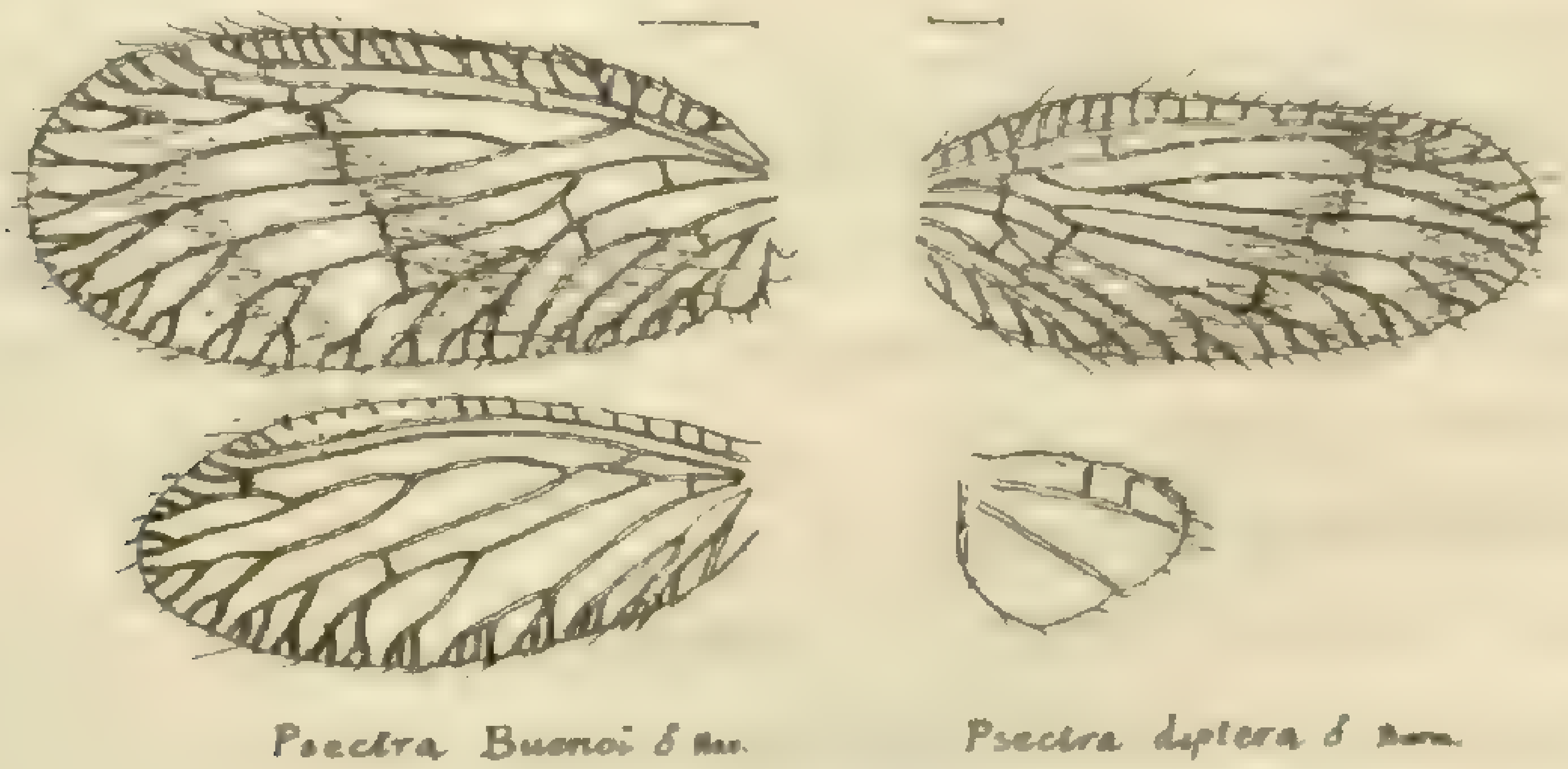


Fig. 2.

Psectra Buenoi ♂ Nav.
Ailes de gauche.

Psectra diptera ♂ Burm.
Ailes de droite.

Ala posterior elliptica, membrana penitus hyalina, immaculata, iridea, reticulatione fulva, ad apicem fusca. Campus costalis venulis simplicibus, subcostalis venulis liber. Sector radii unicus, bis aut ter furcatus. Procubiti ramus anterior cum sectore radii confluens. In ♀ nulla venula, in ♂ venula fusca radiali ante apicem radii, alia fulva aute apicem procubiti.

	♂	♀
Long. corp.	3'3 mm.	3'3 mm.
— alæ anter.	5 »	4 »
— — poster.	4'5 »	3'3 »

Patria. ♂ Westfiel (N. G.), s. VIII, 4. ♀ Putnam Co. N. Y. 5, IX, 3. (États-Unis de l'Amérique).

J'ai désigné cette espèce du nom du collecteur, le connu hémiptériste nord-américain M. J. R. de la Torre Bueno, qui me l'a donnée gracieusement avec un grand nombre d'autres Névroptères nord-américains.

En la comparant à l'espèce *Psectra diptera* Burm. (fig. 2), l'unique du genre qui était connue, on remarque entre autres, les différences suivantes :

1° Les ailes postérieures du ♂ dans le *Psectra diptera* sont abortives (fig. 2), arrondies, squamiformes, tandis que dans la nouvelle espèce elles sont bien évolues, avec la vénation normale.

2° Dans le *diptera* la série des vénules scalaires est interrompue, la vénule qui devait se trouver entre les deux branches du procubitus (mediana) faisant défaut ; elle est pleine dans le *Buenoi*.

3° Le *diptera* est plus petit.

J'ai aussi reçu le *Psectra diptera* Burm. de la part de M. de la Torre Bueno, provenant de Mosholn, N. J., 29, v, 4. C'est un insecte qu'on trouve également en Europe, mais avec moins de fréquence qu'aux États-Unis, selon l'avis de M. Banks.

Le mémoire de M. F. Meunier : *Contribution à la faune des diptères du copal récent de Zanzibar, de Madagascar et d'Accra*, est envoyé à l'examen du R. P. Navàs, S. J. et de M. A. Proost.

M. Fernand Meunier montre aux membres de la section *Deux Mymarinae du copal récent*. Ces articulés se classent irrécusablement parmi les Proctotrypidae. Ces hyménoptères inclus dans l'ambre et le copal ont été peu étudiés par les naturalistes. Ce n'est que par hasard qu'il est possible d'en rencontrer de rares exemplaires. Dans un mémoire paru en 1901 dans les ANNALES de la Société scientifique, notre collègue a décrit et figuré quelques espèces nouvelles et donné la liste des formes connues. En 1905, il a eu la bonne fortune d'en découvrir deux autres dans l'ambre de la Baltique (*).

(*) *Miscellanea Entomologica,* vol. XIII, une broch. de 4 pages et 2 figures dans le texte.

Les morceaux de copal renfermant les deux nouvelles espèces font partie de la collection de M. Evers junior, de Altona-Bahrenfeld (Hambourg).

Ces deux Mymarinae se rangent incontestablement parmi les Gonatocerini. L'un d'eux a été trouvé dans le copal de Madagascar. M. F. Meunier propose de le nommer Litus beneficus nov. sp. Les antennes de cette femelle sont plus longues que le corps et composées de neuf articles ; les articles tarsaux sont longs, le métatarse est à peine plus long que le deuxième article et la nervure costale ou marginale est encore un peu épaissie à quelque distance de la base de l'aile.

L'autre Mymarinae, Alaptus fructuosus nov. sp., a été découvert dans le copal de Zanzibar. Il est plus trapu que Litus beneficus.

Les antennes ont dix articles, les articles tarsaux sont courts et de cinq articles ; le métatarse est un peu plus long que le deuxième article.

Pour finir M. F. Meunier mentionne que Dalmann (1825), Hope (1837-40), Duisbourg (1868) et Kieffer (1904), sont les seuls auteurs qui se sont occupés des Mymarinae inclus dans l'ambre et le copal (*).

M. Fernand Meunier fait passer sous les yeux des membres de la section, quelques diptères et un hyménoptère fouisseur des schistes miocéniques de Turnich (Prusse Rhénane).

En étudiant avec soin ces débris d'insectes, il lui a été possible de dresser la liste des genres observés et de faire quelques intéressantes remarques.

Il signale la présence d'un abdomen de Tabanidae du genre Tabanus, d'une tête de Chilosia (Syrphidae), à antennes fulvescentes, d'un Anthomyinae du genre Hylemyia (Hydrophoria plur. auct.), qui paraît être H. conica Fallen de la faune actuelle. Dans le groupe, parfois si difficile, des Muscinae, il a vu des débris de Calliphora (vraisemblablement de C. azurea), des fragments, bien reconnaissables, de thorax et d'abdomen de Lucilia et une mouche, de facies assez bizarre, qui semble devoir se ranger avec les Pollenia. Dans un autre morceau de lignite, du même gisement,

---

(*) Voyez aussi : Bull. Soc. Ent. de France, n^{os} IX et XVIII. Paris.

il relate la présence d'un hyménoptère fouisseur à caractères morphologiques pareils à ceux de Ectemnius (Crabro) vagus v. d. Linden de la faune paléarctique.

La planchette de Kerpen où se trouve le gisement à lignites de Turnich a été minutieusement levée par le Dr Fliegel qui le considère, avec certitude, comme du miocène inférieur.

Entomologiquement parlant, les insectes de Turnich ont un facies très voisin de celui de la faune actuelle. On peut émettre l'hypothèse que les articulés étudiés sont des formes récentes venant des couches de lignites non travaillées, du haut du gisement, qui se sont peut-être éboulées au milieu de celles débitées actuellement.

De nouvelles recherches s'imposent avant qu'on puisse être fixé sur l'âge précis des débris d'insectes des lignites de Turnich.

La section maintient les deux questions de concours présentées antérieurement : a) *Caoutchoucs africains ;* — b) *étude géographique sur la Campine.*

Une excursion au charbonnage de Bois-du-Luc est décidée pour le mois de juin. Le bureau de la section prendra les dispositions nécessaires.

Sont nommés membres du bureau pour l'année 1909-1910 :

Président : M. E. De Wildeman ;
Vice-Présidents : M. le chanoine Swolfs ;
M. A. Renier ;
Secrétaire : M. F. Van Ortroy.

Quatrième section

Mercredi 21 avril 1909. — Depuis plusieurs années, la section a mis à l'ordre du jour, lors de la session de Pâques, l'exposé d'une question médicale touchant aux domaines philosophique, moral, religieux ou social. Elle a voulu rester fidèle à cette tradition, et le sujet choisi était, cette fois : *La responsabilité des hystériques et des hystéro-épileptiques. État de la question au point* *de vue du libre arbitre*. M. le Dr J. Cuylits voulut bien se charger de cette étude à laquelle le désignaient sa compétence toute spéciale, et son expérience de la pathologie mentale. La question, très débattue actuellement parmi les médecins qui s'adonnent spécialement à cette science, est de nature à intéresser également au plus haut point les moralistes et les psychologues ; elle va être abordée par la Société belge de médecine mentale. Voici l'important rapport de M. le Dr Cuylits :

Parler de la responsabilité des hystériques et des hystéro-épileptiques, c'est s'obliger à définir l'hystérie, cette hystérie dont Lasègue disait : « la définition de l'hystérie n'a jamais été faite et elle ne le sera jamais ». C'est lui aussi qui écrivait : « l'hystérie est une corbeille dans laquelle on jette les papiers qu'on ne sait où classer ».

A ne considérer que les opinions contemporaines les plus autorisées, le premier aphorisme est plus vrai que jamais, car non seulement il y a désaccord, mais d'aucuns s'apprêtent même à la supprimer, et s'il existe encore des papiers qu'on ne sait où classer, on en vide totalement le panier réservé à l'hystérie. A l'heure actuelle, l'hystérie n'est plus qu'un tronçon, un vieil arbre, effeuillé, ébranché et dont on n'épargne pas même les racines, je veux dire, les stigmates hystériques. Ainsi se trouve justifié le chapitre récemment écrit par Babinski, qu'il intitule le *démembrement de l'hystérie*. Et il en est bien ainsi.

Bernheim déclare qu'il n'y a pas d'hystérie, pas plus qu'il n'y a d'hypnotisme : il n'y a qu'une émotivité exagérée. Pour Gilles de la Tourette, il n'y a que de la suggestibilité. Tandis que Colin n'y voit que des phénomènes d'éréthisme cortical, Sollier découvre dans cette même écorce, des phénomènes d'inhibition. Le désaccord est profond.

Leroy, éclectique, ne découvre chez l'hystérique que de l'émotivité, de l'impressionnabilité, de la suggestibilité, de l'impulsivité, du dédoublement de la personnalité, de l'automatisme. Ces phénomènes ne sont que la conséquence d'une rupture d'équilibre entre la puissance et la résistance qui, pour faire l'homme normal doivent être au moins d'égale valeur.

La même hypothèse est reprise par Raymond en termes différents, qui ont une sorte de précision anatomique. D'après cet auteur, il y a dans le cerveau des arcs idéo-sensoriels, idéo-moteurs, idéo-sensitifs, sensitivo-moteurs, sensitivo-sensoriels.

Quand ces arcs livrés à eux-mêmes fonctionnent sans correctifs, sans qu'une résistance de psychisme supérieur intervienne, apparaissent tous les désordres énumérés par Leroy.

Ces hypothèses ont pour elles de n'être que l'analogie de phénomènes identiques qui ont cours dans tous les autres systèmes organiques. L'harmonie, c'est-à-dire la vie normale, n'est que la résultante de forces antagonistes ; c'est une lutte à armes égales. Que deviendrions-nous, si aux muscles fléchisseurs n'étaient pas opposés les muscles extenseurs, si les toxines n'engendraient pas les antitoxines, si les acides sécrétés dans nos voies digestives n'étaient pas neutralisés par nos sucs alcalins à proportion de leur abondance ?

Pourquoi le système nerveux échapperait-il à cette loi générale ? Babinski est d'un radicalisme absolu. Pour lui il n'y a pas d'hystérie : il n'y a que de la suggestibilité, et s'il plaît à quelqu'un de découvrir une manifestation hystérique, elle ne sera dite hystérique qu'à cette seule condition que la suggestion puisse la faire naître et aussi la faire disparaître. C'est à ce prix.

Aussi bien Babinski ne s'attache pas seulement à faire la guerre à l'hystérie. Il veut même rayer le mot du vocabulaire médical. Il propose de remplacer le mot « hystérie » par le mot « pithiatisme » ce qui veut dire, curable par persuasion. Nous ne voyons pas grand avantage à l'introduction de ce nouveau mot barbare dans le jargon médical. N'en est-il pas assez ?

M. Faguet aurait donc raison quand il écrivait : « Pour ne pas être verbeux, les médecins adorent le verbe. Ils exultent quand ils ont accouplé deux racines grecques pour en faire un mot nouveau ».

Il faut toutefois rendre cette justice à Babinski, qu'il a nettement et avec précision éliminé du chapitre « hystérie » les nombreux cas qui n'ont avec elle que de vagues similitudes.

Tels, en premier lieu, ces états organiques qu'on se figure à tort n'être que des troubles fonctionnels, névrosiques.

Un jeune homme, à l'occasion d'une émotion, sans troubles cardiaques apparents est frappé d'hémiplégie. Comme il arrive souvent, on constate quelques troubles de sensibilité cutanée, on le déclare hystérique.

Cela ne devrait plus être, car nous pouvons différencier ces états à l'aide de l'examen de certains réflexes, qui, nous le savons, ne sont pas touchés par l'hystérie.

En second lieu, il faut se mettre en garde contre la duperie : manifestations qui sont l'imitation de troubles que la suggestion réalise et que la persuasion guérit, paralysies, contractures, anesthésies.

Troubles fictifs qui ne peuvent résulter de la suggestion, tels que la fièvre dite hystérique et l'anurie.

Troubles réels, produits de la fraude, tels qu'érythèmes, phlyctènes, ecchymoses, ulcérations, œdèmes.

Enfin, on a rangé à tort dans l'hystérie un groupe de faits consistant en une exagération généralisée soit des réflexes tendineux, soit des réflexes vaso-moteurs cutanés. Or une excitation des tendons ou des téguments est nécessaire à la production de ces phénomènes réflexes.

Ils ne relèvent pas de la suggestion et de la persuasion. Ce ne sont pas des manifestations d'un psychisme troublé.

Ce qui se dégage de ces doctrines, dont les apparences seules sont contradictoires, c'est que les uns attribuent toute importance à l'affaiblissement ou à l'effacement morbide des facultés supérieures comme la volonté, le jugement et l'attention ; d'autres, au domaine de la subconscience en déroute ; d'autres enfin, à la prédominance morbide du vaste territoire où s'épanouissent et se perçoivent les sensations, les impressions, les sentiments.

Grasset a eu le mérite d'avoir groupé avec une grande clarté et en peu de mots, doctrines et localisations.

Il rappelle que l'écorce cérébrale tout entière est psychique. Spiritualiste ou non, personne ne nie qu'il y ait des neurones dont l'intégrité est nécessaire pour le fonctionnement psychique, pour l'accomplissement des actes psychiques. Sans songer jamais à attribuer des groupements de neurones à chacune de nos facultés, mémoire, attention, association des idées, on a pu se poser la question si ces neurones psychiques sont localisés dans une région quelconque des centres nerveux ou s'ils sont disséminés un peu partout.

Or, les documents cliniques établissent à suffisance que les centres psychiques supérieurs paraissent réunis dans le lobe préfrontal ou zone pré-rolandique, et que des lésions de ce lobe préfrontal atteignent le libre exercice de nos facultés supérieures conscientes, tout en laissant à peu près intact le psychisme inférieur et inconscient.

2° Les fonctions psychiques inconscientes et automatiques paraissent occuper les zones moyenne et postérieure des centres d'association de Flechsig, dont les points nodaux seraient la partie moyenne du pli courbe et la troisième temporale.

3° Enfin les fonctions psychiques inférieures sensorio-motrices ou justement appelées de relations extérieures, ont de nombreuses et bien précises localisations : zone péri-rolandique pour la sensibilité générale et la motivité, zone moyenne des première et deuxième temporales pour l'ouïe, zone péri-calcarine pour la vision, zone de l'hippocampe pour le goût et l'odorat. La connaissance de ces localisations nous donne l'intuition de leurs désordres et de la possibilité de leur dissociation fonctionnelle.

Il faut compléter ces notions par l'étude anatomique et physiologique de la zone et des nerfs réservés à la *sensibilité cutanée ;* elle a une importance particulière dans l'hystérie ; car les désordres de cette sensibilité sont tangibles et précis ; ils donnent la mesure de troubles purement psychiques et intimes, qui échappent à des constatations directes. C'est le baromètre du psychisme hystérique.

Ne vous étonnez pas que Leroy écrive : « une grande anesthésie implique l'existence d'une grave perturbation des centres psychiques. L'anesthésie hystérique d'origine auto-suggestive est une insensibilité par inconscience, par désagrégation mentale, une insensibilité psychique indiquant un dédoublement de la personnalité. »

Nous ne nous préoccupons pas ici de différencier les divers modes de sensibilité, sensibilité tactile, à la douleur, au chaud, au froid, à la pression, localisation de l'excitation, situation de nos membres dans l'espace.

Sans doute, ce sont là autant d'apports à l'activité psychique, nullement négligeables ; mais dans l'espèce, d'autres considérations doivent nous arrêter.

Nul ne conteste l'action essentielle, prépondérante des organes des sens dans le fonctionnement de notre état psychique. Les organes des sens nous apportent des impressions, des images, des couleurs, des sons. Imaginez un moment que nous soyons privés de nos sens : l'activité cérébrale sera réduite à néant, elle n'existera plus. Le jugement, l'attention, la volonté, la mémoire n'auront plus les éléments qui leur permettraient de s'exercer.

Or les organes des sens sont essentiellement des épithéliums sensibles, c'est-à-dire des parties plus ou moins modifiées de la surface épithéliale, soit de la peau (sens tactile) soit des muqueuses (sens olfactif, sens gustatif), soit de l'ectoderme primitif (sens de la vue, sens de l'ouïe). C'est dans ces épithéliums que viennent s'épanouir les terminaisons des nerfs spéciaux qui relient ces surfaces sensibles à certaines parties déterminées de l'écorce cérébrale. Parmi ces épithéliums sensibles qui alimentent notre psychisme, l'épithélium sensible du tact est assurément le plus important, tant par sa surface immense que par son incessante activité. C'est avant tout, un organe de sensibilité. Il l'est par la terminaison des nerfs sensibles périphériques.

Les uns rayonnent entre les cellules épithéliales des couches profondes de l'épiderme par les *ramifications libres* ou autour des follicules pileux, en dessous de l'embouchure du conduit excréteur des glandes sébacées ; les autres se terminent dans les papilles du derme sous forme de *corpuscules du tact*, ou dans l'épaisseur du tissu conjonctif sous-cutané sous forme de *corpuscules de Pacini*.

Toutes ces terminaisons se réunissent en fibres qui constituent les racines postérieures des nerfs spinaux et qui sont approximativement au nombre de 500 000 pour chaque moitié du corps.

Fibres centripètes, elles recueillent à la surface du corps des impressions, des excitations qui pour ne pas être excessives et jeter en complet désarroi notre organe de perception, sont en quelque sorte capitonnées et préservées contre les excitations trop fortes du dehors, par des cellules épithéliales, des cellules cornées, un matelas de tissu conjonctif.

Vous en connaissez le trajet de la surface épidermique à l'écorce cérébrale, à travers les ganglions de la base par une succession de neurones, dont les derniers sont les thalomo-corticaux.

Si dans l'hystérie leurs fonctions sont suspendues, nous savons de science certaine, que c'est une manifestation purement psychique. Il suffit de faire appel à l'attention du sujet pour que la zone anesthésiée devienne immédiatement sensible ou hypersensible. Nous sommes donc bien en droit de conclure avec Leroy « qu'une anesthésie hystérique d'origine auto-suggestive est une insensibilité par inconscience et qu'elle implique l'existence d'une grande perturbation des centres psychiques ».

Un second élément de toute importance dans l'hystérie, c'est le *sub-conscient*. N'est-ce pas aux désordres du sub-conscient, à sa prédominance sur la conscience, à son déséquilibre, que l'hystérique doit d'être émotif à l'excès, impressionnable, suggestible, impulsif, automate, somnambule ? N'est-ce pas à l'indépendance du sub-conscient à l'égard de la personnalité consciente que l'hystérique doit de réaliser le dédoublement de la personnalité qui est un des caractères essentiels de l'hystérie ?

Déjà nous en avons signalé la localisation, d'après Grasset et autres.

Quelques exemples contribueront à en établir l'évidence. On sait ce qu'il faut entendre par cette perception vague et pourtant nettement définie qu'on appelle *cénesthésie*. C'est le sentiment de notre être indépendant du témoignage de nos sens. Cette synergie nerveuse relève du sub-conscient. Elle peut même s'exaspérer, révéler des délimitations, des fonctions d'organes qui échappent habituellement à notre conscience.

Dans le *calme des nuits*, quand nous nous promenons à la campagne, à la lueur des étoiles, qui pourrait se dérober au sub-conscient ? Soudain des pensées, des souvenirs, des rêves d'avenir surgissent. Ils étaient là, dans notre sub-conscient, enfouis, insoupçonnés.

Dans le *rêve*, dans le *délire tranquille de la fièvre*, quelle floraison d'idées et de sentiments ! quel monde d'images qui se déroulent et se révèlent ! C'est le sub-conscient qui apparaît.

Dans le *somnambulisme*, nous en avons la preuve la plus éclatante. Le somnambule vit dans une existence autre, dans un enchaînement de conception qui dédouble sa personnalité. Il est sub-conscient et il l'est à ce point, qu'au sortir de l'état somnambulique, le sujet reprend conscience, non pas de l'état de rêve qu'il a totalement oublié, mais de sa vie et de ses préoccupations habituelles qui sont tout autres.

Dans la *folie circulaire* ou *intermittente*, le phénomène sub-conscient est de haut intérêt. On sait que dans cet état le malade est tour à tour et souvent pendant de longs mois triste et déprimé ou joyeux et communicatif. Il est victime de son sub-conscient qui le domine de toute la puissance d'une idée triste ou gaie et c'est pendant de longs mois qu'il vit dans cet état de sub-conscience.

L'étude de la sub-conscience nous amène naturellement à envisager la *conscience elle-même*, ne fût-ce que pour indiquer à quel point, dans l'hystérie, elle est affaiblie. Ne trouvons-nous pas une preuve de cet affaiblissement dans le jeu excessif du sub-conscient que nous venons d'étudier ? La conscience a pour mission d'établir l'ordre et l'harmonie dans notre psychisme. On sait ce qu'il en advient dans l'hystérie. L'hystérique n'a plus le jugement sain de ses perceptions, parce que mal averti, incomplètement averti, dominé par le psychisme extérieur. Sa volonté ne joue plus le rôle correctif qui lui est dévolu. L'attention surtout est atteinte. Faites tendre le bras à un hystérique ; détournez son attention, et le bras retombe sans qu'il s'en doute.

C'est que son attention fatiguée, affaiblie ne suffit pas à une double tâche.

De là, sa suggestibilité, son automatisme, le dédoublement de la personnalité.

L'hystérique est mentalement affaibli, fatigué. Son champ de conscience est rétréci.

C'est bien lui qui met en évidence les deux yeux de la conscience, dont l'un voit et l'autre regarde.

L'hystérique regarde le spectacle de son activité intérieure. Il est en état de conscience passive.

Vous remarquerez qu'en retenant des doctrines les plus récentes sur l'hystérie, ce sur quoi l'accord est indéniable, en scrutant tour à tour le psychisme de l'inconscience et de l'automatisme et le psychisme le plus élevé, nous avons été ramené à la doctrine de Pierre Janet, qui pour ne pas être la plus récente résumait admirablement tout ce qu'on a pu déceler chez l'hystérique.

Avec lui, nous disons que l'*hystérie est un état morbide psy-*

chique, échappant totalement à tout désordre physique, caractérisé par l'affaiblissement du champ de la conscience et le dédoublement de la personnalité.

En d'autres termes, l'hystérique assiste avec les débris de sa personnalité consciente aux dévergondages pathologiques de son sub-conscient.

RESPONSABILITÉ

L'hystérique étant ainsi défini, nous avons, semble-t-il, le droit de déterminer les limites de sa responsabilité.

« Chaque fois, écrit Régis, qu'un hystérique paraît devant un tribunal, la question de la responsabilité se pose. » On le concevra aisément si on s'inspire de la définition de l'hystérie telle que nous l'acceptons.

Sans doute, il n'est pas de problème plus troublant que celui de la responsabilité humaine devant le délit ou le crime. Scruter la pensée elle-même, mettre à jour le jeu de la volonté, du jugement, de la conscience en un mot, rendre tangibles les opérations mystérieuses de l'esprit qui soumises aux lois physiques de l'organisme peuvent trahir ou affaiblir le libre arbitre !

Pareille mission mérite qu'on se recueille, et on comprend le trouble qu'elle jette dans les esprits.

L'époque n'est pas éloignée où nos médecins contemporains, émus d'une justice qu'ils appelaient vétuste, sommaire et ignorante, protestaient au nom de la science auprès des magistrats. La science, disaient-ils, avait progressé : elle avait découvert, établi tous ces éléments d'ordre matériel qui font du criminel une victime de l'atavisme, de la déformation organique ou d'une constitution morbide.

Ils demandaient à descendre dans le prétoire pour arracher aux juges inconscients toutes les victimes d'antiques préjugés.

On les écouta. Je ne dis pas qu'on n'eût pas raison, mais je rappelle uniquement ces faits pour montrer à ceux qui pourraient l'ignorer, l'étrange spectacle auquel nous font assister ces mêmes médecins contemporains.

Ils se dérobent au moment où on s'apprête à leur assurer la plus bienveillante attention. Je ne suis pas chargé de vous dire ce que pensent les magistrats de cette attitude qui, pour peu qu'elle se généralise, serait profondément humiliante et désastreuse pour le corps médical, mais il faut que je vous dise quelle est cette attitude.

« Actuellement, écrit Gilb. Ballet, le mot « responsabilité » appliqué en matière criminelle ou n'a pas de sens et devient dès lors inutile, ou ne veut signifier que responsabilité morale ou responsabilité sociale.

» Dans le premier cas, il suppose de la part de celui qui l'emploie une adhésion à la doctrine de la liberté morale et du libre arbitre ; dans le second cas, une interprétation du dommage causé à la Société.

» Celui-ci est d'ordre juridique. Mais on ne peut parler de responsabilité morale sans faire incursion sur le domaine métaphysique ; c'est au philosophe à décider si l'homme est libre ou ne l'est pas.

» De quelque façon qu'on les envisage, les questions de responsabilité échappent à la compétence du médecin. »

C'est encore lui qui écrira : « il faut choisir, ou être partisan du libre arbitre, ou se ruiner. »

Et c'est la vérité même, car le déterministe est partisan du déterminisme mécanique absolu et universel. A ses yeux, nous n'avons pas conscience de la liberté ; nous n'en avons que l'illusion. Notre volonté n'est pas plus libre que notre jugement. Si, dans l'occurrence, il est malaisé de donner à ce déterminisme l'épithète de « mécanique ou physique », on le dira « psychologique » et en tout état de cause exclusif de tout libre arbitre.

Voilà la thèse. Elle devrait, semble-t-il, avoir tout au moins une consécration dans ce fait qu'on ne verrait plus devant nos cours et tribunaux apparaître un seul médecin-expert déterministe et l'entendre conclure à la responsabilité entière ou mitigée. Il n'en est pourtant pas ainsi, et je ne suis pas en mesure d'expliquer cette contradiction.

La doctrine de la responsabilité est pratiquement gênante, et on conçoit que Sollier déplore « l'introduction dans l'étude de l'hystérie, des conceptions philosophiques, psychologiques, morales et même métaphysiques. Il nous faut rester sur le terrain anatomique et physiologique (en matière d'hystérie, n'est-ce pas ?), si nous ne voulons pas tomber dans des discussions scolastiques sur des mots que nous sommes incapables de définir, comme conscience, idée, image, représentation ? »

Mais ce qui se conçoit moins, c'est que Grasset, spiritualiste apparemment, tente un sauvetage.

Il se désole de cette auto-élimination pratiquée, théoriquement, c'est entendu, par les médecins-déterministes sur eux-mêmes, et il cherche le moyen de les ramener au prétoire.

La voie philosophique conduit à une impasse, écrit-il. Cherchons donc une autre voie. Cette autre voie existe. Le médecin peut arriver, en restant exclusivement sur son propre domaine, à se faire une idée médicale de la responsabilité, à concevoir *une responsabilité médicale.* Elle doit suffire à remplir son rôle d'expert. Voyons en quoi consiste, selon Grasset, *la responsabilité médicale.*

La responsabilité médicale doit s'entendre comme une conséquence de l'état d'intégrité ou de maladie de l'outil nerveux.

Le médecin peut donc déterminer l'influence que cet état de l'outil a pu avoir sur l'acte criminel. Voilà ce que le spiritualiste comme le matérialiste pourraient établir en parfait accord.

« Dans tout acte voulu et délibéré, il y a un jugement dans lequel l'esprit compare et pèse le désir qu'il a de faire un acte donné et le devoir qu'il a de ne pas le faire. Parmi ces mobiles, il y a donc la notion du devoir, la notion de ce qui est permis et de ce qui est défendu et la mission de l'expert est de décider si l'état de son système nerveux a permis au sujet de bien peser et de bien juger ces mobiles et ces motifs, si l'état de son système nerveux le laisse responsable ou le fait irresponsable. » Que M. Grasset me permette de lui faire remarquer que son exposé de motifs s'appelle couramment une pétition de principes, raisonnement vicieux qui consiste à poser en principe ce qui fait l'objet même de la question.

La question est de savoir si oui ou non un acte peut être voulu et délibéré, s'il existe un jugement libre, si l'esprit peut librement comparer, vouloir, bénéficier en un mot de la notion de devoir, c'est-à-dire du libre arbitre. Mais tout cela est nié, combattu, proscrit par le déterministe, que l'outil nerveux paraisse à M. Grasset intact ou morbide. C'est l'objet même en discussion, repris par M. Grasset en d'autres termes.

L'éminent auteur, mécontent ou peu satisfait de la première interprétation, n'est pas plus heureux en reprenant une nouvelle fois la question, en ces termes :

« Peu importent les opinions de l'expert sur la question philosophique du libre-arbitre et de la responsabilité morale. Pour qu'un sujet soit *médicalement* responsable d'un acte devant la société, il n'est pas nécessaire qu'il ait une saine notion du bien en soi, de la loi morale en un mot. Il faut et il suffit qu'il ait une saine notion de ce que permet et de ce que défend la loi écrite que nul n'ignore dans les grandes lignes quand elle défend de s'approprier le bien d'autrui ou d'enlever la vie à son prochain. »

Mais justement la loi écrite dont se réclame M. Grasset et que nul n'ignore, est basée tout entière sur la notion du libre-arbitre, et en exclure celui-ci, c'est proprement mettre à néant la loi écrite elle-même. Dès lors, l'objet est sans valeur. De quel droit, en imposer le respect ? C'est à Ferri, le matérialiste, que nous laisserons le soin de répondre à Grasset, le spiritualiste, en style lapidaire :

« La responsabilité morale sans libre-arbitre est un non-sens, l'identité personnelle n'est qu'un leurre, l'application de la doctrine de Tarde serait pratiquement dangereuse et inacceptable. »

Pour nous, médecins spiritualistes, il y a une responsabilité morale, entière chez celui que nous avons le droit d'estimer sain d'esprit quand nous avons pu établir que physiquement et physiologiquement ses organes paraissent intacts et que moralement son état de conscience, sa volonté, son jugement, sa faculté d'attention s'exercent normalement. Mais il existe des maladies psychiques, telle l'hystérie, où le psychisme seul paraît affecté : nous avons le pouvoir d'en juger en étudiant le psychisme et en relevant des troubles de la sensibilité qui, elle, est une manifestation extérieure de ce psychisme plus ou moins troublé.

Il nous est donc possible de déterminer l'irresponsabilité ou de graduer la responsabilité de l'hystérique d'après des données suffisamment précises que nous pouvons considérer comme des lois de pathologie criminelle.

Première loi : Quand un hystérique présente des manifestations épileptiques, de la débilité mentale et que le délit a une note pathologique, la responsabilité est nulle.

2° Quand l'hystérie est grave, qu'il y a des crises hystéro-épileptiques, que l'anesthésie est étendue, qu'il existe des hallucinations, l'expert doit tendre à l'irresponsabilité, même si l'acte commis paraît intéressé ou inspiré par les mobiles les plus pervers.

3° Il faut déclarer irresponsable celui qui atteste un état morbide des centres nerveux, état morbide qui au moment de l'acte incriminé l'a mis dans l'impossibilité d'agir autrement qu'il n'a fait.

Le problème de la responsabilité en suscite bien d'autres. On fait remarquer qu'en dehors de la responsabilité morale ou individuelle, il y a une *responsabilité sociale* et que celle-là ne relève pas plus du médecin que la première, comme s'il n'entrait pas dans notre compétence de dire aux juges que la maladie est constitutionnelle ou non, qu'elle est incurable ou non, que les rechutes sont fatales ou ne le sont pas, et que partant la société est exposée ou non dans sa sécurité, à de nouveaux attentats.

On soulève encore la question de savoir si l'homme est autorisé à exercer sur son prochain plus ou moins normal, plus ou moins morbide un *droit de punir* comme si le droit de punir n'était pas un des meilleurs moyens de traitement moral, et on ne contestera pas, je l'espère, que nous avons au moins le droit d'appliquer un traitement moral à qui peut en bénéficier.

On proteste contre l'étiquette de *responsabilité atténuée*. Quelle outrecuidance ! clame-t-on. Où prenez-vous donc la mesure de la responsabilité ? Existe-t-il un psychomètre ? On est responsable ou on ne l'est pas. Coupera-t-on l'âme en deux, pour traiter une moitié et frapper l'autre moitié ?

Ceux qui formulent ces objections sont ceux-là mêmes qui se déclarent aptes à déterminer la responsabilité absolue ou l'irresponsabilité absolue. Nous sommes donc fondé à leur demander à notre tour quel est leur psychomètre. Si nous éliminons, écrit Grasset, de la physiologie, de la psychologie et de la clinique tout ce qui n'est pas susceptible de mensuration précise, que restera-t-il ? Et puis, puisqu'il y a responsabilité et irresponsabilité absolues, il y a nécessairement entre ces deux termes toutes les gradations ;

et puis encore, ne savons-nous pas que les facultés les plus hautes sont nécessairement sous la dépendance d'une organisation fatalement imparfaite et sujette à défaillances? Il y a donc coopération nécessaire et, de ce fait, résultats souvent précaires et d'inégale valeur morale.

On a dit avec mille raisons qu'il y a des criminels assez fous pour ne jamais aller en prison et assez sages pour ne jamais être placés dans un asile.

En d'autres termes, sous un même crâne cohabitent deux mentalités qu'il faut atteindre différemment, mais en frappant l'une, nous traitons l'autre moralement. Sans doute, il sera toujours impossible de mesurer mathématiquement la responsabilité, un seul être le peut faire en ce monde : c'est le malade ou le délinquant, dans la mesure où sa responsabilité, c'est-à-dire sa lucidité est engagée. Le remords le prendra dans cette mesure et ce sera sa peine.

Nous aurons donc à le placer dans un milieu où le remords peut se développer si le délinquant en est susceptible, et où le traitement moral pourra s'appliquer si le malade peut en subir les effets.

Nous trouverons le remède adéquat dans l'asile-prison. Là, le séquestré aura l'impression de la prison et de la peine si sa mentalité est celle du coupable, et il y trouvera les bénéfices du traitement moral dans la mesure où sa morbidité le réclame.

Plus il y aura conscience, plus il y aura punition ; plus il y aura subconscience, plus la prison s'effacera devant l'asile. Que peut-on réclamer de plus ?

Je veux terminer en rappelant une image banale qui résume, me semble-t-il, tous ces débats.

Vous connaissez l'histoire du brochet placé dans un aquarium. On y ajoute de petits poissons rouges ; il les dévore tous. Puis on sépare l'aquarium en deux compartiments au moyen d'une glace et le brochet est mis d'un côté, les poissons rouges de l'autre. Tout d'abord le brochet se précipite vers les poissons rouges. Il se bute contre la glace et s'y brise le nez. Puis on enlève la glace et le brochet assagi vit en excellents termes avec les poissons rouges. Dans une seconde expérience, on enlève la glace et on remplace les poissons rouges par de petits poissons blancs. Il les dévore tous.

Vous considérerez le brochet comme un subconscient, la glace comme une punition et un traitement moral. Les poissons rouges vous feront l'effet d'une société, qu'on peut aisément protéger contre les crimes et délits des anormaux, des passionnels, des hystériques.

Tâchons de n'être pas les poissons rouges, ni les petits poissons blancs ; et pour qu'il n'en soit pas ainsi, il s'agit de faire le départ entre la responsabilité et l'irresponsabilité.

Ce sera notre premier devoir et, en matière d'hystérie, je crois vous avoir indiqué les moyens de l'accomplir.

Nous avons un second devoir à remplir, celui-là vis-à-vis de la société : faisons des prisons-asiles, tant pour la protéger que pour soigner les malades dans la mesure où ils sont capables d'en ressentir la bienfaisante influence.

La lecture de ce rapport est suivie d'un débat auquel prennent part, notamment, MM. les Drs Swolfs et Vervaeke et le R. Père Castelein, S. J.

M. le Dr Swolfs. — Il y aurait beaucoup de points à discuter dans le travail si remarquable de notre distingué et sympathique ami, le Dr Cuylits. On ne peut le faire au pied levé ; et il faudrait plusieurs de nos réunions pour mener à bien cette intéressante discussion. Permettez-moi de vous présenter aujourd'hui quelques remarques, simplement de nature à mettre au point la discussion de ce sujet si délicat et si important, qui vient d'être amorcée, si je puis dire ainsi, à la Société de médecine mentale, par notre savant collègue M. le Professeur Xavier Francotte. Un autre professeur, partisan du déterminisme, lui a répondu. Cette joute scientifique va se continuer bientôt, et il importe que nous puissions y prendre part, armés d'arguments que seules peuvent nous fournir irrésistibles, la Science et la Philosophie. Or, il est indubitable, et combien regrettable que pour nous médecins, le bagage de nos connaissances en philosophie ne soit pas plus lourd (*).

(*) C'est ici le lieu de rappeler que la question de la *Psychologie appliquée à l'étude de la thérapeutique des maladies mentales* et celle de la *Nécessité d'une*

Et c'est cependant pour nous *un devoir*, comme l'affirme le Père Carbonnelle, dans son remarquable livre « Les confins de la Science et de la Philosophie », *d'éclairer surtout sur le terrain scientifique, les régions voisines de la philosophie.* Cette question de la responsabilité atténuée y touche peut-être plus que toute autre ; et il est impossible de la résoudre sans suivre le judicieux conseil du regretté Jésuite.

La tâche en est ardue ; en psychiatrie, nous sommes pour ainsi dire arrêtés à chaque pas, par ces questions que la connaissance plus approfondie du mécanisme psychique pourrait rendre moins obscures.

L'hystérie en est une. Et en attendant que lumière se fasse, nous devons de plus en plus, comme le recommandait Charcot dans ses incomparables leçons, nous cantonner dans le domaine des faits cliniques, de la symptomatologie — si nous voulons sortir du chaos que vient de nous représenter notre collègue M. Cuylits. Pour M. Pierre Janet, l'hystérie est une affection mentale caractérisée par cette triade de symptômes cardinaux : l'anesthésie, l'amnésie et l'aboulie, autour desquels viennent se grouper d'autres manifestations psychiques de moindre importance diagnostique (Conférences données à la Salpêtrière en mars 1892).

Il existe encore d'autres psycho-névroses tout aussi inéludables lorsqu'il s'agit de la perte de la responsabilité qu'elles peuvent déterminer, l'épilepsie larvée par exemple.

Dans l'état actuel de la science, le rôle du médecin, *au point de vue pénal*, doit se limiter, me semble-t-il, à examiner si telle ou telle psychose abolit ou non la responsabilité, soit temporairement, soit de façon définitive.

Je crois qu'il ne lui est pas possible d'affirmer, en conscience, dans quelle mesure cette responsabilité pourrait être diminuée.

M. le Dr Verraeke. — Il est peu de questions plus controversées que celle de l'appréciation du degré de responsabilité pénale des hystériques et des hystéro-épileptiques ; aussi ne faut-il pas espérer

---

éducation philosophique pour le médecin ont été traitées devant la section par MM. Cuylits et Warlomont dans la séance du 26 octobre 1905 (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ, t. XXX, 1re Partie).

réaliser, sur ce point, l'accord théorique des diverses écoles de criminalistes. Ne vaudrait-il pas mieux, tout au moins provisoirement, apprécier les actes des criminels au point de vue pratique de la sécurité sociale, et substituer la notion de nuisance des délinquants à celle du degré de leur responsabilité ? Conscient ou non de ses actes, le délinquant dangereux doit être mis hors d'état de nuire.

D'autant plus que les incontestables progrès, réalisés en ces dernières années, dans le domaine de l'anthropologie criminelle, permettent de mieux se rendre compte de la constitution physique, de la valeur intellectuelle et morale des criminels. Grâce à une réorganisation scientifique du système pénitentiaire, on pourrait réserver à chaque catégorie de délinquants des établissements spéciaux : prisons, reformatories, prisons-asiles, asiles, où ils seraient soumis au traitement médical et réformateur qui leur convient, mais où ils subiraient aussi une peine adaptée à leur mentalité. Car, à la base du système pénitentiaire, il faut maintenir, même pour les irresponsables et les dégénérés, le principe de la punition, qui, à défaut d'amendement, saura leur inspirer la crainte du châtiment.

Le R. Père Castelein. — Je me lève, Messieurs, sur l'invitation d'un regard, le regard persuasif du Dr Warlomont. J'aime à croire que vous ne trouverez pas étrange de voir intervenir ici un professeur de Philosophie. Les sciences philosophiques et les sciences médicales habitent deux étages bien distincts, mais un escalier d'honneur les réunit, et parfois les communications entre les deux étages sont utiles pour l'éclaircissement de notions communes à ces deux ordres de sciences.

Ainsi, le problème soulevé par le Dr Cuylits est dominé par certains principes ressortissant aux sciences philosophiques.

Le premier de ces principes, bien reconnu par le Dr Vervaeke, concerne *le droit de punir* les criminels et, par suite, de les déclarer *responsables et coupables*. Le droit de punir ne dérive pas du principe de justice vindicative ; les pouvoirs publics ne sont pas chargés d'exécuter les arrêts de la Justice divine. Non, le droit de punir est un droit de légitime défense que possède le corps social, pour assurer le règne de l'ordre dans le respect des droits sociaux. Cette défense vis-à-vis des graves violations de ces droits, dont le premier est le droit à la conservation paisible de sa vie, doit être efficace, pour assurer la sécurité de tous contre les attentats toujours possibles des hommes sans foi ni loi, qui n'écoutent que l'intérêt ou la passion. De là, chez tous les peuples, la tradition juridique des peines afflictives et infamantes, pour inspirer une terreur qui sache refréner les impulsions, même les plus énergiques, de l'intérêt ou de la passion en grave conflit avec les droits d'autrui.

Mais ce droit de défense sociale ne peut, afin d'être efficace, dépasser, dans la peine, la mesure de la culpabilité, qu'implique la juste notion de la responsabilité et de la liberté. Voilà pourquoi les criminalistes, dans la confection des lois pénales, les juges et les médecins légistes qui leur prêtent leur concours, doivent commencer par reconnaître la liberté et la responsabilité des actes humains, accomplis dans l'état *normal* des facultés humaines. Arrière, en ce sujet, les théories, aussi fausses que funestes, des déterministes comme Lombroso et Ferri. Aussi ne saurais-je assez applaudir aux coupes claires, faites de maîtresse main par M. le Dr Cuylits, dans la forêt touffue des erreurs psychologiques, juridiques et sociales des savants matérialistes dont il a cité les opinions.

Mais quand l'acte criminel a-t-il été accompli hors de l'état normal des facultés humaines, hors des conditions, qui en fondent la liberté, et par suite la responsabilité, entraînant la justice d'une peine afflictive et infamante ?

Est-il vrai que le type du criminel-né de Lombroso, c'est-à-dire du criminel déterminé fatalement au crime par une dégénérescence atavique, se réalise toujours, ou même habituellement, parmi ces malheureux que condamnent nos lois et nos juges ? Non, MM., et puisque nous nous trouvons ici sur le terrain des faits, où l'on désire des preuves d'expérience, qu'il me soit permis d'invoquer une expérience personnelle. Dans une mission que j'ai prêchée jadis à la prison centrale de Louvain, et où j'ai eu les confidences de près d'une centaine de condamnés, j'ai pu conclure que, généralement, tous avaient parfaitement conscience de la liberté avec laquelle ils avaient commis leur crime et par suite de leur responsabilité dans la perpétration de ce crime, et du droit qu'avait la société de les punir. Cette preuve d'expérience personnelle, MM., concorde avec l'expérience collective de l'humanité tout entière. Qu'importe ici l'utopie forgée, hors des principes et hors des faits, sur l'enclume du matérialisme académique ?

Toutefois, à côté de la règle il y a l'exception. A côté de l'état normal ou ordinaire des facultés humaines dans la perpétration libre et consciente d'un crime, il y a des états *anormaux* où cette conscience et cette liberté peuvent faire défaut ; ce qui entraîne la suppression de la responsabilité morale et juridique du criminel, et par suite du droit de la société à lui infliger une peine proprement dite. Le droit de la défense sociale permet, seulement, la séquestration dans un asile, non la réclusion afflictive dans une prison.

Parmi ces états anormaux, il y en a un dont l'étude constituait le fond même de la conférence du Dr Cuylits, l'*hystérie*. J'ai surtout approuvé la partie négative et destructive de cette savante conférence, tendant à montrer que nous sommes ici en face du chaos. Sous le titre de phénomènes hystériques, on a groupé tous les phénomènes de troubles nerveux qui, dans l'état actuel de la science, ne peuvent encore recevoir de dénomination bien précise.

Nous sommes donc, ici, en présence d'une théorie d'ordre expérimental à l'état embryonnaire. Aussi, le Dr Cuylits a-t-il eu raison de déclarer qu'il n'existe pas de définition scientifiquement valable de l'hystérie. En effet, une bonne définition ne se trouve pas au point de départ d'une science qui se fait : c'est la conclusion ou le dernier terme d'une science faite.

Il faut donc orienter les enquêtes et les inductions prudentes, dans ce domaine ténébreux, vers une bonne définition. Or, MM., définir, c'est délimiter. On ne détermine bien l'objet d'une science qu'en distinguant nettement les faits, et les lois particulières qui constituent cet objet, des faits et des lois particulières qui y confinent, sans y pénétrer, du moins intégralement. Puisqu'il s'agit ici de méthode scientifique, et que la philosophie s'attribue quelque peu la législation générale des méthodes scientifiques, permettez-moi de vous dire comment j'entendrais la méthode d'observation et d'induction pouvant aboutir à une bonne définition, et à une connaissance vraiment scientifique de l'hystérie.

Il faudrait, me semble-t-il, en partant des notions actuellement confuses que ce nom signale, ramener les recherches à trois ordres de faits, entre lesquels existent des relations secrètes : un ordre de troubles nerveux assez graves, et offrant une durée soit stable, soit périodique ; un ordre de lésions ou d'altérations organiques affectant certaines parties déterminées du système nerveux, et ayant leur répercussion bien constatée sur ce premier ordre de troubles nerveux ; enfin un ordre de troubles psychiques proprement dits, affectant les actes de notre vie supérieure, tels que la mémoire, l'intelligence, la volonté, et en dépendance intime des troubles fonctionnels et, par ceux-ci, de saltérations organiques du système nerveux. On noterait ainsi, par exemple, des cas persistants ou périodiques d'amnésie, d'aboulie, d'associations exceptionnellement puissantes d'images émotives et impulsives, menant à des écarts de conduite bien caractérisés.

Dans cette enquête, où la prudence des inductions, qui préparent les éléments des conclusions, devrait toujours s'éclairer à la lumière des observations nettes et précises, on rejetterait dans les catégories des maladies nerveuses déjà connues, ce qui leur revient en propre et on retiendrait, pour en former un faisceau bien lié, les faits irréductibles à une de ces catégories. Ce faisceau de phénomènes étrangers, dans sa dépendance bien constatée des troubles fonctionnels, et peut-être de certaines altérations organiques des systèmes nerveux et des troubles psychiques supérieurs, pourrait recevoir ou la dénomination d'hystérie, ou plusieurs dénominations spéciales répondant quelque peu à l'idée assez vague et confuse, qu'on se forme actuellement, des phénomènes hystériques.

Cette théorie spéciale, ainsi bien analysée, on la condenserait dans une synthèse aussi claire et précise que possible, pour en déduire une définition scientifique de cette mystérieuse hystérie. La science en aurait fait évanouir le mystère, comme c'est son rôle de faire évanouir tous les mystères, bien entendu quand il ne s'agit que des mystères soumis à nos instruments et à nos observations. Le savant catholique sera toujours assez raisonnable pour ne pas méconnaître les distinctions de mystères naturels et surnaturels, fondées dans la raison et la nature des choses.

Voilà, MM., ce que s'est permis de vous exposer un modeste professeur de philosophie, dans cette savante réunion de médecins. S'il faut une excuse, c'est au Dr Warlomont à vous l'offrir en mon nom.

M. le Dr Streulens, qui remplace, à la présidence, M. le Professeur Desplats, empêché, remercie et félicite M. le Dr Cuylits et les membres qui ont pris part au débat. Parmi ceux-ci, il fait une mention spéciale du R. Père Castelein qui a bien voulu, cette fois encore, prendre part aux travaux de notre section, et lui apporter la contribution de son érudition et de son expérience, dans une question où les données d'une saine et haute philosophie ne peuvent être négligées.

M. le Dr Struelens présente, ensuite, *quelques considérations sur l'inhibition nerveuse, au point de vue de la responsabilité en matière criminelle.* Il rappelle une affaire criminelle qui s'est déroulée devant les Cours d'assises, au Mans, en 1904, mettant en cause un sieur Dézelé, prévenu d'avoir tué Émilienne Meurier.

Dans un moment de vivacité, Dézelé avait pris Émilienne Meurier par le cou ; celle-ci tomba à la renverse : elle était morte.

Ce procès revêtit un caractère sensationnel, moins par l'élément de la cause que par les conséquences juridiques qui s'en dégagent, les considérations d'ordre pratique qu'il suggère, et les discussions médico-légales qu'il a fait naître.

Le docteur Blaise, médecin expert près le tribunal du Mans, avait été requis par le juge d'instruction pour procéder à l'expertise médicale de la victime. Après avoir pratiqué l'autopsie, ce praticien conclut, dans un rapport clair et complet, à une strangulation à la main, ayant entraîné l'asphyxie de Melle Meurier.

Le rapport du Dr Blaise fut soumis à l'appréciation du professeur Brouardel, de Paris, mais ne rencontra pas son adhésion. L'illustre professeur de médecine légale estima que les conclusions du Dr Blaise étaient trop absolues, et, dans un exposé richement documenté, il établit que ce n'est pas l'asphyxie qui détermina la mort de la femme Meurier ; que celle-ci avait succombé à une *inhibition nerveuse*, c'est-à-dire à un arrêt subit du cœur et de la respiration, à la suite du serrement brusque du larynx, ou l'excitation des nerfs laryngés supérieurs.

M. Brouardel démontra que tous les symptômes, établis par l'enseignement classique de la médecine légale comme constituant le facies caractéristique de l'asphyxie, peuvent se rattacher au mécanisme pathologique de l'inhibition nerveuse.

Dans l'occurrence, l'intervention du Dr Brouardel eut pour conséquence de réduire l'accusation à une simple question de coups et blessures, ayant entraîné la mort sans l'intention de la donner. Les circonstances atténuantes furent accordées au prévenu, condamné par la Cour à trois ans de prison.

Il résulte de ce qui précède, conformément aux données de l'expérience et de l'enseignement clinique, que des excitations périphériques, même peu violentes, peuvent déterminer une mort instantanée. Mais il appert des observations de Brouardel, de Claude Bernard, Rosenthal, Paul Bert, Hoffmann, etc., que c'est la région antérieure du cou (la région laryngée) qui constitue le territoire le plus fécond pour l'éclosion de ces accidents graves.

Le professeur Thoinot signalait, récemment, à la Société médicale légale de Paris, un exemple frappant d'une mort, attribuée à la strangulation par la main, et qu'il fallait, en réalité, considérer comme relevant du mécanisme de l'inhibition laryngée.

Dans le même ordre d'idées, je pourrais vous narrer l'histoire de trois détenus à la prison de St-Gilles.

Les deux premiers s'étaient pendus au moyen d'un lien, fabriqué avec leurs draps de lit, et l'enquête administrative a démontré que la pendaison n'avait pas duré plus de trois minutes. Dans ces deux cas, il y a lieu de penser que la mort a été occasionnée par la compression du nerf laryngé, et l'inhibition nerveuse qui a donné lieu à l'arrêt spontané du cœur et de la respiration.

Dans un troisième cas, l'individu ne donnait plus signe de vie, mais grâce à la respiration artificielle, il est revenu à la vie, après un travail des plus laborieux qui a duré une heure. Il n'est pas invraisemblable, que si dans les deux premiers cas on avait déployé la même persévérance, on aurait pu sauver l'existence de ces deux individus.

Cela me rappelle un autre fait non moins intéressant. Il s'agit d'un gamin âgé de 17 ans, qui avait tué une fille qui avait renoncé à son affection. Dans un moment de désespoir, il se jeta du haut de la 2e galerie de la prison de St-Gilles. On le ramassa, et il ne donna plus signe de vie, mais ne présenta aucune lésion organique apparente. Le choc avait produit une inhibition nerveuse, un arrêt fonctionnel du cœur, de la respiration et ce n'est qu'après deux heures de respiration artificielle, de frictions, etc. que ce jeune homme est revenu à lui, n'accusant plus aucun symptôme morbide, le lendemain de l'accident.

L'inhibition nerveuse constitue un acte réflexe. Une excitation du système nerveux peut provoquer, à distance, un arrêt fonctionnel, et si l'excitation est suffisamment intense et qu'il s'agisse d'une fonction nécessaire à la vie, la mort en sera la conséquence. Mais la clinique nous apprend en même temps que cet arrêt fonctionnel peut n'être que momentané, et qu'une intervention énergique et persévérante peut triompher de l'inhibition nerveuse, en réveillant l'activité de l'organe au repos.

Il est à remarquer que l'inhibifion nerveuse ne se rattache pas exclusivement à des excitations physiques ; elle est souvent la conséquence d'impressions morales, d'émotions violentes, la crainte, la joie etc., et la littérature médicale, comme les faits divers que nous relatent les journaux, nous en donnent de fréquents exemples.

Dans la plupart des cas, on attribue la mort de ces personnes à des causes diverses, telles que la rupture d'un anévrysme, etc. Mais la détermination de ces causes de décès est généralement hypothétique, et il y a lieu de penser que si l'on avait prodigué à ces malheureux les premiers secours préconisés pour les cas de mort apparente, bien souvent on aurait pu les ramener à la vie.

Le meurtre de l'avocat Nols, dans l'affaire Brandenburger à Liége, trouve encore sa place ici. L'autopsie a prouvé que H. Nols n'est pas mort des suites de blessures occasionnées par le revolver, mais qu'il a succombé à une inhibition nerveuse, et les débats ont démontré qu'aucune tentative n'avait été faite pour ramener la victime à la vie. Le juge prit en considération ces faits dans l'application de la peine.

M. le Dr Swolfs. — Les faits si intéressants que notre sympathique collègue M. le Dr Struelens vient de nous relater, foisonnent dans la littérature médicale. Ils sont sous la dépendance d'un phénomène nerveux très étudié par les physiologistes, et parfaitement connu aujourd'hui : *le choc nerveux.*

On désigne sous ce nom un complexus symptomatique essentiellement caractérisé par des phénomènes inhibitoires et dynamogéniques, *et notamment par un arrêt des échanges entre le sang et les tissus.* Le choc nerveux peut se produire à la suite de toute violente excitation du système nerveux. L'arrêt des échanges est constant, et indispensable.

Vous connaissez tous cette expérience de laboratoire, bien classique, qui consiste à mettre la grenouille en état de choc nerveux, en lui pinçant violemment la peau du ventre, et vous savez également tous combien, à l'état normal, l'animal est sensible à des doses excessivement faibles de strychnine. Dans l'état de choc nerveux, ce poison introduit directement dans les vaisseaux ne produit aucun accident ou ne commence à agir que lorsque la grenouille sort de sa torpeur. C'est qu'il y avait syncope des échanges entre le sang et les tissus.

Les causes les plus diverses peuvent déterminer le choc nerveux. Outre les douleurs viscérales, coliques, hépatiques ou néphrétiques, lésions du testicule etc., l'angine de poitrine, les violentes excitations des terminaisons nerveuses cutanées transmises aux centres nerveux par mécanismes réflexes, l'action du chloroforme, etc. ; les lésions du larynx peuvent produire ce phénomène inhibitoire : les pendus meurent par asphyxie ou par *choc nerveux*. On a vu des chocs, souvent graves et parfois mortels, occasionnés par une vive émotion morale : la frayeur, la crainte, le chagrin ou la joie.

Roger affirme que des hommes sont morts parce que l'on avait fait le simulacre de les tuer.

Mausell-Moulin raconte que des étudiants se saisirent d'un surveillant, et lui annoncèrent qu'ils allaient lui trancher la tête ; ils l'agenouillent, lui bandent les yeux, et le frappent à la nuque avec une serviette mouillée ; quand on le relève, il avait cessé de vivre.

Page cite le cas d'un employé du chemin de fer, amené à l'hôpital dans un état de choc des plus alarmants. Le pied, disait-on, avait été broyé par une machine. On l'examine, et l'on constate que la roue n'avait écrasé que le bout de sa botte.

Toutes les excitations, viscérales ou cutanées, transmises aux terminaisons du nerf grand sympathique, occasionnent fréquemment aussi le choc nerveux. Il est donc indispensable que le médecin se rappelle l'anatomie et la physiologie de ce nerf si important, et les régions particulièrement innervées par lui.

Il serait profondément regrettable que la plupart de nos confrères méconnussent ces notions, alors que tant de choses inutiles leur sont encore enseignées.

MM. les Drs Cuylits et *Warlomont* présentent, à leur tour, quelques observations.

Avant de se séparer, la section procède à l'élection de son Bureau : elle renouvelle le mandat de celui de l'année écoulée :

Président, M. le Professeur Desplats, de Lille.
1er Vice-Président, M. le Dr Dufrane.
2e Vice-Président, M. le Dr Streulens.

M. le Dr De Lantsheere a résigné ses fonctions de secrétaire. M. le Dr Struelens se fait l'organe de ses collègues en exprimant le regret que leur cause cette détermination, et en remerciant M. De Lantsheere du dévouement incessant et fécond avec lequel il s'est consacré à la prospérité de la quatrième section. M. le Dr Warlomont accepte le succession de M. le Dr De Lantsheere, et remercie.

Cinquième Section

Lundi 19 avril 1909. — Les membres de la section, conduits par M. J. Nyssens-Hart, administrateur délégué de la Compagnie des Installations Maritimes de Bruges, ont visité le port de cette ville. Ils ont pris place ensuite sur un des bateaux de la Compagnie et ont fait la traversée du canal maritime qui relie Bruges à Zeebrugge. Ils ont visité le port d'escale et admiré ses installations et son môle aux proportions hardies et impressionnantes. La cinquième section tient à adresser ici ses bien vifs remerciements à M. Julien Nyssens qui a organisé avec une parfaite bonne grâce cette excursion intéressante, qu'un temps superbe a favorisée.

Mardi 20 avril. — La séance a eu lieu sous la présidence de M. Beernaert. M. G. Blondel a présenté la monographie du *port de Rouen,* et le R. P. Jean Charles celle du *port de Brême* (*).

(*) La monographie de Brême a paru dans la livraison d'avril de la Revue des Questions scientifiques. Les autres monographies seront publiées dans les prochaines livraisons.

Mercredi 21 avril. — M. Dewavrin a présenté la monographie du *port de Montréal*. Le P. Charles a résumé le travail envoyé par M. A. Fauvel sur le *port de Shanghaï*. La séance était présidée par M. Blondel, qui a occupé aussi la présidence le lendemain.

Jeudi 22 avril. — Cette séance a été consacrée à l'audition du travail de M. A. Roersch sur le *port de Pouzzoles*.

Un échange de vues a eu lieu ensuite sur les travaux présentés, notamment sur le port de Pouzzoles. A cette discussion ont pris part MM. Blondel, le marquis de la Boëssière, Francotte, Roersch, Morisseaux, Van der Smissen.

Sixième section

Mardi 20 avril 1909. — Le B^{on} G. de Béthune fait une communication sur *l'aviation, ses récents progrès, les problèmes à résoudre*. On la trouvera *in extenso* dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 juillet 1909 ; en voici un résumé :

L'auteur se propose un double but : présenter les éléments caractéristiques de plusieurs aéroplanes existants, en les groupant dans un ordre logique et en les ramenant à leurs principes ; signaler à l'attention des techniciens les problèmes à résoudre et, tout particulièrement, l'étude des lois de la résistance de l'air.

Les appareils d'aviation sont conçus pour obtenir le *vol mécanique* de l'homme ; ils cherchent tous à produire et à utiliser la force de résistance exercée par l'air sur un corps en mouvement. D'après la manière dont ils produisent cette force, ils se rangent en trois catégories : ornithoptères, hélicoptères, aéroplanes. Il n'est parlé que de ces derniers.

Ce sont des appareils à sustentation par surfaces planes soumises au choc oblique de l'air. Ils comportent les organes suivants :

1) Une ou plusieurs ailes ou surfaces sustentatrices ;
2) Une ou deux hélices actionnées par un moteur ;
3) Des organes stabilisateurs ;
4) Des organes de direction ;
5) Des dispositifs de départ et d'atterrissage.

Comment ces différents organes sont-ils conçus et réalisés? D'une façon différente par chaque constructeur : les éléments caractéristiques des aéroplanes Wright, Ferber, Voisin (Farman, Delagrange), Blériot, Esnault-Pelterie, Clément-Bayard, Antoinette, Vendôme, Santos-Dumont, Goupy, Astra et ceux de l'*Aerial experiments Association* sont examinés successivement.

Les principaux problèmes à résoudre sont :

1) Moteur : régularité et durée d'emploi ;

2) Direction et équilibrage : docilité et efficacité.

Faut-il accorder la préférence à l'équilibre commandé soit par l'aviateur, soit par un organe automatique, ou bien à l'équilibre automatique par des combinaisons de surfaces?

3) Propulseur : théorie générale de l'hélice ;

4) Étude générale de la résistance de l'air qui comprend l'étude du propulseur.

Le B^{on} G. de Béthune propose, en conclusion de sa communication, que la section technique adopte comme question de concours : *l'étude de la résistance de l'air au point de vue particulier de l'aviation.*

Cette proposition donne lieu à une discussion à laquelle prennent part MM. Cousin, Lagasse-de Locht et de Béthune.

Faut-il limiter les recherches au point de vue particulier de l'aviation? — D'autre part, n'y a-t-il pas disproportion évidente entre les ressources dont la Société scientifique dispose pour récompenser les mémoires couronnés par les différentes sections, et les frais qu'entraîneront pareilles recherches?

M. de Béthune répond que cette étude se fait à d'autres points de vue que celui de l'aviation par différents spécialistes : artilleurs, ingénieurs des chemins de fer; partout, d'ailleurs, on entreprend des études d'aérodynamique au point de vue spécial de l'aviation, et il serait à souhaiter que la Société scientifique prît part au mouvement contemporain de la conquête de l'air. La modicité de son allocation, en regard des dotations importantes affectées ailleurs au même sujet, ne peut laisser aucun doute sur ses intentions puisque le règlement est formel et ne permet pas de dépasser 500 francs pour le concours d'une section.

La question proposée par M. de Béthune est finalement adoptée.

La section procède au renouvellement de son bureau ; sont nommés :

Président : M. De Preter.
Vice-présidents : M. Daubresse,
M. Renaud.
Secrétaire : M. A. Crame.

Mercredi 21 avril. — M. Goedseels présente une note sur *le réglage des lunettes, des théodolites et des instruments astronomiques.* La section décide d'en confier l'examen à deux de ses membres. Sont nommés rapporteurs : MM. le Bon Greindl et le Bon de Béthune.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 20 AVRIL 1909

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence de M. G. Lemoine, membre de l'Institut, président en exercice de la Société scientifique.

La parole est donnée à M. Mansion, secrétaire général, pour la lecture du rapport suivant sur les travaux de la Société en 1908-1909.

La mort de A. de Lapparent. L'année 1908-1909 de notre Société a été marquée à son début par une catastrophe à laquelle on ne peut comparer que celles de 1889 et de 1892, quand nous avons perdu inopinément le P. Carbonnelle et Gilbert. Dans la nuit du 4 au 5 mai dernier, la mort nous a enlevé Albert de Lapparent, « le représentant le plus autorisé de la géologie, en France, une des gloires les plus pures de la science catholique, le champion et le soutien de toutes les nobles causes et de toutes les œuvres généreuses. La Société scientifique de Bruxelles perd en lui, un des plus éminents parmi ses membres honoraires ; un ami de la première heure, fidèle toujours et dévoué sans mesure ; le collaborateur si apprécié de sa Revue et le conférencier si souvent applaudi de ses Congrès. Et elle le perd au moment même où elle se préparait à lui offrir un témoignage solennel d'estime et de reconnaissance ». Le Conseil lui avait décerné, en effet, cinq jours avant sa mort, la médaille de la Société en témoignage de sa profonde gratitude.

On trouvera dans les pages émues que lui a consacrées une plume sympathique, dans la Revue de juillet 1908, et auxquelles nous avons emprunté les quelques lignes qui précèdent, une notice où sont rappelées en détail ses relations avec la *Société scientifique ;* dans la Revue de juillet 1909, un des confrères de de Lapparent à l'Institut, spécialement compétent appréciera, comme elle doit l'être, l'œuvre scientifique du maître éminent que nous avons perdu. Ces deux notices réunies le feront connaître tout entier, si j'ose ainsi dire.

Qu'il nous soit permis cependant d'y ajouter quelques mots pour montrer en quelle estime on tenait de Lapparent dans les hautes sphères de l'Église et quelles grandes ambitions notre dévoué confrère avait pour la *Société scientifique de Bruxelles.* Nous les empruntons à un discours prononcé le 10 juin 1908, à l'assemblée générale de la *Société bibliographique.* Mgr Amette, archevêque de Paris, voulant rendre, au nom de M. de Lapparent, un hommage à la *Société scientifique de Bruxelles,* a fait à ses auditeurs la confidence suivante :

« Il y a quelques mois, revenant de Rome, après mon voyage de novembre, j'avais été chargé par le grand cardinal que S. S. le Pape Pie X a placé à la tête de l'Association scientifique internationale des catholiques créée par Lui, afin de montrer qu'en même temps qu'Il condamnait les abus de la science et la fausse science, comme tous les prédécesseurs et comme l'Église l'a toujours fait, Il désirait encourager, promouvoir le développement de la vraie science ; j'avais donc été chargé par le cardinal Rampolla, président de cette Association en formation, de demander à M. de Lapparent de la représenter en France, et j'avais été, vous le pensez bien, particulièrement heureux de cette justice rendue, au nom du Chef de l'Église, à notre grand savant catholique français. Et lorsque je m'ouvris à M. de Lapparent du dessein que j'étais invité à lui communiquer, il me demanda la permission de représenter au Saint-Siège que le noyau de cette Association scientifique internationale catholique que le Pape voulait fonder existait quelque part et que c'était précisement la *Société scientifique de Bruxelles*. Il me fit alors l'éloge des travaux auxquels cette Société modeste, mais déjà puissante, s'était livrée et il exprima le vœu que l'Association que le Saint-Père avait l'intention de créer fût tout simplement le développement de la *Société scientifique de Bruxelles*, étendu à l'univers tout entier » (Bulletin de la Société Bibliographique, août 1908, t. XXXIX, pp. 116-117).

Évidemment nous ne pouvons avoir des espérances aussi hautes pour la *Société scientifique de Bruxelles*, mais l'ensemble des Sociétés analogues à la nôtre, comme la *Société bibliographique* de Paris, la *Goerresgesellschaft*, d'autres encore pourront fournir quelque jour à l'*Association scientifique internationale supérieure* désirée par S. S. Pie X, des éléments de force et de succès.

Publications. La Société a fait paraître, depuis le 1^{er} avril 1908 jusqu'au 1^{er} avril 1909, les trois derniers fascicules et deux suppléments du tome XXXII des Annales, correspondant à l'année sociale 1907-1908, un fascicule du tome XXXIII de l'année actuelle 1908-1909, et quatre livraisons de la Revue des Questions scientifiques.

1° Annales. Le tome XXXII des Annales, avec ses deux suppléments est un gros volume de 740 pages que l'on peut subdiviser de la manière suivante :

Documents administratifs	95 pages
Sciences mathématiques	75 pages
Sciences physiques	80 pages
Sciences naturelles	350 pages
Sciences médicales	90 pages
Sciences économiques	10 pages
Sciences techniques	40 pages

On voit que, en 1907-1908, les mathématiciens n'ont plus envahi une trop grande place ; ce sont plutôt les naturalistes qui ont eu la grosse part du volume, ce qui se justifie aisément, puisque des sciences très diverses sont réunies dans le programme de la troisième section. Les travaux de la section des sciences économiques, et, en particulier, la suite de l'enquête sur les ports, n'ont pas été publiés dans les ANNALES, mais dans la REVUE, comme aussi l'étude originale de M. J.-H. Fabre sur la *Chenille du chou.*

Parmi les mémoires du tome XXXII des ANNALES, nous signalerons surtout les deux suppléments : celui de M. Leplae, intitulé : *une carte agronomique de la Belgique est-elle actuellement réalisable ?* qui a servi et servira encore de base ou de point de départ à des discussions et à des études dans la troisième section ; celui de M. Desplats, *de la dépopulation par l'infécondité voulue*, qui a eu, dans le public sérieux de France et de Belgique, un retentissement si considérable, que la Société a dû en publier une seconde édition.

2° REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Les livraisons d'avril, juillet, octobre 1908, janvier 1909, renferment plus de vingt articles principaux dont voici la liste par ordre de matières :

1. *R. P. Lefebvre*, S. J. A propos d'une histoire de mathématiques.
2. *M. d'Ocagne.* Les femmes dans la science.
3. *G. Vandermensbrugghe.* Aventures d'une parcelle solide plongée dans l'eau.
4. *R. P. Thirion*, S. J. Pascal, l'horreur du vide et la pression atmosphérique.
5. *R. P. Thirion,* S. J. Le mouvement brownien.
6. *R. P. Thirion*, S. J. L'éther et les théories optiques.
7. *G. Lemoine.* L'unité de la matière et la détermination des poids atomiques.
8. *A. Nodon.* L'action électrique du soleil.
9. *A. Nodon.* Les phénomènes solaires et la physique terrestre
10. *J.* Le siège de Port Arthur.
11. *J.* La campagne de Mandchourie de Séoul à Moukden.
12. *X.* A. de Lapparent.
13. *X.* A. Béchamp.
14. *É. de Wildeman.* A propos de caoutchoucs.
15. *J.-H. Fabre.* La chenille du chou.
16. *L. Siret.* Tyriens et Celtes en Espagne.

17. *J. Capart.* Les palettes en schistes de l'époque primitive.

18. *J. M.*, S. J. A propos du sentiment de présence chez les profanes et les mystiques.

19. *L. Boule.* Responsabilité normale et pathologique.

20. *P. Fontainas.* La situation économique de l'Afrique du Sud.

21. *E. Tibbaut.* Les forces latentes des campagnes.

22. Les ports et leur fonction économique. Gènes par *M. Theunissen.* Ostende par *Th. L. Léger.* Jaffa par *P. Gendebien.* Lisbonne par *Ch. Morisseaux.* Le Havre par *G. Blondel.* Hambourg par *P. de Rousiers* et le *R. P. J. Charles,* S. J. Rio de Janeiro par *F.-A. Georlette.* Hankow par *A. Vanderstichel.* Barcelone et Bilbao par le *R. P. Charles,* S. J. Buenos-Ayres par *Theunissen.*

23. *C. de Kirwan.* Une nouvelle apologie scientifique.

24. *C. de Kirwan.* L'unité de l'univers et de l'homme dans l'univers.

Parmi ces articles m'est-il permis d'en signaler quelques-uns : la notice si sympathique sur *de Lapparent*, dont j'ai déjà parlé plus haut ; la conférence de notre cher président sur l'*unité de la matière*, si solide et si prudente ; la grande étude économique sur les *ports*, qui se complète d'année en année de manière à devenir un magnifique ouvrage et qui nous a valu les éloges de S. A. R. le Prince Albert de Belgique ; le bel article de M. Tibbaut sur les *forces latentes des campagnes*, dont j'ai signalé en 1908, la haute portée pratique ; enfin la nouvelle étude du P. Thirion sur *Pascal*, à propos de la publication des trois premiers volumes des Œuvres de l'auteur des *Pensées,* dans la *Collection des Grands Écrivains de France.* Le P. Thirion y met en relief, mieux que les éditeurs eux-mêmes, ce fait capital, dans les discussions relatives à l'originalité de Pascal en Physique, que c'est Roberval qui le premier, en France, a mis en évidence, en 1648, le phénomène de l'élasticité de l'air et en a vu toute la portée pour l'explication des expériences sur le baromètre.

La Revue contient en outre, en petit texte, de deux à trois cents pages consacrées à la Revue des périodiques sur l'histoire des mathématiques, l'astronomie, la physique, la botanique économique, la géographie, les sciences agricoles, puis l'analyse plus ou moins développée de quatre-vingt-sept ouvrages relatifs aux mêmes sciences, et en outre aux mathématiques, à la chimie, à la technologie, à la géologie, à l'agriculture, à l'anthropologie et à la philologie.

Nous faisons appel au zèle de nos membres pour que les sciences biologiques et médicales soient un peu plus représentées dans la partie en petit texte de la Revue ; il importe qu'elle continue, comme par le passé, à tenir ses lecteurs au courant des grands mouvements scientifiques dans tous les domaines où s'exerce l'activité de notre Société.

Sessions. Pendant la session de Pâques 1908, nos conférenciers ont été, d'abord M. Morisseaux, qui nous a fait connaître l'un des ports les mieux dotés par la nature, celui de Lisbonne, auquel, malheureusement pour le Portugal, l'industrie et l'activité des hommes n'ont pas donné jusqu'à présent un *hinterland* suffisant ; M. Lemoine nous a entretenus d'un sujet assez austère : *l'unité de la matière et les poids atomiques* qui se trouve aux confins de la philosophie et de la science. Le dernier jour, M. Meuwissen nous a montré *la genèse d'un grand transatlantique moderne* en homme vraiment compétent, puisqu'il est l'un des ingénieurs qui ont contribué à la construction du géant des mers, en ce moment-là au moins, le *Mauretania.* Ai-je besoin de vous rappeler que S. A. R. le Prince Albert de Belgique avait bien voulu ce jour-là assister à notre séance générale et que notre vénéré Président d'honneur, M. Beernaert, nous présidait effectivement.

Dans cette session de Pâques, M. Haibe, directeur de l'Institut bactériologique de Namur, a obtenu le prix au concours de la quatrième section pour une *Étude sur la vaccination antituberculeuse ;* c'est des mains de S. A. R. le Prince Albert qu'il a reçu à cette occasion la médaille de la Société.

Notre session d'octobre s'est tenue à Anvers et, il faut bien l'avouer, elle n'a pas eu le succès que nous étions en droit d'espérer. Malgré le talent de notre conférencier, M. de Wildeman qui nous a parlé des *caoutchoucs* à la fois aux points de vue scientifique et utilitaire, malgré le grand nombre de communications intéressantes annoncées, nous n'avons pas eu, soit à notre réunion générale, tenue pourtant à huit heures du soir, soit dans les sections, un auditoire digne de notre grande métropole commerciale. Nous devrons faire une croisade scientifique à Anvers.

Au contraire, notre session de janvier 1909, à Bruxelles, a parfaitement réussi. Notre conférencier de l'assemblée générale, M. le Dr Haibe, nous a exposé avec une clarté admirable même pour les profanes, la question du cancer.

Nous ne dirons rien des travaux des sections pendant l'année écoulée : on y a fait plus de quatre-vingts communications grandes ou petites qui paraîtront ou ont paru *in extenso* ou en résumé dans les Annales ou la Revue. Je ne fais d'exception que pour la section de médecine où le rapport de M. Desplats *sur la dépopulation* a produit une si grande impression, et pour la section de sciences naturelles où dans deux séances extraordinaires, tenues le 17 mars et le 16 mai, on a amorcé la question de la carte agronomique de la Belgique.

État actuel de la Société. La mort nous a cruellement frappés en nous enlevant M. de Lapparent, puis quatre autres de nos membres, qui étaient avec nous, comme lui, depuis l'origine de la Société : M. Béchamp dont j'ai dit un mot l'an dernier, Mgr F. de Béthune, et Mgr Van den Branden de Reeth, archevêque de Tyr, i. p. i., qui avait présidé notre réunion à Malines, en 1907 ; ensuite, il y a quelques jours, M. l'abbé de Foville, l'un des directeurs du grand Séminaire de S. Sulpice. M. de Foville avait été élève à l'École polytechnique dans la promotion (1859) qui a suivi celle de notre Président et de Lapparent. Il en était sorti second, puis, après deux ans d'École de mines, il était entré au Séminaire. Il fut d'abord disciple de Gratry, ce grand et noble esprit qui, dans la première partie de sa vie, prêcha si éloquemment l'alliance de la *philosophia perennis* avec la science d'une part, la théologie de l'autre. L'abbé de Foville s'attacha ensuite à la Société de S. Sulpice et devint, comme nous l'avons dit, l'un des directeurs du grand Séminaire de cette congrégation qui a donné tant de saints prêtres et tant d'hommes distingués à la France. L'abbé de Foville a été membre de la Société scientifique dès 1876 et il a écrit dans la Revue des études remarquables sur les premières pages de la Bible. Sa vie et sa mort ont été celles d'un saint, nous écrit-on, et resteront pour ceux qui l'ont connu, un exemple et une force. Citons encore Kennis, ingénieur, le R. P. Camboné, S. J., apôtre de la Foi et de la science, à Madagascar, E. Gilson, professeur à l'Université de Gand.

Nous avons admis trente-cinq nouveaux membres en 1908 ; la mort et les démissions nous en ont fait perdre vingt-quatre, de manière que le nombre total des membres ne s'est accru que de onze. Nous étions 508 au 1er janvier 1908, 519 au 31 décembre.

De nombreuses distinctions scientifiques ou honorifiques ont été accordées à nos membres. Le R. P. Schmitz, MM. Dubois, J. De Greef, Proost, Cartuyvels ont été nommés chevalier, officiers, ou commandeur de l'ordre de Léopold. M. Barrois a été élu associé, M. de la Vallée Poussin membre, de l'Académie royale de Belgique, M. Cousot, membre de l'Académie de médecine. MM. Vandersmissen et Hermant ont été nommés membres du Conseil supérieur du travail. La Société des sciences de Lille a décerné à M. le Vicomte de Montessus, professeur à l'Université catholique de cette ville, le grand prix Kuhlmann.

Nous adressons nos félicitations à tous, au nom de la Société, et nous souhaitons que chaque année s'accroisse le nombre de ceux qui, en obtenant de semblables distinctions augmentent le patrimoine d'honneur de notre chère *Société scientifique de Bruxelles*.

M. le Secrétaire général propose de nommer commissaires pour l'examen des comptes du Trésorier, M. Ch. de la Vallée Poussin et le P. Thirion. Cette proposition est adoptée.

La parole est ensuite donnée à M. le D^{r} Vervaeck, pour une conférence avec projections sur *Les empreintes digitales. Les bases scientifiques de la dactyloscopie et ses applications judiciaires.*

Cette conférence est publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 juillet 1909.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 21 AVRIL 1909

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence de M. G. Lemoine, président de la Société.

La parole est donnée à M. Mansion pour la lecture du rapport suivant, de M. le Comte Domet de Vorges, empêché d'assister à la réunion, sur les travaux de la *Société bibliographique de Paris en 1908-1909*.

Il y a différentes fortunes pour les sociétés comme pour les individus. Quand nous venons à la Société scientifique de Bruxelles, nous y trouvons presque chaque fois quelque chose de nouveau et d'imprévu. Les progrès de la science apportent chaque année des solutions nouvelles à des questions anciennement posées. Ces solutions elles-mêmes font naître d'autres questions que l'année suivante verra peut-être résoudre, dans une chaîne infinie qui ne se terminera sans doute qu'avec l'existence de l'humanité.

La Société bibliographique est beaucoup plus calme, les événements imprévus y sont rares, parce que sa tâche principale est toujours la même : faire pénétrer la vérité historique et sociale dans tous les milieux. La vérité par définition est immuable ; la rétablir dans un milieu corrompu par le travail de plusieurs générations d'écrivains appliqués à la fausser est une œuvre de longue haleine et qui demandera encore bien des années.

Notre instrument principal pour ce travail d'apostolat, ce sont les bibliothèques circulantes. Chaque année s'augmente le nombre des demandes, elles ont été de cent vingt-six en 1908. Au début de l'année 1909, il existait quatre cent et un dépôts, comprenant 701 séries de 25 volumes, ce qui porta le nombre des volumes en circulation à 17 675. Ce nombre apparaît considérable ; il est encore trop petit pour que la Société puisse étendre partout son influence. Aujourd'hui tout le monde lit, et Dieu sait en combien d'endroits la mauvaise presse est encore la seule qui pénètre.

Ce n'est pas tout de répandre de bons livres, il faut en faire ; c'est la tâche dévolue à la Conférence des études historiques. Cette conférence, établie depuis longtemps par le marquis de Beaucourt, a eu des membres nombreux qui ont marqué dans l'étude de notre histoire. Citons tout d'abord M. de Beaucourt lui-même, puis M. Marius Sepet, M. Léon Gauthier, M. l'abbé Duchesne, aujourd'hui de l'Institut, M. de Grandmaison, M. Paul Allard, M. Goyau, le P. Pierling, etc. La mort de M. de Beaucourt l'avait un moment désorganisée. Elle vient d'être reconstituée sous la présidence de M. Frédéric Duval. Elle a repris ses travaux le 4 août de l'année dernière. Elle peut compter sur un groupe de travailleurs actifs, la plupart anciens élèves de l'École de Chartes, tels que MM. Augustin Cochin, Ledos, de la Roncière, Paul Deslandre, Gustave Gautherot et autres. La conférence se propose non seulement de faire des travaux d'érudition, mais aussi et peut-être surtout des travaux de vulgarisation sur les questions historiques et sociales qui tiennent une si grande place dans les préoccupations contemporaines.

Vous savez déjà que pendant la réorganisation de la conférence des études historiques, la Société n'en a pas moins travaillé. C'est dans ce temps qu'elle a publié ce beau volume de l'Épiscopat français qui a obtenu la bénédiction du Souverain Pontife et les éloges d'un grand nombre d'évêques. La souscription à cet ouvrage est aujourd'hui close, bien qu'on ait augmenté le nombre des exemplaires à souscrire. Mais il reste en vente chez le libraire un certain nombre de volumes au prix de 12 francs, soit 10 francs (11 francs franco par la poste) pour les membres de la Société bibliographique. Il a été fait hommage d'un exemplaire relié à votre Secrétaire général, comme témoignage de l'union des deux Sociétés.

M. Mansion veut bien nous faire espérer sa présence à notre prochaine assemblée générale qui aura lieu le 25 mai et sera présidée par M. Taudière, jurisconsulte éminent et professeur de droit à l'Institut catholique de Paris. Notre dernière assemblée le 11 juin 1908 avait eu l'honneur d'être présidée par l'archevêque de Paris. Mgr Amette a bien voulu déclarer qu'il considérait la Société bibliographique moins comme un centre d'études historiques que comme un œuvre d'apostolat. Il a pris texte de notre rapport sur la Société scientifique de Bruxelles pour confirmer l'éloge que nous avions cru devoir faire de notre éminent collègue M. de Lapparent si prématurément enlevé à la science catholique dont il était le représentant le plus en vue, et il nous a entretenus du projet formé par Pie X d'une grande association scientifique internationale des catholiques. M. de Lapparent devait être désigné pour la représenter en France, d'autant qu'elle ne devait pas être autre chose, suivant la parole de l'illustre académicien, que la Société scientifique de Bruxelles étendue à l'univers entier.

Notre Société a été attristée cette année par la mort de M. Boyer de Bouillane, membre du Conseil. M. Boyer de Bouillane était entré dans la magistrature après de brillantes études. Tout lui présageait une belle carrière. Mais à l'apparition des décrets de 1880 contre les congrégations, il préféra briser sa carrière plutôt que d'appliquer une législation inique. Depuis cette époque, il se dévoua à toutes les grandes causes catholiques. On se rappelle sa magnifique protestation lorsque le gouvernement français, violant ouvertement le droit international, s'empara des papiers diplomatiques de la Nonciature.

Il est mort, immobilisé depuis de longs mois par la souffrance. Sa tête était restée libre. Il supportait avec la résignation la plus chrétienne ses douleurs et son inactivité forcée, employant ses derniers moments à la défense de la foi et de l'Église. Nous avons plein espoir que Dieu lui aura tenu compte de son dévouement et de sa soumission filiale au jour de l'épreuve, et qu'il prie aujourd'hui pour cette Société bibliographique qui lui était si chère afin d'obtenir pour elle ce surcroît de lumière et d'activité dont elle a besoin en ces temps de vérités diminuées, où l'erreur pénètre partout et où les foules n'ont plus d'autre passion que la fureur des jouissances matérielles.

La parole est ensuite donnée à M. le B^{on} Greindl pour une conférence, avec projections, sur *les Préalpes*.

Cette conférence sera publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 29 AVRIL 1909

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence de M. Lemoine, président de la Société.

La parole est donnée à M. Mansion, secrétaire général, qui fait connaître les conclusions des commissaires chargés d'examiner les comptes du trésorier relatifs à l'année 1908. Ces comptes sont approuvés par l'assemblée. En voici les détails et le résumé :

RECETTES ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE PENDANT L'ANNÉE 1908

Revue des Questions scientifiques

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des abonnements fr.	8975,48	Impression, illustration et distribution fr.	6163,04
Vente d'anciennes livraisons.	181,80	Collaboration	4232,50
Vente des volumes « Les Ports et leur fonction économique ».	130,65	Impression du tome III « Les Ports et leur fonction économique »	343,95
Subside de la Société	1941,32	Administration et propagande	489,76
	11229,25		11229,25

Annales

Produit des cotisations.	6902,50	Impression, illustration et distribution	2990,25
Vente d'anciens volumes	51,00	Impression de deux suppléments	440,20
Vente des brochures « Le Fœticide médical. De quelques points de morale sexuelle, et de la dépopulation ».	152,50	Indemnités aux secrétaires	2660,90
		Frais de session, location des locaux, etc.	812,90
	7106,00		6904,25

Société

Produit des coupons (capital social)	3730,64	Prix décerné	500,00
Intérêts du compte courant	733,85	Frappe de médailles	75,40
	4464,49	Transport du magasin	250,00
		Subside à la *Revue*	1941,32
			2766,72

RÉSUMÉ

Recettes	22799,74
Dépenses	20900,22
Excédent des recettes	1899,52

M. le secrétaire général fait connaître le résultat des élections pour le Conseil général et les bureaux des sections.

La composition du Conseil pour l'année 1909-1910 est la suivante (*) :

(*) Le nom de chaque membre du Conseil est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

Président d'honneur : M. A. Beernaert.
Président : M. G. Dewalque (1910).
1er Vice-président : M. le Dr Desplats (1911).
2e Vice-président : M. C. Beaujean (1912).
Secrétaire : M. P. Mansion (1911).
Trésorier : M. E. Goedseels (1912).
Membres : MM. Mis de la Boëssière-Thiennes (1910).
L. Cousin (1913).
L. De Lantsheere (1910).
Chne Delvigne (1911).
Dr X. Francotte (1912).
Ch. Lagasse-de Locht (1913).
Cte Ad. de Limburg-Stirum (1912).
E. Pasquier (1913).
A. Proost (1910).
Chne Swolfs (1913) (*).
Ch.-J. de la Vallée Poussin (1910).
G. Van der Mensbrugghe (1911).
Éd. Van der Smissen (1911).
Dr A. Van Gehuchten (1912).
Dr R. Warlomont (1911).

M. le secrétaire général donne lecture des questions de concours proposées par les sections, pour l'année sociale 1909-1910.

Il fait connaître le résultat des concours pendant l'année 1908-1909. Un prix de 500 francs et la médaille de la Société sont accordés à un mémoire du R. P. Wulf, S. J., lauréat de la seconde section (sciences physiques) pour un mémoire sur *un nouvel électromètre bifilaire*. Ce mémoire sera publié dans la seconde partie des Annales.

La parole est donnée au R. P. Vermeersch pour une conférence sur *La peur de l'enfant dans les classes dirigeantes*. Cette conférence est publiée dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 juillet 1909.

Le président déclare close la session de Pâques 1909.

(*) M. le Chne Swolfs est décédé, à Malines, le 2 mai 1909. Dans sa séance du 5 juin 1909, le Conseil lui a donné pour successeur M. l'abbé Grégoire, professeur à l'Université de Louvain.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

du 1er mai 1908 au 1er mai 1909

I. Livres et brochures

Alliaume. L'Écoulement des liquides dans les lits rectilignes rectangulaires larges, circulaires et semi-circulaires. Une broch. in-8° de 39 pages. Bruxelles, Goemaere, 1908.

Alliaume. Théorie de la Propagation des Ondes liquides dans les tuyaux élastiques. Une broch. in-8° de 45 pages. Bruxelles, Hayez, 1908,

André. Les Planètes et leur Origine. Un vol. in-8° de VI-285 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Bachelier. Étude sur les Probabilités des causes. (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.) Une broch. in-4° de 30 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

L. Bachelier. Le problème général des probabilités dans les épreuves répétées. Une broch. in-4° de 3 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Jean Baruzi. Leibnitz. Un vol. in-8° de 386 pages. Paris, Bloud.

C. Beaujean. Les Instituts autonomes pour Habitations populaires ou économiques en Italie. (Extrait de la REVUE ECONOMIQUE INTERNATIONALE.) Une broch. in-8° de 34 pages. Bruxelles, Goemaere, 1909.

C. Beaujean. La Législation italienne en matière d'habitations populaires ou économiques. (Extrait de la RÉFORME SOCIALE.) Une broch. in-8° de 22 pages. Paris, 1908.

Émile Borel. Éléments de la Théorie des Probabilités. Un vol. in-8° de VII-191 pages. Paris, Hermann, 1909.

L. Boule. Recherches sur le Système nerveux central normal du Lombric. (Extrait de la Revue LE NÉVRAXE). Une broch. in-8° de 53 pages. Louvain, Uystpruyst, 1908.

Bouquet. L'Évolution psychique chez l'Enfant. Un vol. in-16 de IV-101 pages. Paris, Bloud, 1909.

E. J. Brunswick et **M. Alliamet.** Construction des induits à courants continus. Un vol. in-8° de 187 pages. Paris, Gauthier-Villars, Masson et Cie.

Maurice de Cantelou. Étude sur l'Aviation. Un vol. in-8° de 128 pages. Paris et Liége, 1909.

O. D. Chwolson. Traité de Physique. Traduction de E. Davaux. Tome deuxième, quatrième fascicule. Un vol. in-8° de 547 pages. Paris, Hermann, 1909.

E. et **F. Cosserat.** Théorie des Corps déformables. Un vol. in-8° de VI-226 pages. Paris, Hermann, 1909.

Œuvres de Pierre Curie, publiées par les soins de la Société française de Physique. Un vol. in-8° de 621 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

C. G Dahlerus. Industrie minière et métallurgique en Suède. Un vol. in-4° de 157 pages. Stockholm, 1905.

J. Delvosal. Le Mouvement Scientifique en Belgique. L'Observatoire Royal. Une broch. in-4° de 23 pages. Bruxelles, 1907.

De Wildeman. Notice sur des Plantes utiles ou intéressantes de la Flore du Congo. Une broch. in-8° de 101 pages. Bruxelles, 1908.

De Wildeman. Sciences biologiques et colonisation. Une broch. in-8° de 38 pages. Bruxelles, 1909.

O. Dony-Hénault. Contribution à l'Étude méthodique des oxydases. Deuxième mémoire. (Extrait du *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique.*) Une broch. in-8° de 57 pages. Bruxelles. Hayez, 1908.

Douvillé et **Zeiller**. Sur le terrain houiller du Sud-oranais. (Extrait des Comptes rendus de l'Académie des Sciences.) Une broch. in-4° de 5 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

P. Duhem. Études sur Léonard de Vinci. Seconde série. Un vol. in-8° de IV-475 pages. Paris, Hermann, 1909.

Ekhoff. Fornvännen meddelanden fran K. Vitterhets Historie och Antikwitets Akademien. Un vol. in-8° de 385-VII pages. Stockholm, 1907.

L Fargue. La forme du Lit des Rivières à fond mobile. Un vol. in-8° de 187 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Jean Florin. Appareil pour enregistrer l'orientation des strates au fond des trous de sondage. (Extrait des Annales des Mines de Belgique.) Une broch. in-8° de 8 pages. Bruxelles, Narcisse, 1908.

X. Francotte. La question de la responsabilité dans l'expertise psychiatrique. Une broch. in-8° de 46 pages. Liége, Genève, 1908.

Gagnon. L'Amérique précolombienne. Un vol. in-8° de 376 pages. Québec, 1908.

R. Garrido, S. J. Les observations solaires à l'Observatoire astronomique de Cartuja (Grenade). Une broch. in-8° de 8 pages. Bruxelles, 1909.

Grand'Eury. Sur les organes et le mode de végétation des Névroptéridées et autres Ptéridospermes. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.) Une broch. in-4° de 4 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Grignard, S. J. Phonétique et morphologie des dialectes de l'Ouest-wallon. Un vol. in-8° de 146 pages. Liége, 1908.

Henri Hansjakob. Un allemand en France en 1874. (Traduit de l'allemand par M. Virot.) Un vol. in-8° de 415 pages. Bruxelles, Société belge de librairie.

Haton de la Goupillière. Application aux mouvements planétaire et cométaire de la recherche du centre de gravité et des axes principaux du temps de parcours. Une broch. in-4° de 25 pages.

—— Surfaces Nautiloïdes. Un vol. in-8° de 177 pages. Coïmbra, 1908.

Dr. Henrard. Vingt et un cas d'extraction de corps étrangers métalliques de l'œsophage sous l'écran radioscopique. (Extrait du JOURNAL DE RADIOLOGIE.) Une broch. in-8° de 7 pages. Bruxelles, Severeyns, 1908.

Charles Henry. Psycho-Biologie et Énergétique. Un vol. in-8° de 216 pages. Paris, Hermann, 1909.

—— Psycho-Physique et Énergétique. Une broch. in-8° de 18 pages. Paris, 1908.

—— Psycho-Physique, Énergétique et Photométrie. Une broch. in-8° de 21 pages. Congrès de Reims, 1907.

Hersent. Mise au point de notre outillage maritime, ports et canaux. Un vol. in-4° de 89 pages. 1908.

Dr. Hoton. Beurres purs, beurres falsifiés. Une broch. in-8° de 24 pages. 1908.

Hulth. Bibliographia Linnaeana. Matériaux pour servir à une bibliographie Linnéenne. 1re partie, livraison I. Un vol. in-8° de 170 pages. Upsala, 1907.

Charles Janet. Remplacement des Muscles vibrateurs du vol par des colonnes d'Adipocytes, chez les fourmis, après le vol nuptial. — Sur un organe non décrit du thorax des fourmis ailées. — Histolyse, sans phagocytose, des muscles vibrateurs du vol, chez les reines des fourmis. — Histogénèse du tissu adipeux remplaçant les muscles vibrateurs histolysés après le vol nuptial, chez les reines des fourmis. — Histolyse des muscles de mise en place des ailes après le vol nuptial, chez les reines des fourmis. (Extraits des COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.) Cinq broch. in-4° de 3 ou 4 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Ladenburg. Histoire du développement de la chimie depuis Lavoisier jusqu'à nos jours. Traduit sur la 4e édition allemande. Un vol. in-8° de 388 pages. Paris, Hermann, 1909.

Laforce. L'Éducation des fils de famille au point de vue de l'expansion civilisatrice. Une broch. in-8° de 15 pages. Bruxelles, 1908.

de Laplanche Étude sur les angles imaginaires. Un vol. in-8° de 135 pages. Paris, Hermann, 1908.

G. Lecointe. Commission polaire internationale. Session de 1908. Procès-verbaux des séances. Un vol. in-8° de 110-CLX pages. Bruxelles, Hayez, 1908.

Abbé Lemaire. Sur l'action de l'Éther mésoxalique avec les dérivés alkylhalomagnésiens et sur la synthèse de la Pinacone malonique. Une broch. in-8° de 79 pages. Bruxelles, Hayez, 1909.

Fr. Loppens. Sur quelques fouilles faites dans une sablière près de Nieuport. (Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ D'ARCHÉOLOGIE DE BRUXELLES.) Une broch. in-8° de 9 pages. Bruxelles, Vromant, 1908.

J. Maes. L'Habitation au Bas-Congo. Une broch. in-8° de 19 pages. Bruxelles, 1908.

E. Marchand. Relations des tremblements de terre avec les phénomènes solaires. Une broch. in-8° de 14 pages. Bagnères-de-Bigorre, Coureau, 1909.

A. Marie et **R. Martial.** Travail et Folie. Un vol. in-16 de XI-111 pages. Paris, Bloud, 1909.

Merveille, S. J. Mémoires de l'Observatoire de l'Èbre. La Section Magnétique. Une broch. in-4° de 73 pages. Barcelone, 1908.

F. Meunier. Monographie des Dolichopodidae de l'ambre de la Baltique. Un vol. in-8° de 100 pages. Paris, 1908.

—— Nouveaux Insectes du Stéphanien de Commentry. (Cinquième note). Une broch. in-8° de 13 pages. Paris, 1909.

—— Nouveaux Paléodictyoptères du Stéphanien de Commentry. (Extrait du *Bulletin du Muséum d'histoire Naturelle.*) Une broch. in-8° de 6 pages. Paris, 1908.

—— Le Hachich ; Essai sur la Psychologie des Paradis éphémères. Un vol. in-16 de 219 pages. Paris, Bloud, 1909.

R. de Montessus. Leçons élémentaires sur le calcul des Probabilités. Un vol. in-8° de VI-191 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Paul Nève La philosophie de Taine. Essai critique. Un vol. in-8° de XVI-359 pages. Paris, Lecoffre ; Bruxelles, Dewit, 1908.

E. Pâque, S. J. Nouvelles recherches pour servir à la flore cryptogamique de la Belgique. (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE BOTANIQUE DE BELGIQUE.) Une broch. in-8° de 15 pages. Gand, Annoot-Braeckman, 1908.

J. Pieraerts. A propos de la diagnose des pentoses par l'orcine chlorhydrique. Une broch. in-8° de 18 pages. Paris, 1908.

—— Diagnose du d-fructose en présence d'autres sucres naturels. Une broch. in-8° de 17 pages. Paris, Masson, 1908.

H. Poincaré. Thermodynamique. Deuxième édition. Un vol. in-8° de XX-458 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

J. Post et **B. Neumann.** Traité complet d'Analyse chimique appliquée aux essais industriels. (2e édition française par le Dr L. Gautier.) Tome 1r, 2d fascicule. Un vol. in-8° de 342 pages. Paris, Hermann, 1908.

—— Traité complet d'Analyse chimique appliquée aux essais industriels. Tome premier, troisième fascicule. Un vol. in-8° de 302 pages. Paris, Hermann, 1909.

P. Puiseux. La Terre et la Lune. Forme extérieure et structure interne. Un vol. in-8° de 173 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Résal. Cours de Ponts métalliques professé à l'École Nationale des Ponts et Chaussées. T. I. Un vol. in-8° de VII-663 pages. Paris, Béranger, 1908.

Gaston Richard. La Femme dans l'histoire. Un vol. in-12 de 465 pages. Paris, Doin, 1909.

W. Rouse Ball. Récréations mathématiques et Problèmes des temps anciens et modernes. Deuxième édition française par J. Fitz-Patrick. Deuxième partie. Un vol. in-8° de 363 pages. Paris, Hermann, 1908.

Claudius Roux. Bibliographie méthodique des principaux manuscrits français relatifs aux Sciences Naturelles. Une broch. in-8° de 112 pages. Lyon, Rey et Cie, 1908.

Cl. Roux. La Géographie physique envisagée dans ses rapports avec la Géologie tectonique et la Paléogéographie. Une broch. in-8° de 32 pages. Lyon, Vitte, 1908.

Emile Sageret. Étude sur le Théorème de Fermat. Une broch. in-8° de 38 pages. Paris, Dulac, 1909.

Jean Sarryer. Réflexions sur le Second Foyer de l'Orbite terrestre. Une broch. in-16 de 43 pages. Paris, 1909.

J. Schul, S. J. Caisse de Pension à rente variable. Une broch. in-8° de 37 pages. Anvers, 1908.

Abbé Charles Sentroul. Qu'est-ce que la Philosophie ? Une broch. in-8° de 40 pages. S. Paulo, Brésil, 1908.

Sidersky. La Consommation des chaudières à vapeur et l'économie de combustible. Un vol. in-8° de 175 pages. Paris, Gauthier-Villars, Masson et Cie.

G. Soliman. Étirage, Tréfilage, Dressages des Produits Métallurgiques. Un vol. in-8° de 164 pages. Paris, Gauthier-Villars, Masson et Cie.

R. P. Jules Soubin. Nouvelle Théologie dogmatique. I. Dieu dans l'Histoire et la Révélation. Quatrième édition. Un vol. in-8° de 190 pages. Paris, Beauchesne, 1909.

Jules Tannery et **Pierre Duhem**. Liste des Travaux de Paul Tannery. Une broch. in-8° de 114 pages. Bordeaux, 1908.

J. Tilmant. Ernesto Tornquist et le Commerce Anversois. 1842-1908. Une broch. in-8° de 52 pages. Anvers, 1908.

Ture Carlbaum. Contributions à la théorie des Mouvements infiniment petits d'un gaz hétérogène. Une broch. in-8° de 57 pages. Upsala, 1907.

Turpain. La Télégraphie sans Fil et les applications des Ondes électriques. Deuxième Édition. Un vol. in-8° de VII-396 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Ch.-J de la Vallée Poussin. L'Objet de la Démonstration mathématique et la Réalité. Une broch. in-8° de 28 pages. Bruxelles, Hayez, 1908.

L. van Brabandt. Note sur les Étales de courant dans l'onde marée et sur leurs lieux géométriques. Une broch. in-8° de II-43 pag. Brux., Goemaere, 1908.

Viaene. Essai sur la Numération de quelques peuplades du Congo belge. Une broch. in-8° de 33 pages. Bruxelles, 1908.

P. Villard. Les Rayons cathodiques. Deuxième édition. Un vol. in-8° de 104 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

R. Zeiller. Observations sur le Lepidostrobus Brownii Brongnart (sp.). (Extrait des COMPTES-RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.) Une broch. in-4° de 7 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Zenneck. Les Oscillations électro-magnétiques et la Télégraphie sans fil. 2 vol. in-8° de XII-505 et 489 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Ministère de l'Industrie et du Travail. Construction des machines et appareils électriques. Un vol. in-8° de 344 pages. Bruxelles, 1908.

Ministère de l'Industrie et du Travail. Office du Travail. Bibliographie générale des Industries à domicile. Un vol. in-8° de VIII-300 pages. Bruxelles, Dewit, 1908.

Ministère de l'Industrie et du Travail. Les Industries à domicile. Étude statistique des Familles ouvrières comprenant des ouvriers à domicile. Un vol. in-8° de CLXXVII-381 pages. Bruxelles, Lebègue, 1909.

Ministère de l'Industrie et du Travail. Les Industries à domicile en Belgique. Vol. IX. Un vol, in-8° de 204-VI-411 pages. Bruxelles, 1908.

Ministère de la Justice. Statistique judiciaire de la Belgique pour 1906. Un vol. in-4° de 364 pages. Neuvième année. Bruxelles, 1908.

Ministère de la Justice. Statistique judiciaire de la Belgique. Dixième année. Un vol. in-4° de LXV-430 pages. Bruxelles, 1908.

Andersson. Die Pterobranchier der Schwedischen Südpolarexpedition 1901-1903. Une broch. in 4° de 122 pages. Stockholm, 1907.

W. S. Andrews. Magic Squares and Cubes. Un vol. in-8° de VI-199 pages. Chicago, 1908.

Ivar Arwidssen. Studien über die Skandinavischen und arktischen Maldaniden. Un vol. in-8° de 308 pages. Upsala, 1906.

H. Blomberg. Inbjudning till Juris utriusque doktors promotionen i Upsala Domkyrka. Un vol. in-8° de 48-91-10 pages. 1907.

Borredon. L'Equilibrio ed il Moto Perpetuo della Terra girante intorno al Sole. Une broch. in-8° de 16 pages. 1908.

Carlsson. Om itererade funktioner. Une broch. in-4° de 70 pages. Upsala, 1907.

Carrara, S. J. L'Opera scientifica di Gerberto o Papa Silvestro II. Une broch. in-4° de 36 pages. Rome, 1908.

Carus. The foundations of Mathematics. Un vol. in-8° de 137 pages. Chicago, 1908.

Comissão geographica e geologica. Eng^{r} João Pedro Cardoso, Chefe. Carta Geral do Estado de S. Paulo. 1908.

E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erster Band. Un vol. in-8° de X-410 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

L. de Ball. Die Theorie der Drehung der Erde. Une broch. in-4° de 58 pages. Vienne, 1908.

José Maria Dusmet y Alonso. Los « Apidos » de España. (Extrait de MEMORIAS DE LA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE HISTORIA NATURAL.) Une broch. in-8° de 60 pages. Madrid, 1908.

Ekhoff. Antikvarisk Tidskrift för Sverige. Un vol. in-8° de 25-55-64 pages. Stockholm.

J. A. Ekman. Inbjudning till theologie doktors promotionen i Upsala Domkyrka. Un vol. in-8° de 138-28 pages. 1907.

Birger Eriksonn. Bidrag till Kännedomen om magnetitens magnetiska och elektriska Egenskaper. Une broch. in-8° de 62 pages. Upsala, 1907.

Erik Fagerholm. Ueber den Sternhaufen Messier 67. Une broch. in-8° de 83 pages. Upsala, 1906.

Pedro Farreras. El rayo y el agua subterranea. Une broch. in-8° de 15 pages. Madrid, 1908.

Fries. Bref och Skrifvelser af och till Carl von Linné. Deux vol. in-8° de 361 et 373 pages. Stockholm, 1907.

Gaskell. The origin of vertebrates. Un vol. in-8° de 537 pages. New-York, Longmans, Green, and C°, 1908.

Gemelli. Fra Agostino. Il problema igienico nelle chiese. Une broch. in-8° de 29 pages. Monza, 1908.

A. G. Högbom. Nordland naturbeskrifning. Un vol. in-4° de 392 pages. Upsala.

Ragnar Holm. Experimentale Untersuchungen über die geschichtete positive Glimmlichtsäule. Une broch. in-4° de 49 pages. Berlin, 1908.

Ivan Kruckenberg. Bidrag till Kännedomen om Magnetostriktionsfenomenet. Une broch. in-8° de 73 pages. Upsala.

Dr Kurt Hensel. Theorie der algebraischen Zahlen. Erster Band. Un vol. in-8° de XI-349. Teubner, Leipzig, 1908.

Harald Kylin. Studien über die Algenflora der schwedischen Westküste. Un vol. in-8° de 383 pages. Upsala, 1907.

Harald Mohlin. Undersökningar, öfver den Ljuselektriska strömmen. Une broch. in-8° de 66 pages. Upsala.

C. O. Norén. Zur Entwicklungsgeschichte des Juniperus Communis. Une broch. in-8° de 64 pages. Upsala, 1907.

K. Petrén. Inbjudning till medicine doktors promotionen i Upsala domkyrka. Un vol. in-8° de 165-248-15 pages. 1907.

M. Planck. Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Zweite Auflage. Un vol. in-8° de XVI-278 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

Politos. Ἐπιστημονικὴ Ἐπέτηρις, Γ′. Un vol. in-8° de η′-537 pages. Athènes, 1909.

—— Τὰ κατὰ τὴν Πρυτανείαν. Un vol. in-8° de 440 pages. Athènes, 1908.

Righi. La materia radiante e i Raggi Magnetici. Un vol. in-8° de VI-380 pages. Bologne, 1909.

C. Runge. Analytische Geometrie der Ebene. Un vol. in-8° de 198 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

G. F. C. Searle. Experimental Elasticity. Un vol. in-8° de XVI-187 pages. Cambridge, 1908.

C. Skottsberg. Zur Kennis dur subantarktischen und antarktischen Meeresalgen. Une broch. in-8° de 172 pages. Stockholm, 1907.

M B. Swederus. Linné och Växtodlingen. Un vol. in-8° de 102 pages. Upsala, 1907.

J. Thomae. Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen. Un vol. in-8° de VI-182 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

M. G. Törnquist. Linjära homogena Funktionalekvationer med itererade substitutioner i fera variabler. Une broch. in-8° de 43 pages. Upsala, 1906.

Tycho Tullberg. Inbjudning till filosofie doktors promotionen i Upsala Domkyrka. Un vol. in-8° de 96-56 pages. 1907.

— - Linnéporträtt. Un vol. in-4° de 187 pages. Stockholm, 1907.

—— Zoologiska studier. Un vol. in-4° de 342 pages. Upsala, 1907.

Upsala Universitets Rektor. Inbjudning till Upsala Universitets Linnéfest. Un vol. in-8° de 9-VIII-107 pages. 1907.

Nits von Hofsten. Studier über Turbellarien aus dem Berner Oberland. Un vol. in-8° de 269 pages. Leipzig, 1907.

R. V. Lilienthal. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Erster Band. Un vol. in-4° de IV-368 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

Von the Svedberg. Studien zur Lehre von den Kolloiden Lösungen. Une broch. in-4° de 160 pages.

A. Wilkens. Katalog von 620 Sternen zwischen 29°50' und 35°10' Nördlicher Declination. Une broch. in-8° de 45 pages. Vienne, 1908.

Wulf. Ueber die in der Atmosphäre vorhandene Strahlung von hoher Durchdringungsfähigkeit. Une broch. in-4° de 6 pages. Leipzig, 1907.

Synopsis of the Report of the Superintendant of the United States naval observatory for the fiscal year ending June 30, 1908. Une broch. in-8° de 16 pages. Washington, 1908.

II. Périodiques

Académie des Sciences. Comptes rendus hebdomadaires des séances (1908). Paris.

Académie royale de médecine de Belgique :
- Bulletin, 4e série, t. XXII (1908). Bruxelles.
- Mémoires couronnés et autres mémoires, t. XIX, t. XX, fasc. 1 (1908). Bruxelles.
- Procès-verbaux des séances de l'année 1908. Bruxelles.

Annales de l'Académie de Mâcon, 3e série, t. XI. Mâcon.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille, t. XVI. Marseille.

Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse, 2e série, t. X (1908). Toulouse.

Annales de Philosophie chrétienne (1909). Paris.

Annales de la Société géologique de Belgique, t. XXVIII, livr. 4 ; t. XXX, livr. 4 ; t. XXXIII, livr. 4 ; t. XXXV, livr. 1-4 ; t. XXXVbis, livr. 3.
Annuaire astronomique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1909. Bruxelles.
Annuaire météorologique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1909. Bruxelles.
Annuaire pour l'an 1909 publié par le Bureau des Longitudes. Paris.
Annuaire des membres de la Société de St-Luc, St-Côme et St-Damien pour 1909. Paris.
L'Anthropologie, t. XVIII (1909). Paris.
Bulletin de l'Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liége, t. XXXIII, n° 1. Liége.
Bulletin de la Société astronomique de France (1909). Paris.
Bulletin de la Société bibliographique et des publications populaires (1908). Paris.
Bulletin de la Société belge d'Astronomie (1908). Bruxelles.
Bulletin de la Société belge d'Électriciens (1909). Bruxelles.
Bulletin de la Société centrale forestière de Belgique (1909). Bruxelles.
Bulletin de la Société chimique de Belgique (1909). Bruxelles.
Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXIII (1909). Paris.
Bulletin de la Société médicale de Saint-Luc, Saint-Côme et Saint-Damien, 15^e année (1909). Paris.
Bulletin de la Société royale de botanique de Belgique (1907), fasc. 1, 2, 3. Bruxelles.
Bulletin de la Société royale belge de géographie (1909). Bruxelles.
Bulletin des séances de la Société des sciences de Nancy et de la Réunion biologique de Nancy, 3^e série, t. VIII, t. IX, fasc. 1 et 2. Nancy.
Bulletin des séances de la Société française de physique (1908). Paris.
Bulletin météorologique de l'Observatoire royal de Belgique (1908). Bruxelles.
Ciel et Terre (1908-1909). Bruxelles.
Cosmos (1909). Paris.
L'Enseignement mathématique (1908). Genève.
Études (Revue fondée par les Pères de la Compagnie de Jésus, 1909). Paris.
Institut Grand-Ducal de Luxembourg. Archives trimestrielles, t. II et t. III. Luxembourg.
Journal de l'École Polytechnique, 2^e série, 8^e cahier (1909). Paris.
Journal de Psychologie normale et pathologique (1909). Paris.
Journal des sciences médicales de Lille (1908). Lille.
Le mois scientifique et industriel (1908). Paris.
La Nouvelle-France (1909). Québec (Canada).
Observatoire royal de Belgique.
  Annales. Nouvelle série :
  Annales astronomiques, t. X, t. XI.
  Physique du Globe, t. IV, fasc. 1.
Polybiblion. Partie littéraire et Partie technique (1909). Paris.
Le Progrès médical (1908). Paris.
La Réforme sociale (1909). Paris.

Revue de l'Ingénieur (1909). Bruxelles.
Revue de Lille (1909). Arras.
Revue de Métaphysique et de Morale (1909). Paris.
Revue de philosophie (1909). Paris.
Revue générale (1909). Bruxelles.
Revue Néo-Scolastique (1909). Louvain.
Revue philosophique (1909). Paris.
Revue pratique d'Apologétique (1909). Paris.
Revue des Sciences ecclésiastiques (1909). Arras.
Société d'Économie politique de Bordeaux :
  Revue Économique de Bordeaux (1908).
  Annuaire Économique (1887).
Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie :
  Bulletin, t. XXII (1908). Bruxelles.
  Procès-verbaux des séances, années 1908-1909.
  Nouveaux Mémoires, série in-4° (1908).
Travaux scientifiques de l'Université de Rennes (1908). Rennes.
Union des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Louvain (1908). Bruxelles.
L'Université catholique (1909). Lyon.
Revue semestrielle des publications mathématiques, t. XVI, 2e partie, t. XVII, 1re partie (1908). Amsterdam.
Nieuw archief voor Wiskunde, tweede reeks, achtste deel, derde en vierde st. (1909). Amsterdam.
Wiskundige opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, tiende deel, tweede en derde stuk. Amsterdam.
Atti della Reale Accademia dei Lincei, vol. XVI et XVII. Rome.
Atti della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei (1907-1908). Rome.
Civiltà cattolica (1909). Roma.
Memorie della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei, vol. XXV. Rome.
Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali (1909). Pavia.
Rivista internazionale di Scienze sociali e discipline ausiliarie (1909). Roma.
La Scuola cattolica (1909). Milano.
Anales de la Universidad (1908). Santiago (Chili).
Anales de la Faculdad de Ciencias de Zaragoza, año 2, n. 5, 6 et 7. Zaragoza.
Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya para el año de 1909. Mexico.
Boletin de la Sociedad Aragonesa de Ciencias naturales (1908). Barcelona.
El criterio catolico en las Ciencias medicas (1909). Barcelona.
Instituto geologico de Mexico :
  Boletin n. 17 et 26.
  Parergones, t. II, n. 1 à 9.
Memorias y Revista de la Sociedad cientifica « Antonio Alzate », t. XXVI, 3-5. Mexico.
Razon y Fe (1909). Madrid.
Revista del ministerio de Obras Publicas y Fomento (1908). Bogota (Colombie).
Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto, t. III. Coïmbra.

Annuario publicado pelo Observatorio de Rio de Janeiro para o anno de 1908, Rio de Janeiro (Brésil).
Boletin mensal do Observatorio do Rio de Janeiro (1908). Rio de Janeiro (Brésil).
Broteria Revista de sciencias naturales, vol. VII, VIII. S. Fiel.
Arhiva, vol. XIX. Jasi.
Arta Romana (1908). Jasi.
International Catalogue of Scientific Literature, fourth, fifth and sixth annual issue. Londres.
The Month (1904). Londres.
The American Catholic Quarterly Review (1909). Philadelphia.
American Journal of Mathematics, vol. XXX, nos 1 et 2. Baltimore.
The American Museum of Natural History :
Annual Report of the President, 1907. New-York.
Bulletin, vol. XXIV et XXV. New-York.
Memoirs, vol. III, 4 ; vol. IX, 4. New-York.
The American Mathematical Society. New-York.
  Bulletin (1909).
  Annual Register (janv. 1909).
Bulletin of the geological Institution of the University of Upsala, vol. VIII, 15-16. Upsala.
Bulletin of the Ohio State University, vol. XI, suppl. au n. 12 et au n. 13 ; vol. XII, n. 7, 12, 13 ; suppl. aux n. 8 et 15.
Catholic World (1909). Washington.
Publications of the Lick Observatory, vol. X (1907). Sacramento.
The Michigan Academy of Sciences, 9th report, 10th report.
The Chicago Academy of Sciences. Chicago.
  Bulletin no 2.
Missouri Botanical Garden, 18th and 19th Annual Report (1908). St-Louis. Mo.
  Zoology, vol. III, nos 5 et 6. San Francisco.
Dominion Astronomical Observatory, Chief Astronomers Report for 1906. Ottawa.
The Royal Society of Edimburg :
  Proceedings, vol. XXVIII.
  Transactions, vol. XLV. Edimburg.
Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of Science, vol. XI, part. 1, 2, 3. Halifax, Nova Scotia.
Transactions of the Academy of Science of St-Louis, vol. XVII, nos 1-9. St-Louis.
United States Geological Survey. Washington.
  Annual report, 1907-1908 (p. I à IV) ; 1901-1902.
  Bulletin : nos 328, 335, 337, 338, 340, 343-351, 369.
  Mineral Ressources of the U. S., 1906-1907.
  Monographs XLII à XLV.
  Professional Papers, nos 56 et 62.
  Water-Supply Papers, nos 207, 209, 213, 217-220, 222.
University of California :
  Lick Observatory Bulletins (1908).
  Publications in physiology, vol. III, nos 11 et 12.

University of Nebraska :

Bulletin of the Agricultural experiment Station, n^os^ 103-106.

Press Bulletin, n° 28. Lincoln.

New South Wales Statistical Register for 1906 and previous years, p. XI-XIV.

Western Australia Geological Survey :

Bulletin, n^os^ 31, 34.

Yale University :

Transactions (1908). New Haven.

Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie (1909). Berlin.

Archiv für Optik (1909). 4. Band (1908). Leipzig.

Bibliotheca mathematica (1908). Leipzig.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen (1909). Stuttgart.

Naturforschende Gesellschaft in Basel. Verhandlungen. Band XIX, Heft 3. Bâle.

Journal de la Société physico-chimique russe de l'Université impériale de Saint-Pétersbourg (1909). Saint-Pétersbourg.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXII, 1875 à 1908. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages. fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Ed. Vandersmissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905) . . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : T. I. Introduction, Ed. Van der Smissen. — I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. — II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. — III. Barry, H. Laporte. — IV. Beira, Ch. Morisseaux. — V. Liverpool, P. de Rousiers. — VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. — VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. Prix : 4 francs. — T. II. — VIII. Londres, G. Eeckhout. — IX. Délos, A. Roersch. — X. Rotterdam, J. Charles. — XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. — XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. — T. III. — XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. — XIV. Ostende. L.-Th. Leger. — XV. Jaffa, P. Gendebien. — XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. — XVII. Le Havre, G. Blondel. — XVIII, Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. — XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. — XX. Han-Kow. A. Vanderstichel. — T. IV. — Sous presse.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le Dr X. Francotte. Brochure in-8 de 48 pages (1907). . . . . fr. **1 00**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le Dr Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) . . . . fr. **1 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901) ; la livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième serie**.

Elle paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Outre ces trois parties, chaque livraison contient ordinairement un ou plusieurs articles de **Variétés**.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** °/o ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la REVUE. Un vol. du format de la REVUE de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. & R. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

L'ÉLECTRICITÉ

CONSIDÉRÉE COMME FORME DE L'ÉNERGIE

ÉLECTROSTATIQUE

par M. le LIEUT. COLON. ARIÈS

CHAPITRE PREMIER

Le champ électrique et l'induction électrostatique

1. — LIMITES DU CHAMP ÉLECTRIQUE

Si étendu qu'on puisse imaginer le champ stable créé dans un diélectrique par des corps conducteurs fixes et maintenus à potentiels constants, il importe de considérer ce champ comme limité par une frontière de potentiel invariable E_0, au contact de laquelle le diélectrique sera encore à l'état que l'on appelle l'état neutre ou l'état naturel. Cette frontière, invariable dans l'espace, peut être constituée par la surface intérieure d'un corps métallique enveloppant, mis en communication avec la terre dont il prendra le potentiel. Dans le cas le plus habituel, où il s'agit de corps électrisés dans l'air ambiant, on peut la concevoir comme formée d'une enveloppe imaginaire assez éloignée de ces corps, pour que le potentiel de l'air puisse y être considéré comme constant. La stabilité du champ implique aussi que la température T et la pression P sont uniformes dans toute l'étendue du diélectrique comme des conducteurs qu'il renferme.

Nous considérerons, pour le moment, le cas d'un seul diélectrique homogène et isotrope, c'est-à-dire, ayant même constitution en tout point, et dans toutes les directions autour de ce point, quand il est pris à une température, à une pression et à un potentiel déterminés.

2. — CHAMP STABLE CRÉÉ PAR UN SEUL CORPS ÉLECTRISÉ

Plaçons-nous d'abord dans le cas simple, où l'on vient de plonger brusquement un seul corps électrisé au potentiel E_1 dans un diélectrique à l'état neutre, au potentiel E_0, et limité comme nous l'avons expliqué. L'introduction de ce corps dans le champ, et l'action qu'il va exercer très rapidement sur le diélectrique, feront varier la pression de celui-ci, à moins qu'à sa surface limite, si celle-ci est constituée par un corps solide, ne se trouve, et c'est ce que nous supposerons, une petite ouverture suivie d'un canal au bout duquel on peut imaginer qu'agit un piston supportant la pression constante P à maintenir dans le milieu diélectrique.

Le corps conducteur lui-même qui, par l'intermédiaire du diélectrique, tend à se mettre en équilibre de potentiel avec le milieu également conducteur qui enveloppe ce diélectrique, ne pourra conserver son potentiel E_1, que s'il est en relation avec une source électrique de même potentiel, et c'est encore ce que nous admettons. Son volume sera invariable, puisque ses trois tensions T, P, E_1 seront constantes.

Dans ces conditions, il s'établira, dans tout le système, au bout d'un temps que nous savons imperceptible, un régime permanent caractérisant le champ stable ainsi créé.

Entre la surface extérieure du conducteur qui est au potentiel E_1 et la frontière du diélectrique qui est maintenue au potentiel E_0, le diélectrique aura acquis un potentiel invariable en chaque point, mais dont la valeur dépendra de la position de ce point dans le champ. Ce champ sera divisé en une série de surfaces équipotentielles qui, ne pouvant se couper, s'envelopperont les unes les autres, à mesure que le potentiel ira en croissant ou en décroissant progressivement de E_1 à E_0 entre les surfaces équipotentielles extrêmes, qui seront forcément constituées par la superficie Ω_1 du conducteur, d'une part, et par la superficie terminale Ω_0 du diélectrique, d'autre part.

Suivant que le potentiel E_1 du corps conducteur M_1 sera plus élevé ou moins élevé que le potentiel E_0 de l'enveloppe N du diélectrique, il se sera établi du premier vers le second, ou inversement, à travers ce diélectrique, un courant dont l'importance dépendra du degré de conductibilité de ce diélectrique. Ce courant sera excessivement faible dans un milieu, dit isolant, tel que l'air, mais il n'en sera pas moins *réel*. Celui des deux corps M_1 ou N dont le potentiel sera le plus élevé transmettra aux parties du diélectrique, voisines de sa superficie, de l'énergie électrique qui traversera les diverses surfaces équipotentielles du champ, en se transformant progressivement en chaleur : et comme le champ est dans un état stable avec une énergie invariable du diélectrique, il faut bien admettre que la chaleur créée aux dépens de l'énergie électrique, trouve un écoulement qui l'empêche de s'accumuler dans le diélectrique et de l'échauffer ; cet écoulement se fera, par exemple, comme l'écoulement de l'électricité vers le corps M_1 ou vers le corps N de potentiel le moins élevé, si ce dernier corps est en communication, non seulement avec une source d'électricité de même potentiel, mais encore avec une source de chaleur de température infiniment voisine de T et inférieure. Cette élimination de la chaleur créée sera d'autant plus facile que cette chaleur sera plus faible ; elle est imperceptible comme le courant lui-même dans un isolant tel que l'air sec, et c'est à cette condition que le champ stable peut s'établir. Quoi qu'il en soit, pendant qu'il sort du corps M_1 ou N, du corps M_1 par exemple, une quantité i d'électricité, il en rentre la même quantité dans l'autre corps. L'énergie électrique $E_1 i$ transmise par le corps M_1 n'arrive sous cette même forme dans le corps N que réduite à la quantité $E_0 i$; le reste, $(E_1 - E_0)i$ s'est dissipé en chaleur, et a été rejeté au dehors.

3. — L'ÉLECTRICITÉ ABSORBÉE PAR LE CHAMP

D'après les lois du déplacement de l'équilibre, le diélectrique étant à une température et à une pression uniformes, la quantité d'électricité qu'il contient en un point, rapportée à l'unité de poids, varie dans le même sens que le potentiel en ce point ; elle est la même en tous les points d'une surface équipotentielle, et va en augmentant à mesure que le potentiel s'élève sur chacune de ces surfaces. Si donc $E_1 > E_0$, le champ contiendra plus d'électricité que si le diélectrique était à l'état neutre ou naturel, au potentiel E_0. Si $E_1 < E_0$, le champ contiendra moins d'électricité que si le diélectrique était à l'état neutre. Le premier effet du conducteur électrisé est donc de charger ou de décharger le champ d'une certaine quantité d'électricité suivant que le potentiel E_1 de ce conducteur est supérieur ou inférieur au potentiel E_0 du diélectrique à l'état neutre. Cet échange d'électricité dans un sens ou dans l'autre, entre le conducteur M_1 et le diélectrique, ne se fait pas d'une façon uniforme dans toute l'étendue du diélectrique ; il est d'autant plus accentué en un point du champ, que le potentiel de ce point a plus varié pour arriver à l'état stable. Ce phénomène correspond à ce que Faraday a appelé l'*absorption électrique*, et Maxwell, le *déplacement électrique*. Il donne une explication toute naturelle de la charge résiduelle des condensateurs, dont les théories actuelles ne peuvent rendre un compte exact, et que, faute de mieux, elles attribuent à une déformation progressive, et en quelque sorte permanente, dans la structure du diélectrique.

4. — LIGNES DE FORCE ET TUBES D'INDUCTION

Considérons sur le conducteur M_1 un élément superficiel $\Delta\Omega_1$; des différents points de son contour faisons partir des lignes coupant orthogonalement les surfaces équipotentielles du champ. Ces lignes formeront un canal qui viendra découper sur le conducteur N limitant le diélectrique un élément de surface $\Delta\Omega_0$; ces lignes et ce canal sont les *lignes de force et le tube d'induction* de Faraday. La superficie du corps M_1 peut être décomposée en une infinité d'éléments juxtaposés sans discontinuité, auxquels correspondent des canaux juxtaposés sans discontinuité, et embrassant toute l'étendue du champ électrique. Le courant qui traverse ce champ, se divise lui-même en *flux d'électricité* suivant les canaux, sans passer de l'un à l'autre, l'électricité n'ayant à obéir qu'à sa tendance à passer de points de potentiel plus élevé à des points de potentiel moins élevé, et n'étant nullement sollicitée à traverser ces canaux sans changement de température, de pression et de potentiel.

5. — MASSES ÉLECTRIQUES

Il suit de là que les éléments superficiels $\Delta\Omega_1$ et $\Delta\Omega_0$ des corps M_1 et N qui se correspondent dans chaque canal, livrent passage à la même quantité d'électricité, dans l'unité de temps, pour sortir de l'un des corps, ou pour entrer dans l'autre. Si l'on rapporte à l'unité de surface les quantités d'électricité traversant ces éléments pendant l'unité de temps, on aura, en représentant par I_1 et I_0 ces quantités, comptées positivement ou négativement, suivant qu'il y aura passage d'électricité du conducteur dans le diélectrique ou inversement,

$$I_1 \Delta\Omega_1 + I_0 \Delta\Omega_0 = 0.$$

Nous appellerons *masses électriques*, distribuées à la superficie des corps conducteurs M_1 et N, les quantités d'électricité qui traversent les diverses parties de cette superficie pendant l'unité de temps, ces masses étant comptées comme positives ou négatives, suivant qu'elles correspondent à des quantités d'électricité qui sortent du conducteur ou y entrent. Ces masses dépendent donc de l'unité de temps choisie. Ce sont les masses électriques de Coulomb, comme nous le verrons dans la suite ; elles n'impliquent nullement l'idée généralement répandue de l'accumulation d'un fluide à la superficie des corps électrisés.

6. — ÉLECTRICITÉ POSITIVE ET ÉLECTRICITÉ NÉGATIVE

On voit que les corps M_1 et N sont chargés de deux masses électriques égales et de signes contraires, distribuées, d'après une certaine loi, sur leurs surfaces en regard, la densité superficielle de cette électricité étant I_1 et I_0 aux points qui correspondent à une même ligne de force. Ici apparaît la notion ancienne de l'électricité *positive* et de l'électricité *négative*. Un corps conducteur M_1 est chargé, à sa surface, d'électricité positive ou d'électricité négative, suivant qu'il est à un potentiel E_1 plus élevé ou moins élevé que le potentiel E_0 du diélectrique dans lequel on le plonge. La frontière elle-même de ce diélectrique se charge d'une masse électrique égale et de signe contraire. Il y a conservation de la masse électrique. Nous verrons que cette loi est générale comme le principe tout différent de conservation de la quantité d'électricité.

On est tenté de considérer comme négligeables les densités I_1 et I_0 ; mais il faut bien se garder contre une semblable erreur. Les quantités mesurables sont grandes ou petites pour nous, suivant que nos sens sont plus ou moins aptes à les percevoir ; mais il n'y a pas de grandeur absolue, il n'y a que des grandeurs relatives. Nous n'avons aucune idée de la quantité d'électricité que l'on pourrait tirer d'un centimètre cube d'air ou de tout autre isolant séparant les corps M_1 et N ; il est probable que cette quantité est considérable, comparée à celle qui passe, dans l'unité de temps, à travers un centimètre carré des surfaces équipotentielles ; mais cette dernière n'est pas, pour cela, négligeable : elle l'est si peu, qu'elle intervient dans l'explication de tous les phénomènes d'électrostatique.

7. — CHAMP STABLE CRÉÉ PAR PLUSIEURS CORPS ÉLECTRISÉS

Les considérations qui précèdent concernant un seul conducteur M_1, s'étendent facilement au cas où ce corps serait remplacé par un nombre quelconque de conducteurs $M_1, M_2, \ldots$, de potentiels respectifs $E_1, E_2, \ldots$, et plongés dans le même milieu.

Il s'établira, avec une extrême rapidité, un régime permanent dans ce système. Le champ électrique arrivé à l'état stable, aura acquis en chacun de ses points un potentiel invariable, fonction de la position de ce point, et qui sera égal à E_0, E_1, $E_2, \ldots$ à la superficie des corps N, M_1, $M_2, \ldots$. Le champ sera aussi divisé, par tranches, en une série de surfaces équipotentielles, qui ne peuvent se couper l'une l'autre, en sorte que toute ligne orthogonale à ces surfaces, c'est-à-dire toute ligne de force partant d'un point quelconque de la superficie de l'un des conducteurs N, M_1, M_2,... ira forcément se terminer à la superficie d'un autre de ces corps, en passant par des points de potentiel toujours croissant ou toujours décroissant. On pourra également diviser le champ en tubes de Faraday, juxtaposés sans discontinuité, et dont les extrémités aboutissant aux éléments superficiels de deux conducteurs distincts, seront des centres d'émission et des centres d'absorption du flux d'électricité s'écoulant, par ces tubes, comme un liquide incompressible en mouvement.

8. — LIGNES ET SURFACES NEUTRES

Toute la superficie d'un même conducteur pourra être divisée en parties qui seront centres d'émission ou centres d'absorption du flux électrique, suivant que les lignes de force aboutiront à ces parties par potentiels croissants ou par potentiels décroissants. Les centres d'émission seront séparés des centres d'absorption par une ligne qu'on appelle la *ligne neutre*. Les lignes de force qui s'y appuient engendrent une surface de même potentiel que le conducteur considéré. On peut l'appeler la *surface neutre*, elle cloisonne le diélectrique en régions juxtaposées où l'écoulement de l'électricité se fait en sens contraire dans les tubes.

9. — CHARGE ÉLECTRIQUE D'UN CONDUCTEUR DANS UN CHAMP

Un même conducteur peut donc recevoir de l'électricité par certaines parties de sa superficie et en dégager par d'autres parties. La différence des quantités dégagées et absorbées dans l'unité de temps constitue, par définition, la *charge électrique*, positive ou négative, du conducteur dans les conditions où il se trouve : c'est la somme algébrique des masses électriques distribuées à la superficie de ce conducteur suivant la loi définie par la considération des tubes d'induction.

Cette distribution des masses électriques à la surface des conducteurs a été envisagée par Vaschy comme une pure fiction ; elle correspond cependant, comme on a pu le voir, à un phénomène de dynamique bien défini qui permet d'en préciser toutes les conditions ; elle est le résultat de ce que l'on appelle l'*induction électrostatique*. Cette notion des masses électriques aura toute sa portée théorique et pratique, lorsque nous aurons montré qu'elle se confond avec celle des masses de Coulomb agissant à distance suivant la loi de Newton.

10. — LOI DE CONSERVATION DES MASSES ÉLECTRIQUES, OU LOI DE FARADAY

On voit ici que la loi de conservation des masses électriques est absolument générale dans les phénomènes d'induction, puisque dans tout système en équilibre dynamique, chaque tube d'induction aboutit à deux éléments superficiels contenant des masses électriques égales et de signes contraires.

Le champ lui-même est, en tout point d'une même surface équipotentielle, avec excès ou défaut d'électricité par rapport à l'état neutre, suivant que le potentiel, au point considéré du diélectrique, est supérieur ou inférieur au potentiel E_0.

11. — INSTABILITÉ D'UN CONDUCTEUR DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE

Le courant électrique qui s'est établi à travers le diélectrique n'a d'autre cause que la tendance vers l'état d'équilibre auquel le système obéit, et c'est le seul moyen par lequel il puisse y tendre, si, comme nous l'avons admis jusqu'ici, les conducteurs sont maintenus dans une position invariable. Mais si l'on vient à donner à ces conducteurs toute liberté pour se mouvoir, ils ne resteront pas au repos ; ils chercheront eux-mêmes par leurs déplacements à satisfaire dans la plus large mesure possible, à cette tendance vers l'état d'équilibre. Telle est la véritable cause pour laquelle un corps conducteur n'est pas, en général, en équilibre mécanique dans un champ électrique. Chaque partie de sa superficie est sollicitée vers l'extrémité des tubes d'induction qui lui portent de l'électricité, ou repoussée de l'extrémité des tubes qui lui en enlèvent. L'intensité de cette action dépend naturellement de la vitesse du flux d'électricité I aux extrémités de chaque tube : ainsi s'expliquera, dans les phénomènes d'attraction et de répulsion entre corps électrisés, le rôle des masses électriques réparties à la surface de ces corps.

12. — ÉLECTRICITÉ INDUITE SUR LES CONDUCTEURS DE POTENTIEL MAXIMUM OU MINIMUM

Comme nous ne connaissons du potentiel que des valeurs relatives, nous supposerons nul, dans ce qui suit, le potentiel du corps N enveloppant un champ électrique, et que nous appelons le corps à l'état neutre. D'après cela, nous avons déjà vu que, si le champ ne contient qu'un seul corps électrisé M_1, quelle que soit sa position, sa superficie sera recouverte d'une couche d'électricité partout positive ou négative, suivant que le potentiel de ce corps sera positif ou négatif.

Quand le champ contient plusieurs conducteurs, parmi ces conducteurs, auxquels nous ajouterons celui qui enveloppe le champ, le conducteur dont le potentiel sera le plus élevé, ne contiendra, à sa surface, qu'une couche partout positive d'électricité, car toutes les lignes de force qui en émanent ne peuvent être qu'à potentiel décroissant : celui dont le potentiel sera le moins élevé ne contiendra à sa surface qu'une couche partout négative, car toutes les lignes de force qui en émanent ne peuvent être qu'à potentiel croissant.

Il suit de là que si le champ ne contient que deux corps électrisés à des potentiels de signes contraires, la masse électrique distribuée sur la superficie de chacun d'eux aura partout même signe que le potentiel du corps. Les deux corps seront chargés de masses électriques de signes contraires. Il en sera de même si l'un des corps est au potentiel zéro. Il aura sa surface chargée d'électricité de signe contraire à l'électricité distribuée sur l'autre corps, c'est-à-dire de signe contraire au potentiel de ce corps. Dans ce dernier cas, la charge *induite* sur le corps de potentiel nul est toujours plus faible que la charge du corps *inducteur*, car tous les tubes d'induction partant de ce dernier, viennent aboutir non seulement sur le premier corps, mais aussi à la limite du champ. Le conducteur N, qui limite ce champ, reçoit donc, sur sa surface interne, une électrisation de même signe que le corps induit.

On voit facilement par les positions relatives des surfaces équipotentielles que, forcément, quand les deux corps sont électrisés en sens contraires, il existe toujours des tubes émanant de chacun d'eux, et qui viennent induire d'électricité de nom contraire la surface terminale du diélectrique, en sorte que cette surface est toujours divisée en deux régions chargées l'une d'électricité positive et l'autre d'électricité négative, l'une de ces régions s'évanouissant, quand l'un des deux corps prend le potentiel zéro.

13. — EFFETS DE L'ÉLECTRISATION DE CERTAINS CONDUCTEURS SUR LES CONDUCTEURS ISOLÉS, DANS UN CHAMP PRIMITIVEMENT NEUTRE

Considérons un champ primitivement nul ou à l'état neutre, au potentiel zéro ; il contient divers conducteurs M_1, M_2..., N', N''..., dont les positives sont invariables : tandis que les conducteurs N', N'', sont *isolés,* c'est-à-dire, sans communications avec des sources d'électricité, chacun des conducteurs M_1, M_2..., est mis en relation avec une succession de sources dont les potentiels croissent ou décroissent progressivement de zéro jusqu'à une valeur E_1 pour le conducteur M_1, E_2 pour le conducteur M_2, etc. : à partir de ce moment les potentiels de ces corps sont maintenus invariables par l'action de sources permanentes de potentiels E_1, E_2...

Un régime permanent s'est établi dans ce système ; les conducteurs N', N''..., y forment, si l'on peut s'exprimer ainsi, des diélectriques de conductibilité infinie, en contact par leurs surfaces avec le véritable diélectrique dont la conductibilité est excessivement faible. Chacun de ces conducteurs isolés aura pris dans toute son étendue un potentiel uniforme, E' pour N', E'' pour N'', etc., qui nous est inconnu ; mais ce potentiel est absolument déterminé par le champ stable qui s'est nécessairement formé.

Le véritable diélectrique sera aussi partout à un potentiel déterminé ; il sera divisé en tranches par une série de surfaces équipotentielles dont font partie les surfaces des corps M ou N. Toute trajectoire orthogonale à ces surfaces, c'est-à-dire toute ligne de force partant d'un conducteur M ou N, ira aboutir à un autre conducteur, et le champ sera aussi partagé en tubes d'induction juxtaposés sans discontinuité aboutissant, chacun, aux éléments superficiels de deux conducteurs distincts.

Puisqu'on peut regarder les conducteurs isolés N', N''..., comme faisant partie du champ, on peut aussi regarder les tubes d'induction comme traversant ces conducteurs quand ils les rencontrent ; ils amènent par certains points de la superficie de l'un quelconque de ces conducteurs isolés un flux d'électricité qui sort, sans perte ni gain, par d'autres points, en sorte que la charge électrique de chacun des conducteurs N', N''..., sera nulle. Il ne peut d'ailleurs en être autrement, car si chacun de ces conducteurs, qui est isolé de toute source, ne recevait pas la même quantité d'électricité qu'il en perd, son état ne pourrait rester invariable, et l'on n'aurait pas obtenu le champ stable qui doit s'établir.

Tous les potentiels E', E''..., des corps N', N''..., seront compris entre le plus élevé et le moins élevé des potentiels zéro, E_1, E_2... ; car si le potentiel de l'un de ces corps était en dehors de ces limites, sa superficie ne serait chargée que d'électricité d'une seule espèce, comme nous l'avons déjà vu, et c'est impossible, puisque la charge du corps est nulle.

Cette charge nulle est composée de masses électriques égales et de signes contraires, séparées par une ligne neutre. Ces masses ne peuvent être nulles, ce qui indiquerait que le flux d'électricité en tout point de la surface du corps serait nul, et impliquerait l'uniformité du potentiel dans le milieu environnant jusqu'à la rencontre des divers conducteurs qui auraient tous le même potentiel. Ce cas ne peut donc se présenter que si tous les conducteurs sont à l'état neutre.

14. — CAS OÙ IL N'EXISTE DANS LE CHAMP PRIMITIVEMENT NEUTRE QU'UN CONDUCTEUR ISOLÉ ET UN CONDUCTEUR QU'ON ÉLECTRISE

S'il n'existe dans le champ qu'un seul conducteur M_1 et un seul conducteur N', ce dernier aura pris un potentiel E' compris entre zéro et E_1, d'après ce que nous avons déjà vu. Il sera chargé de deux masses électriques égales et de signes contraires qui seront différentes de zéro, à moins que E_1 ne soit lui-même égal à zéro. Nous ajouterons que chacune de ces masses sera plus petite que la masse partout de même signe distribuée à la surface du corps M_1. En effet, les tubes d'induction partant de ce dernier corps aboutissent tous sur les conducteurs N et N', et sont tous traversés dans un même sens par le flux d'électricité ; ils n'induisent donc sur le corps N′ qu'une fraction de son électricité changée de signe. Le reste du champ qui n'est pas balayé par ce flux, est entièrement occupé par les tubes d'induction émanant de N, et qui induisent sur N′ une masse électrique égale et de signe contraire à la fraction qui lui vient du corps M_1. Remarquons enfin que le corps N limitant le diélectrique est, d'après la loi de conservation des masses électriques, recouvert d'une couche d'électricité d'une seule espèce égale et de signe contraire à la charge du corps M_1.

15. — EFFETS DU DÉPLACEMENT DES CONDUCTEURS ET DE L'ÉLECTRISATION DES CONDUCTEURS NON ISOLÉS SUR LES CONDUCTEURS ISOLÉS DE CHARGE NULLE

Nous avons supposé fixes tous les corps M et N. Admettons que l'un des corps M vienne à changer de position dans le champ : un nouvel état d'équilibre dynamique s'établira ; les potentiels de tous les corps N s'en ressentiront, mais la charge de chacun de ces corps restera nulle : cela résulte de ce que le nouveau régime permanent s'établit encore à travers le diélectrique et à travers les corps N considérés comme faisant partie du champ avec une conductibilité infinie. Il en sera de même, et pour la même raison, si c'est l'un des corps N eux-mêmes qui est déplacé. Remarquons enfin que si, au lieu de déplacer les corps M, on fait varier leurs potentiels, le nouveau régime permanent qui interviendra s'établira toujours à travers le diélectrique et à travers les corps N, dont les charges resteront encore nulles.

On peut donc formuler la loi suivante :

Si un champ stable contient des conducteurs M_1, M_2..., *qui sont en relation avec des sources d'électricité, et des conducteurs isolés* N′ N″..., *dont les charges sont nulles, la variation du potentiel des sources en relation avec les corps* M, *et le déplacement des corps* M *ou* N *provoque l'établissement d'un nouveau champ, dans lequel les charges des corps* N *restent toujours nulles.*

16. — CHAMP INDÉPENDANT CRÉÉ A L'INTÉRIEUR D'UN CONDUCTEUR CREUX

Si parmi les conducteurs M_1, M_2..., plongés dans un champ stable et maintenus à potentiels constants par leur relation avec des sources d'électricité, il s'en trouve un M_1 qui soit creux, dont la cavité peut d'ailleurs être remplie par un diélectrique quelconque, pourvu que l'uniformité de température subsiste dans tout le système, toute l'étendue de cette cavité sera au même potentiel E_1 que le conducteur qui l'enveloppe. Si, en effet, le régime permanent étant établi, le potentiel était variable d'un point à un autre, il n'en existerait pas moins des surfaces équipotentielles dont les trajectoires orthogonales ou lignes de force ne pourraient émaner que de la surface interne du conducteur pour y aboutir également, ce qui est impossible, puisque le mouvement d'électricité, qui ne peut manquer d'exister dans un milieu à potentiel variable, se ferait à travers des tubes d'induction ayant même potentiel au point d'émission et au point d'absorption.

La surface interne d'un tel conducteur ne contiendra donc aucune masse électrique.

Supposons maintenant que la cavité dont il s'agit contienne des conducteurs M_1', M_1''..., maintenus aux potentiels respectifs E_1', E_1''..., nous nous trouvons en présence d'un nouveau champ complètement indépendant du premier. Tout ce qui se passe dans l'un est sans influence sur ce qui se passe dans l'autre ; les phénomènes obéissent d'ailleurs aux mêmes lois déjà exposées.

La distribution des masses électriques sur la surface extérieure du corps M_1 de potentiel déterminé, ne dépend que de l'état du champ extérieur ; cette distribution sur la surface intérieure de ce corps ne dépend que de l'état du champ qu'il enveloppe. Ces deux distributions sont donc sans corrélation aucune.

Revenons au cas où, dans un champ primitivement neutre et au potentiel zéro, nous avons des conducteurs M_1, M_2..., N', N''..., les conducteurs M devant être mis en relation avec des sources d'électricité, tandis que les conducteurs N resteront isolés ; mais supposons que certains de ces derniers, N' et N'', par exemple, soient creux, remplis d'un diélectrique quelconque dans les conditions déjà indiquées, et contiennent, en outre, d'autres conducteurs M_1', M_1''..., M_2', M_2''..., qui, comme les conducteurs M_1, M_2..., sont mis en relation avec une succession de sources. Ces sources amèneront les corps M_1, M_2..., M_1', M_1''..., M_2', M_2''..., aux potentiels respectifs E_1, E_2..., E_1', E_1''..., E_2', E_2''..., qu'ils conserveront désormais grâce à leur communication avec des sources invariables ayant ces mêmes potentiels.

Un régime permanent se sera établi dans ce système à travers les divers diélectriques et à travers les corps N′, N″..., qui prendront des potentiels déterminés et dont les charges seront nulles, en sorte que ceux qui sont creux comme N′ et N″ auront sur leurs deux faces deux couches d'électricité égales et de signes contraires.

Un champ stable se sera formé dans chaque région enveloppée par un conducteur et dans laquelle seront observées toutes les lois de l'induction, notamment la loi de conservation des masses électriques.

Il ne faudrait pas confondre les deux cas concernant les conducteurs creux qui viennent d'être examinés. Dans le premier cas, les conducteurs creux sont en communication avec des sources d'électricité, ils ont un potentiel imposé d'avance ; dans le second cas, les conducteurs creux sont isolés, leur potentiel est fixé par le régime permanent qui s'établit. Dans le premier cas, la masse électrique répartie sur la face extérieure d'un conducteur creux est indépendante de la masse répartie sur sa face intérieure, en sorte que la charge totale de ce conducteur peut avoir une valeur quelconque : dans le second cas, au contraire, ces deux masses sont égales et de signes contraires, et la charge totale du conducteur est toujours nulle.

17. — DISTINCTION ENTRE LA MASSE OU LA CHARGE ÉLECTRIQUE ET LA QUANTITÉ D'ÉLECTRICITÉ

Observons en terminant ce chapitre combien sont relatives les expressions : *électricité positive, électricité négative, masse ou charge électrique* répartie à la surface d'un conducteur. Un même corps M_1', dans un état parfaitement déterminé par son potentiel E_1', puisque nous supposons sa température et sa pression toujours invariables, se trouvant successivement placé dans deux champs nuls de potentiels E_0 et E_1, n'aura pas, en général, la même charge ; il pourra même être électrisé positivement dans l'un des champs et négativement dans l'autre. C'est ce qui arrivera si son potentiel E_1' est compris entre E_0 et E_1. Si, par exemple, E_0 est inférieur à E_1, le corps M_1' sera électrisé positivement dans le premier champ et négativement dans le second ; ce qui signifie que, dans le premier champ, il émet de l'électricité, et que, dans le second, il en absorbe. Quoique la masse électrique soit une quantité d'électricité, on voit que les deux notions sont essentiellement distinctes ; on ne doit jamais les confondre. Un corps à un potentiel déterminé possède une quantité inconnue mais définie d'électricité, il peut au contraire contenir, à sa surface, des masses très variables d'électricité, suivant les conditions dans lesquelles il se trouvera placé dans un champ stable, et qui lui feront émettre ou absorber, par seconde, des quantités très différentes d'électricité.

CHAPITRE II

Principe de la superposition des effets électriques

1. — ÉNONCÉ DU PRINCIPE DE LA SUPERPOSITION

Toute la théorie de l'Électrostatique est basée sur une loi expérimentale simple qui sera le sujet du chap. IV et sur deux principes généraux, le principe de la superposition des effets électriques que nous examinerons tout d'abord et le principe de conservation des charges sur les conducteurs isolés.

Considérons un diélectrique limité par une surface conductrice et invariable portée au potentiel E_0 : ce diélectrique contient des conducteurs qui occupent des espaces fixes M_1, M_2..., et qui sont maintenus à des potentiels déterminés E_1, E_2... ; on sait, par expérience, que ces données provoquent un état d'équilibre dynamique physiquement réalisable, et qu'un champ s'établira dans ce diélectrique. Un élément superficiel $d\Omega$, placé en un point quelconque du diélectrique ou sur la surface d'un des conducteurs, livrera passage à un flux d'électricité déterminé, c'est celui qui s'écoule dans le tube d'induction dont l'élément $d\Omega$ est une section droite ou oblique. Si d'autres conducteurs, maintenus à des potentiels E_1', E_2'..., viennent occuper les mêmes espaces M_1, M_2..., tandis que l'enveloppe conductrice du diélectrique est portée au potentiel E_0', il s'établira un autre champ stable : le même élément $d\Omega$ livrera passage à un nouveau flux d'électricité.

Le principe de la superposition des effets électriques consiste en ceci :

Deux champs stables superposés forment un champ stable en chaque point duquel le flux d'électricité traversant un élément superficiel $d\Omega$ est la somme des flux traversant le même élément dans les deux champs, en sorte que la charge de chaque conducteur dans le dernier champ est la somme des charges des conducteurs occupant le même espace dans le premier et dans le deuxième champ.

On voit que ce principe général sur les états stables d'un champ se divise en deux parties, superposition des potentiels et superposition des flux d'électricité de deux champs stables pour former un troisième champ stable.

2. — THÉORÈME DE THOMSON

Ce principe général trouve sa justification dans les nombreuses conclusions qu'on en tire, et que l'expérience vérifie. Il a, dans les théories électriques, une importance capitale. Une première des conséquences qu'on en déduit est le théorème de Thomson qu'on peut énoncer comme il suit :

Dans un diélectrique limité contenant des conducteurs qui occupent des espaces fixes M_1, M_2..., *et qui sont maintenus à des potentiels déterminés* E_1, E_2..., *tandis que l'enveloppe du diélectrique est au potentiel* E_0, *il ne peut exister qu'un seul champ stable.*

Supposons que les potentiels E_0, E_1, E_2..., soient mesurés à l'échelle absolue, et soit E un potentiel arbitrairement choisi, mais supérieur à tous les potentiels E_1, E_2... ; admettons qu'il puisse exister, dans les conditions données, deux états stables du champ. Considérons un troisième champ stable obtenu au moyen de conducteurs occupant les mêmes espaces M_1, M_2..., mais portés respectivement aux potentiels $E + E_0 - E_1$, $E + E_0 - E_2$... ; la limite du champ étant au potentiel absolu E : superposons ce troisième champ à chacun des deux premiers, nous obtiendrons deux nouveaux champs, différents par hypothèse, et qui pourraient être établis dans le diélectrique par des conducteurs qui ont tous le potentiel $E + E_0$ de sa limite, ce qui est évidemment impossible, le seul champ stable réalisable étant un champ nul au potentiel uniforme $E + E_0$. Les deux champs stables considérés ne peuvent donc différer.

3. — SUBSTITUTION DE SURFACES CONDUCTRICES AUX SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES

Il résulte du théorème de Thomson que si, dans un système quelconque, on peut définir un état d'équilibre dynamique, on est certain que cet état est le seul possible.

Ainsi, quand une surface équipotentielle fermée enveloppe plusieurs conducteurs, l'état du champ ne peut pas être modifié en dehors de cette surface, si l'on remplace le diélectrique et les conducteurs qu'elle renferme, par un conducteur unique maintenu au potentiel de cette surface par sa communication avec une source d'électricité ; car le potentiel de cette surface reste le même comme auparavant sans pouvoir varier, et l'état du système à l'extérieur n'est pas influencé par cette substitution. On a ainsi réalisé, dans le système modifié, un régime permanent, et c'est le seul possible.

On verrait de même que l'état du champ n'est pas modifié à l'intérieur d'une surface équipotentielle fermée, si l'on remplace le diélectrique et les conducteurs placés en dehors d'elle, par un conducteur enveloppant de même potentiel.

Si l'on superpose à un champ stable quelconque le champ nul réalisé quand tous les espaces fixes occupés par les conducteurs et par l'enveloppe invariable du diélectrique sont à un seul et même potentiel E, le potentiel en chaque point du champ sera augmenté de E. Par conséquent, quand on augmente d'une même quantité E, le potentiel des conducteurs occupant ces espaces et le potentiel de l'enveloppe du diélectrique, les surfaces équipotentielles du nouveau champ établi sont les mêmes, sauf que le potentiel de chacune d'elles est augmenté de E. De plus, le flux d'électricité étant partout nul dans le champ nul superposé au champ primitif, les charges des conducteurs restent invariables.

4. — LE CHAMP UNIFORME

Considérons, en particulier, le champ stable établi entre deux plans conducteurs, parallèles et indéfinis, de potentiels déterminés E_0 et E_1, et distants entre eux d'une quantité n. C'est la limite du champ compris entre deux sphères concentriques de rayons R et $R + n$, quand R tend vers l'infini. Les surfaces équipotentielles comprises entre ces deux plans seront évidemment planes et parallèles aux deux plans donnés ; si l'on n'envisage que celles dont les potentiels diffèrent de l'une à la suivante, d'une même quantité, de l'unité de potentiel, par exemple, le principe de la superposition des effets électriques va nous apprendre qu'elles seront équidistantes. Observons d'abord que, dans ce cas, les tubes d'induction sont des cylindres à génératrices perpendiculaires aux plans donnés. Soit $E_1 > E_0$; si l'on augmente ou si l'on diminue E_0 et E_1 d'une même quantité, le flux d'électricité reste le même dans un tube d'induction quelconque, d'après ce que nous venons de voir. La différence de potentiel des deux plans n'a pas non plus varié. Si E_1 ou E_0 seul augmente, cela revient à superposer au champ un champ non nul qui, suivant le cas, donnera lieu à un écoulement d'électricité dans les tubes d'induction dans le même sens que le flux primitif ou en sens contraire, de sorte que ce flux primitif augmentera ou diminuera, mais aussi la différence de potentiel aura augmenté ou diminué sur les deux plans donnés. Donc pour une distance invariable de ces deux plans, il faut que la différence de potentiel soit constante pour que le flux reste le même. Or, dans le champ qui nous occupe, le flux d'électricité est le même entre deux plans équipotentiels qu'on peut d'ailleurs supposer remplacés par des surfaces conductrices ; si deux de ces plans sont choisis arbitrairement en restant séparés par une même distance, ils correspondront à une même différence de potentiel, et les plans se succédant à cette même distance auront des potentiels variant en progression arithmétique, ce qu'il s'agissait d'établir. Un tel champ est ce que l'on appelle un *champ uniforme*.

5. — LE COEFFICIENT DE CONDUCTIBILITÉ OU LA CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE

Il résulte de ce qui précède que dans un champ uniforme déterminé par l'équidistance de ses plans équipotentiels variant d'unité en unité de potentiel, le flux d'électricité I traversant l'unité de surface sur chaque plan équipotentiel est déterminé pour un même diélectrique pris dans les mêmes conditions de température et de pression. Considérons, en particulier, le champ dans lequel cette équidistance est égale à l'unité, et appelons c le flux d'électricité dans ce cas. Si on superpose à ce champ un champ semblable, le flux va doubler, mais l'équidistance des plans, variant d'unité en unité de potentiel, va évidemment devenir moitié moindre. Le flux I est donc, pour un champ uniforme quelconque, inversement proportionnel à la distance commune de ces plans. Cette distance est d'ailleurs égale à celle qui sépare deux plans quelconques, divisée par la différence de potentiel de ces deux plans, elle est notamment égale à $\frac{n}{E_1 - E_0}$. On a donc pour le flux I

$$I = -c \frac{E_1 - E_0}{n}, \tag{1}$$

le signe moins signifiant que le flux progresse dans le sens des potentiels décroissants.

Si l'on appelle ΔE la différence de potentiel entre deux plans quelconques et Δn la distance qui les sépare, cette formule devient

$$I = -c \frac{\Delta E}{\Delta n}. \tag{2}$$

ΔE et Δn peuvent être des infiniment petits correspondant à deux plans équipotentiels infiniment voisins. c est le coefficient de *conductibilité* ou la *conductivité électrique* du milieu ; il dépend de la nature de ce milieu ainsi que de sa température et de sa pression que nous supposons uniformes dans toute son étendue.

6. — LE POUVOIR INDUCTEUR SPÉCIFIQUE

Si les plans limitant un champ uniforme restent invariables ainsi que les potentiels E_0 et E_1 sur chacun d'eux, tandis que le diélectrique vient à changer ou que le même diélectrique vienne à changer de température et de pression, le champ restera évidemment avec même potentiel en chacun de ses points ; mais le flux d'électricité aura varié. Si c' est la conductivité du nouveau diélectrique, ce flux, d'après la formule (1) aura varié dans le rapport de c à c' : la densité de la couche électrique répartie uniformément sur chacun des plans conducteurs, limites du champ, aura varié dans le même rapport. Si c et c' sont, pour les diélectriques, des quantités très petites, le rapport $\frac{c'}{c}$ a une valeur finie et bien déterminée : c'est le *pouvoir inducteur* du second milieu par rapport au premier, ou simplement son *pouvoir inducteur spécifique,* quand le premier diélectrique, pris comme terme de comparaison, est l'air pur à la pression et à la température normales. Le pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique est donc sa conductibilité électrique, celle de l'air étant prise comme unité. Comme l'air est le corps isolant le plus parfait qui soit connu, le pouvoir inducteur spécifique est toujours un nombre plus grand que l'unité. On voit, d'après cela, que la conductivité électrique d'un isolant pourrait aussi bien s'appeler son pouvoir inducteur absolu. Nous verrons dans la suite comment, pratiquement, se mesure le pouvoir inducteur spécifique d'un isolant.

7. — LA LOI DE OHM

Si, dans un champ quelconque, nous considérons deux surfaces équipotentielles infiniment voisines et un tube d'induction de section infiniment petite $d\Omega$ compris entre ces surfaces, ce tube avec le flux qui le parcourt pourra être regardé comme appartenant à un champ uniforme déterminé par les plans tangents aux surfaces équipotentielles suivant les bases de ce tube qui est sensiblement cylindrique et droit ; si dn est sa hauteur et dE la différence de potentiel des deux surfaces, la formule (2), qui est évidemment applicable, donnera pour le flux d'électricité di passant par les bases du tube d'induction

$$(3) \qquad di = -\mathrm{I}d\Omega = -c\,d\Omega\,\frac{dE}{dn}\cdot$$

Le flux d'électricité di *qui traverse, pendant l'unité de temps, un élément* dΩ *d'une surface équipotentielle, est proportionnel à la surface de cet élément et à la dérivée du potentiel* E *par rapport à la normale à cette surface.*

C'est, sous sa forme la plus générale, la *loi de Ohm*, qui joue dans les théories électriques un rôle prépondérant. Elle découle du principe de la superposition des effets électriques ; il serait facile de démontrer qu'admise à priori, elle conduit à la démonstration de ce principe, qui est, dès lors, équivalent à la loi de Ohm.

8. — THÉORIE DE FOURIER SUR LA PROPAGATION DE LA CHALEUR

Cette loi de Ohm qui, en effet, a été admise à priori, n'est que l'application à l'électricité de l'hypothèse de Fourier dans sa théorie de la propagation de la chaleur.

Quoique la conduction électrique et la conduction calorifique soient deux phénomènes d'ordre très différent, puisque, dans le premier cas, il s'agit du déplacement d'une forme d'entropie, et, dans le second cas, du déplacement d'une forme d'énergie, le lecteur a été déjà, sans doute, frappé de l'analogie qui existe entre un flux d'électricité se propageant dans un diélectrique, à travers les surfaces équipotentielles qui séparent des sources d'électricité, et un flux de chaleur se transmettant entre les surfaces isothermes d'un milieu qui sépare des sources de chaleur.

La considération des analogies de cette nature a toujours puissamment contribué au progrès des sciences physiques ; aussi croyons-nous devoir nous arrêter un instant sur ce problème de la propagation de la chaleur par conduction. Ce problème a été traité par Fourier dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, qui fut publiée en 1822, et qui est encore aujourd'hui une des plus belles applications de l'analyse mathématique à la physique.

D'après Fourier, la chaleur traverse normalement les surfaces isothermes dans le sens des températures décroissantes et le flux dQ qui, dans l'unité de temps, passe d'une surface isotherme à la surface infiniment voisine, à travers un canal de section moyenne $d\Omega$, est proportionnel à cette section, à la différence dT des températures sur les surfaces isothermes considérées, et inversement proportionnel à la distance dn qui sépare les deux sections terminales du canal, de sorte que l'on a

$$dQ = -k\, d\Omega\, \frac{dT}{dn}. \tag{4}$$

La quantité constante k est le coefficient de conductibilité calorifique du milieu, et dépend de la nature de ce milieu. Il représente le flux de chaleur, par unité de surface, entre deux plans parallèles, distants de l'unité de longueur, et dont la différence de température serait de 1 degré. D'après cela, le flux de chaleur, par unité de surface, en chaque point, a pour valeur

$$Q = -k\frac{dT}{dn}, \tag{5}$$

il est proportionnel à la dérivée de la température par rapport à la normale à la surface isotherme correspondante.

9. — DIGRESSION SUR L'ÉCHELLE ABSOLUE DES TEMPÉRATURES

Nos idées sur la chaleur sont bien différentes de celles qu'avaient les contemporains de Fourier. Ils regardaient le calorique comme un fluide indestructible. C'était là, il est vrai, une erreur sans importance au point de vue des phénomènes de conduction qui *conservent* le calorique, mais les savants de cette époque n'avaient pas de la température la notion scientifique que nous ont donnée les rapides progrès de la thermodynamique ; ils n'en connaissaient pas l'*échelle absolue :* aussi ne pouvaient-ils songer à se demander ce que Fourier entendait par *un degré de température* dans la définition de la conductibilité k. Cette quantité, telle qu'on pouvait la concevoir alors, aussi bien que la différence dT qui figure dans la formule (4), ne représentent plus pour nous des quantités nettement définies. Pour leur donner un sens précis, il faut choisir une échelle particulière des températures, mais, en même temps, une échelle rationnelle, en accord avec l'hypothèse sur laquelle Fourier avait l'intention de baser sa théorie, quand il posait la formule (4).

Or cette hypothèse elle-même permet de définir au moyen d'un seul et même corps, d'ailleurs quelconque, les températures successives variant d'unité en unité. Partant de deux températures arbitrairement choisies, et dont la différence serait, par définition, d'un seul degré, toute autre température déterminée s'exprimera par un nombre correspondant T, dès que l'une des températures de base, la moins élevée, par exemple, sera exprimée par un nombre donné quelconque T_0, l'autre température de base étant de $T_0 + 1$ degrés.

Considérons, en effet, un corps isotrope quelconque, compris entre deux plans parallèles dont les températures restent invariables, et qui est soumis à un régime permanent. Les surfaces isothermes, variant de degré en degré de température dans ce milieu, seront des plans parallèles et équidistants d'après la formule (4), c'est-à-dire d'après l'hypothèse fondamentale de Fourier. Le champ calorifique sera *uniforme*. Si nous prenons comme repères les plans isothermes aux températures T_0 et $T_0 + 1$, les plans successifs parallèles à ces derniers, et ayant entre eux la même distance, marqueront les points du milieu dont les températures varieront de degré en degré. L'échelle des températures sera complètement définie, et elle sera indépendante du milieu employé pour la construire. Elle sera donc une *échelle absolue,* comme celle imaginée par sir William Thomson (Lord Kelvin), et basée sur les principes de la Thermodynamique. Il est assez vraisemblable que ces deux modes de construire une échelle ayant des caractères si généraux et si remarquables, doivent conduire à des graduations comparables, et que ces deux échelles se confondent. Nous admettons donc que dans la formule (4) la lettre T représente la température absolue, telle qu'elle est définie en Thermodynamique.

Le coefficient de conductibilité k serait une constante qui dépend de la nature du corps : il est naturel de supposer qu'une variation de pression dans un même milieu équivaut à un changement dans la nature de ce milieu; on admettra donc que le coefficient de conductibilité calorifique d'un corps est une fonction de la pression que supporte ce corps, et qui dépend de sa nature.

10. — FLUX DE CHALEUR TRAVERSANT UN ÉLÉMENT SUPERFICIEL D'ORIENTATION QUELCONQUE

La formule (4) ne s'applique pas seulement au cas où l'élément traversé par le flux de chaleur est pris sur une surface isotherme. L'orientation de l'élément, dont nous désignerons alors la superficie par $d\Omega'$, peut être quelconque, pourvu que la distance dn soit remplacée par la distance dn' représentant la partie d'une normale à l'élément $d\Omega'$, issue, par exemple, de son centre de gravité, et interceptée entre ce centre de gravité où la température est T et la surface isotherme de température infiniment voisine T + dT.

Le flux traversant l'élément $d\Omega'$ est, en effet, le même que celui qui s'écoule dans le canal orthogonal aux surfaces isothermes, et dont les parois passent par son contour. Ce canal découpe sur la surface isotherme de température T, une section $d\Omega$ dont la superficie est donnée par la formule

$$d\Omega = d\Omega' \cos\theta,$$

θ étant l'angle formé par les deux éléments superficiels ou par les normales élevées sur ces éléments.

Or le flux dQ qui traverse ces deux éléments est donné par la formule (4) qu'on peut écrire

$$dQ = -k d\Omega' \cos\theta \frac{dT}{dn} = -k d\Omega' \frac{dT}{dn'} \frac{dn' \cos\theta}{dn};$$

et comme $$dn = dn' \cos\theta,$$

(6) $$dQ = -k \, d\Omega' \frac{dT}{dn'}.$$

Ainsi se trouve démontrée la généralité de la formule (4).

Si nous considérons la limite de $\frac{dQ}{d\Omega'}$, quand $d\Omega'$ tend vers zéro, et que nous appelions Q cette limite, qui représente le flux de chaleur, en un point, par unité de surface comptée perpendiculairement à dn', nous aurons la formule correspondant à la formule (5)

(7) $$Q = -k \frac{dT}{dn'}.$$

Elle exprime que le flux de chaleur par unité de surface orientée d'une façon quelconque, est proportionnel à la dérivée de la température dans le milieu par rapport à la normale à cette surface.

11. — LES SURFACES ISOTHERMES

Le régime permanent étant établi, rapportons le système formé par le milieu et par les sources de chaleur qui l'alimentent, à trois axes de coordonnées rectangulaires. Les surfaces isothermes seront comprises dans une formule générale

$$\mathrm{T} = f(x, y, z), \tag{8}$$

x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque de chaque surface isotherme déterminée pour une valeur particulière donnée à T. Cette formule doit être telle qu'en y faisant T égal aux températures des diverses sources, elle sera satisfaite pour tout point pris à l'intérieur ou sur la superficie de la source considérée. Parmi ces sources nous devons admettre, pour que le système soit défini, qu'il en existe une enveloppant tout le milieu ; de sorte que si l'on suppose infinie l'une au moins des coordonnées x, y, z, le second membre de l'équation (8) aura pour valeur la température de la source enveloppante.

12. — Équation de Laplace

Le flux total de chaleur correspondant à une surface fermée, prise dans un champ stable en dehors des sources doit évidemment être nul. Soit $dxdydz$ un élément de volume au point de coordonnées x, y, z. Le flux qui entre par l'une des faces de ce parallélipipède élémentaire, de superficie $dydz$, est, d'après la formule (7)

$$-k\,dydz\,\frac{d\mathrm{T}}{dx}.$$

Celui qui sort par la surface opposée est

$$-k\,dydz\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{T}}{dx^2}\,dx\right).$$

En répétant le même raisonnement pour les deux autres systèmes de faces, on voit que le flux total de chaleur qui sort de l'élément de volume $dxdydz$ a pour expression

$$-k\left(\frac{d^2\mathrm{T}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{T}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{T}}{dz^2}\right)dxdydz.$$

Ce flux devant être nul, on a

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{T}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{T}}{dz^2} = \Delta\mathrm{T} = 0. \tag{9}$$

La somme des trois dérivées secondes de la température par rapport aux coordonnées est nulle en tous points du milieu. On la représente par le symbole ΔT. Elle est également nulle en tous points des sources pour lesquels on a $T =$ constante : elle est donc nulle en tous points de l'espace, quels que soient x, y, z ; c'est-à-dire, qu'elle est identiquement nulle. L'équation (9) a été donnée par Laplace dans un mémoire sur l'anneau de Saturne.

13. — LES PHÉNOMÈNES ÉLECTROSTATIQUES ET LA PROPAGATION DE LA CHALEUR

L'analogie entre les phénomènes électrostatiques et ceux de la propagation de la chaleur a été signalée, pour la première fois, par sir W. Thomson dans un mémoire *sur le mouvement uniforme de la chaleur dans les corps homogènes solides et ses rapports avec la théorie mathématique de l'électricité,* publié en 1842. Les idées de l'illustre savant anglais sur ce sujet, suggérées par les travaux de Faraday, sont celles encore en faveur aujourd'hui ; elles fixent à cette analogie une limite qui en restreint singulièrement la portée. Un système de corps électrisés, placé dans un milieu parfaitement isolant, peut, d'après ces idées, rester électrisé pour jamais, sans aucune déperdition ; l'analogue du flux de chaleur est remplacé par un flux de force électromotrice dont le seul effet est d'imposer au diélectrique une sorte de contrainte. Le potentiel électrique, l'analogue de la température, est considéré comme une pure conception scientifique sans influence sur l'état physique des corps. Nous avons déjà suffisamment indiqué les raisons qui paraissent s'imposer aujourd'hui pour abandonner ces conceptions, et pour regarder les phénomènes électrostatiques comme provoqués uniquement par un écoulement réel d'électricité dans le diélectrique entre corps conducteurs portés à des potentiels différents. L'analogie entre ces phénomènes et ceux de la conduction uniforme de la chaleur devient alors frappante, et se poursuit dans les moindres détails.

14. — LES COURANTS ÉLECTRIQUES ET LA PROPAGATION DE LA CHALEUR

Cinq ans après la publication des travaux de Fourier, en 1827, le D^{r} G. Simon Ohm, savant allemand, devançait sir W. Thomson, et établissait le premier un rapprochement entre les phénomènes électriques et les phénomènes calorifiques, dans un ouvrage resté célèbre, la *Théorie mathématique des courants électriques*. Comme l'indique le titre de cet ouvrage, Ohm avait en vue la comparaison des lois de la propagation réelle, soit de la chaleur, soit de l'électricité. Cette comparaison ne pouvait s'étendre aux phénomènes électrostatiques que l'on n'expliquait pas plus alors qu'aujourd'hui, par un écoulement d'électricité. La théorie de Ohm ne concernait donc que les courants électriques.

Il admet que tous les points d'un conducteur en équilibre sont dans un état uniforme, à la même *tension électrique*. Lorsque l'équilibre n'a pas lieu, les tensions sont variables d'un point à un autre ; l'électricité s'écoule des points où la tension est plus élevée vers les points à tension plus faible. En général, le courant est *variable ;* la tension en chaque point est fonction du temps et des coordonnées ; mais si une cause quelconque maintient constantes les tensions de certains points d'un système, il s'établit un régime permanent, un courant *constant*, pour lequel la tension en chaque point devient invariable. Comme l'a montré Kirchhoff, la tension de Ohm, sous une dénomination d'ailleurs plus heureuse, n'est que le potentiel dans les idées actuelles. Le potentiel, en électricité, est donc une tension qui semble y jouer le même rôle que la température dans la chaleur, et les raisonnements appliqués par Fourier au flux de chaleur entre surfaces isothermes apparaissent comme également applicables au flux d'électricité entre surfaces équipotentielles. L'analogie si étroite entre les deux ordres de phénomènes n'avait pas échappé à Ohm, qui transporta dans le domaine de l'électricité l'hypothèse de Fourier ; elle prend alors la forme générale à laquelle nous a amené le principe de superposition et que traduit la formule (3) ; de cette forme on tire l'énoncé classique de la loi de Ohm sur les seuls courants électriques que ce savant avait en vue.

En suivant les raisonnements faits précédemment à propos de la chaleur, on démontrerait que la formule (3) est applicable quelle que soit l'orientation de l'élément $d\Omega$ passant par un point (x, y, z) du champ électrique, la distance dn représentant la partie de la normale à l'élément en ce point et interceptée entre la surface équipotentielle qui y passe et la surface équipotentielle infiniment voisine.

On verrait de même que le potentiel en un point d'un champ stable étant représenté par la formule générale que nous appellerons l'*équation du champ*

$$E = f(x, y, z), \tag{10}$$

on doit avoir identiquement, quels que soient x, y, z,

$$\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{d^2E}{dy^2} + \frac{d^2E}{dz^2} = \Delta E = 0. \tag{11}$$

15. — LA FORCE ÉLECTROMOTRICE OU L'INTENSITÉ DU CHAMP

La dérivée du potentiel par rapport à la normale à la surface équipotentielle correspondante, dirigée vers les potentiels décroissants, c'est-à-dire, la quantité géométrique $-\frac{dE}{dn}$ joue un rôle important dans les théories électriques. Elle a reçu différents noms ; on l'appelle la *force électromotrice* ou *électrique*, l'*intensité du champ*, ou, même simplement, le *champ*. Nous la désignerons par la lettre F.

Ce vecteur, multiplié par la constante c, représente en grandeur, direction et sens la quantité I d'électricité, rapportée à l'unité de surface, qui, par unité de temps, traverse la surface équipotentielle au point considéré ; c'est l'*intensité du courant*, à travers le diélectrique en ce point :

$$I = cF. \tag{12}$$

A la surface des conducteurs et à la limite du champ, l'intensité I du courant et l'intensité F du champ sont dirigées vers l'intérieur de ces conducteurs et en dehors du champ, ou inversement, suivant que la couche électrique, au point considéré, est négative ou positive. La densité de cette couche est égale à l'intensité du courant, comme nous l'avons déjà vu. Cette intensité, comme l'intensité du champ, est nulle sur les lignes neutres, et, plus généralement, sur les surfaces neutres qui divisent le champ en régions voisines où l'écoulement de l'électricité se fait en sens contraires.

Appelons F′ la projection du vecteur F sur une droite quelconque passant par son origine, et faisant avec lui un angle θ, on aura

$$F' = F \cos\theta = -\frac{dE}{dn}\cos\theta$$

dn et dn' étant les segments des deux vecteurs F et F′ interceptés entre la surface équipotentielle qui passe par leur origine commune et la surface infiniment voisine, on a aussi

$$dn = dn' \cos\theta.$$

Il en résulte

$$F' = -\frac{dE}{dn'}.$$

La projection du vecteur F sur une droite passant par son origine est égale à la dérivée du potentiel par rapport au segment intercepté sur cette droite. On aura donc, X, Y, Z étant les projections du vecteur F sur les directions des axes de coordonnées,

$$X = -\frac{dE}{dx} \quad Y = -\frac{dE}{dy} \quad Z = -\frac{dE}{dz} \tag{13}$$

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \tag{14}$$

et l'équation (11) de Laplace devient

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0. \tag{15}$$

16. — PROBLÈME DE L'ÉQUILIBRE ÉLECTROSTATIQUE

Un système de conducteurs fixes M_1, M_2..., portés à des potentiels constants E_1, E_2..., dans un champ limité primitivement à l'état neutre au potentiel zéro, admet un régime permanent et un seul, déterminant l'équation (10) du champ qui doit remplir les *conditions de stabilité* suivantes :

Elle satisfait à l'identité de Laplace.

Elle doit avoir la valeur zéro pour tout point pris à la limite ou en dehors du champ, la valeur E_k pour tout point pris à la surface ou à l'intérieur de l'un quelconque des conducteurs M_k.

Réciproquement, une équation satisfaisant aux conditions de stabilité, et il n'y en a qu'une seule, représente l'équation du champ.

Cette équation est indépendante de la nature du diélectrique interposé entre les conducteurs, qui ne fait que changer l'intensité du courant en chaque point, cette intensité restant dans un rapport constant avec l'intensité du courant au même point dans un premier isolant, l'air sec, par exemple. Ce rapport est le pouvoir inducteur du deuxième isolant par rapport au premier, en sorte que les charges des conducteurs, quand l'isolant est quelconque, s'obtiennent en multipliant par le pouvoir inducteur spécifique les charges obtenues, quand le milieu est de l'air sec.

La recherche de l'équation du champ est facilitée par le principe de la superposition des effets électriques, puisque la valeur du potentiel en un point est la somme des potentiels des champs créés en supposant successivement un seul des corps électrisés, M_k par exemple, tous les autres restant à l'état neutre, ce qui ramène le problème à un cas plus simple. Ce cas lui-même peut être ramené au cas où le potentiel E_k serait toujours l'unité, ce qui est avantageux quand on laisse indéterminées les valeurs E_1, E_2..., de façon à pouvoir leur donner des valeurs particulières dans diverses applications faites sur le même système. Le problème qu'on est ainsi conduit à résoudre peut être formulé comme il suit :

Étant donné, en forme et en position, un système de conducteurs dans un champ de limites connues, déterminer la valeur du potentiel de chaque point de ce champ, quand le potentiel de l'un des conducteurs est l'unité, tous les autres étant à l'état neutre au potentiel zéro des limites du champ.

Si l'équation du champ dans ces conditions est

$$E = f_k(x, y, z),$$

l'équation générale du champ contenant les conducteurs M_1, M_2..., élevés aux potentiels E_1, E_2..., prendra la forme

$$E = \Sigma E_k f_k(x, y, z).$$

Malgré ces simplifications, la solution du problème qui consiste à déterminer les fonctions f_k a, jusqu'ici, présenté de grandes difficultés mathématiques, qui n'ont pu être vaincues que dans des cas particuliers comportant des formes et des positions relatives simples pour les conducteurs et pour les limites du champ. Nous renvoyons pour ces problèmes aux ouvrages spéciaux.

17. — LOI DE JOULE

La loi de Joule est une conséquence de la loi de Ohm.

Considérons le flux d'électricité qui s'écoule le long d'un tube d'induction entre deux surfaces équipotentielles infiniment voisines, découpant dans le tube des sections de superficie moyenne $d\Omega$, distantes entre elles de dn. La quantité d'électricité di passant dans chaque section du tube d'induction, pendant l'unité de temps, sera

$$di = \mathrm{I}d\Omega.$$

L'énergie électrique qui entre dans le volume $dv = dnd\Omega$ par la section de potentiel le plus élevé, sort par l'autre section diminuée de la quantité qui a été transformée en chaleur dans cet élément de volume, et qui est, comme nous savons, $-d\mathrm{E}di$. Soit $d\mathrm{Q}$ cette quantité de chaleur

$$d\mathrm{Q} = -\,d\mathrm{E}di = -\,\mathrm{I}d\Omega d\mathrm{E} = -\,\mathrm{I}\frac{d\mathrm{E}}{dn}dnd\Omega = \frac{\mathrm{I}^2}{c}dv.$$

Si nous appelons Q cette quantité de chaleur rapportée à l'unité de volume, il vient

$$\mathrm{Q} = \frac{d\mathrm{Q}}{dv} = \frac{\mathrm{I}^2}{c}.$$

c étant une constante qui ne dépend que de la nature du champ, de la température et de la pression supposées uniformes, on peut énoncer la loi suivante :

La quantité de chaleur dégagée, par unité de temps, dans l'unité de volume, en un point du champ, est proportionnelle au carré de l'intensité du courant en ce point.

D'après la formule (12), Q peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{Q} = c\mathrm{F}^2\,;$$

et dans l'énoncé précédent, on peut remplacer l'intensité du courant par l'intensité du champ.

C'est la loi de Joule sous son aspect le plus général : elle est plus connue sous la forme qu'elle prend quand on l'applique, en électrodynamique, à la quantité de chaleur dégagée dans les conducteurs linéaires parcourus par des courants constants.

Dans un diélectrique très bon isolant comme l'air, la conductibilité c qui ne peut être nulle, est excessivement faible, si on la considère comme infiniment petite, la chaleur de Joule est un infiniment petit de même ordre, que l'on peut, la plupart du temps, négliger, dans l'étude des phénomènes d'électrostatique.

CHAPITRE III

Principe de conservation des charges sur les conducteurs isolés

1. — CONDUCTEUR ISOLÉ DANS UN CONDUCTEUR CREUX

Si un champ primitivement à l'état neutre, au potentiel zéro, contient, dans une position invariable, un conducteur creux et isolé N', dans la cavité duquel se trouve un autre conducteur M_1, cette cavité étant remplie d'un diélectrique quelconque, et si le conducteur M_1 est porté à un potentiel E_1, on sait, d'après ce qui a été vu au Chapitre Ier (16), qu'un régime permanent s'établira. Le conducteur creux N', qui est isolé de toute source d'électricité, prendra un potentiel E' compris entre zéro et E_1 (14). Chacune de ses faces se chargera d'une masse électrique d'une seule espèce (16) ; et si, pour préciser, on suppose E_1 positif, cette masse sera positive sur la face extérieure et négative sur la face intérieure ; elles seront d'ailleurs, toutes les deux, égales en valeur absolue.

La déperdition d'électricité du corps M_1, pendant la durée normale d'une série d'expériences faites dans des milieux diélectriques très isolants, tels que l'air sec, peut être considérée comme absolument négligeable, au point que, pendant cette durée, on pourra regarder le corps comme *isolé*, c'est-à-dire, soustrait à toute communication avec une source d'électricité. On constate, en effet, que pendant tout ce laps de temps, ce corps isolé étant ramené, à un moment quelconque, à sa position primitive, le champ électrique reviendra toujours au même état, sans changement appréciable.

Cette constatation, à première vue, peut paraître paradoxale, quand on songe aux effets sensibles que peut produire, pendant ce même laps de temps, cette déperdition insensible. Elle doit cependant, comme nous l'avons déjà fait remarquer, trouver notre esprit bien préparé à l'accepter, après les plus récentes conquêtes que la Physique vient de faire dans le domaine des radiations. Ce fait n'est pas, en effet, plus surprenant que l'invariabilité *apparente* de l'état d'une quantité de radium déjà très petite, qui a émis de la chaleur et de la lumière pendant plusieurs années et d'une façon appréciable.

2. — INVARIABILITÉ DE LA CHARGE DU CONDUCTEUR ISOLÉ QUAND ON LE DÉPLACE

Mais le déplacement du corps isolé M_1 dans la cavité du corps N′ permet de faire encore une autre constatation de la plus haute importance. Ce déplacement ne modifie en rien le champ extérieur qui enveloppe le corps N′, ainsi que le prouve l'exploration de ce champ par un pendule d'épreuve qui ne sera nullement affecté par ces déplacements. Le conducteur creux N′ demeure donc toujours dans le même état, au même potentiel. Il en résulte immédiatement que la masse électrique répandue sur toute l'étendue de sa surface extérieure est invariable : il en est, par conséquent, de même de la masse totale, égale et de signe contraire, répandue sur sa surface interne ainsi que de la charge du corps M_1 qui est égale à la charge extérieure du corps N′. On peut donc formuler la loi expérimentale suivante :

Si l'on électrise un conducteur isolé M_1 dans la cavité d'un autre conducteur N′ également isolé, et plongé lui-même dans un champ neutre, les déplacements que l'on pourra faire subir au conducteur isolé M_1, ne modifieront pas sa charge.

Il suit de là que si deux corps isolés M_1 produisent séparément le même champ stable à l'intérieur du conducteur creux N′, c'est que leurs charges sont égales.

3. — DÉCHARGE DU CONDUCTEUR ISOLÉ SUR LE CONDUCTEUR CREUX QUI LE RENFERME

Si le potentiel E' du corps N' reste invariable, le potentiel E_1 du corps M_1 change, quand ce corps est déplacé ; il diminue, s'il est positif comme on l'a supposé, à mesure que le corps M_1 s'approche de la paroi de la cavité, et ce corps finit par prendre le potentiel E' du corps N', quand il arrive au contact de cette paroi. Le champ est, en effet, continu dans la cavité ; les surfaces équipotentielles qui enveloppent le corps M_1 sont à potentiel décroissant de E_1 à E', et quand M_1 arrive à être suffisamment voisin de la paroi, la faible distance qui l'en sépare donne passage à toutes les surfaces équipotentielles, le potentiel du corps M_1 est alors très voisin de E' ; le champ, dans la cavité, tend partout vers le potentiel E'. Les charges électriques sur la surface du corps M_1 et sur la paroi interne du corps N' ont jusqu'alors conservé les mêmes valeurs égales et de signes contrairse, mais ces charges s'accumulent vers les points qui vont prendre le contact, et entre lesquels se pressent les surfaces équipotentielles. Ces points finissent par acquérir ce que l'on appelle le pouvoir des pointes ; le flux d'électricité s'est concentré dans le faible espace qui les sépare, jusqu'à y prendre une vitesse considérable, tandis que les deux charges en présence diminuent progressivement, et finalement s'évanouissent. Ce phénomène peut même être accompagné d'un dégagement local de chaleur qui ne sera plus négligeable, qui augmentera la conductibilité du diélectrique et pourra provoquer la neutralisation des charges en présence par le moyen d'un courant de très courte durée, c'est-à-dire, par le moyen d'une étincelle électrique.

Quand le contact arrive à se produire, les deux corps N' et M_1 ont acquis le potentiel commun E'. Le champ extérieur n'a subi aucun changement, la charge positive distribuée sur la surface externe du corps N' conserve la valeur de la charge qu'avait primitivement le corps M_1 ; celui-ci a perdu toute trace d'électricité superficielle comme la paroi qu'il est venu toucher. S'il est éloigné maintenant de cette paroi, il restera sans charge électrique au potentiel E' qu'a pris le champ intérieur.

Tous les résultats qui viennent d'être constatés resteraient les mêmes, si, au lieu de déplacer le corps M_1 pour l'amener au contact du corps N', on établissait une communication entre ces deux corps au moyen d'un fil conducteur de dimensions négligeables. Ce fil dégagera toute la chaleur qui, dans le premier cas, serait absorbée par le diélectrique lui-même, et ramènera le corps M_1 au potentiel E'.

Le corps M_1, avant de toucher la paroi interne du corps N', représentait, en définitive, un corps électrisé et isolé qui aurait créé un champ dans un diélectrique primitivement à un potentiel quelconque E'. Il découle de cette remarque que :

Quand un corps est électrisé dans un champ primitivement à l'état neutre, puis isolé, les déplacements de ce corps ne font pas varier sa charge.

4. — DÉPLACEMENTS DU CONDUCTEUR CREUX DANS LE CHAMP LIMITÉ QUI L'ENVIRONNE

Au lieu de déplacer le corps M_1 à l'intérieur de N', supposons que la position relative de ces deux conducteurs reste fixe, et qu'on fasse varier la position du corps N' ; celui-ci se trouve dans le cas d'un conducteur isolé, plein ou creux, peu importe, de potentiel primitif E', et qui se déplace dans le champ extérieur. Il résulte de la loi qui vient d'être énoncée que sa charge superficielle ne changera pas. Il se comportera donc, par ses déplacecements dans le champ extérieur limité à une surface conductrice N, comme le corps M_1 se comporte dans le champ limité à la paroi interne du corps N'. Il induira sur le conducteur N une charge constante égale et de signe contraire à sa charge extérieure, c'est-à-dire, à la charge de M_1 que nous avons supposée positive. Si les conducteurs N et N' arrivent au contact, ou s'ils sont mis en communication par un fil conducteur, la charge positive distribuée sur la surface externe du corps N' disparaît, et ce corps est ramené au potentiel zéro comme tout le champ qui l'environne ; si on le déplace, il reste dans les mêmes conditions électriques.

Voyons maintenant ce qui se passe à l'intérieur du corps N'. Ce corps est un conducteur isolé dont la charge *totale* est primitivement nulle, elle reste donc nulle quand on le déplace (13), Chap. I^{er} : comme, d'après ce qui vient d'être dit, sa charge extérieure et positive reste constante, il en sera de même pour sa charge intérieure et négative, ainsi que pour la charge positive du corps M_1; d'où résulte, comme conséquence de la loi expérimentale énoncée au début de ce chapitre, conséquence qui n'est pas évidente, que le déplacement du conducteur M_1 à l'intérieur du corps N' ne modifie pas la charge de M_1, alors même que l'on déplace aussi le corps N', ce que l'expérience vérifie.

Quand le champ extérieur est ramené à l'état neutre et le corps N' au potentiel zéro, soit par son contact avec le conducteur N limitant le champ, soit par une communication métallique entre ces deux corps, le corps N' ne manifeste plus, à l'extérieur, aucun signe d'électrisation, alors même que l'on déplace le corps M_1 qu'il renferme, et qui conserve sa charge, tandis qu'il induit sur la paroi interne de N' une charge égale et de signe contraire.

Il est à remarquer que le champ à l'intérieur du corps N' peut être formé d'un diélectrique quelconque, et même de plusieurs diélectriques juxtaposés ; l'expérience apprend que, dans ce cas encore, le déplacement des corps isolés N' et M_1, alors même que ce dernier passerait d'un diélectrique dans un autre, laisse sa charge invariable.

Mais nous n'avons encore examiné qu'un cas particulier d'une loi plus générale.

5. — CAS OU LE CONDUCTEUR CREUX CONTIENT PLUSIEURS CONDUCTEURS ISOLÉS

Si, au lieu de contenir un seul conducteur, le corps creux N' en contient plusieurs M_1, M_2..., que l'on élève aux potentiels respectifs E_1, E_2..., pour les isoler ensuite ; dans le régime permanent qui s'établira, le conducteur isolé N' aura un potentiel E' compris entre le plus élevé et le moins élevé des potentiels zéro, E_1, E_2... (13), Chap. Ier, et ses faces prendront des charges égales et de signes contraires (16), Chap. Ier. Si on déplace les corps M_1, M_2..., le régime permanent se modifiera, mais les charges distribuées sur les faces du corps N' resteront égales et de signes contraires (15), Chap. Ier.

Or, l'expérience apprend que ces déplacements n'affectent nullement le champ extérieur, alors même que les corps M_1, M_2..., arriveraient à être mis en communication entre eux ou avec le corps N', soit par contact direct, soit au moyen d'un fil conducteur de dimensions négligeables. Le potentiel du corps N' ne varie donc pas pendant ces opérations, pas plus que sa charge extérieure. Sa charge intérieure, égale et de signe contraire à sa charge extérieure, tant qu'il n'est mis en communication avec aucun des corps M_1, M_2..., reste constante ; il en résulte, d'après la loi de conservation des masses électriques dans le champ créé à l'intérieur du corps N' (16), Chap. Ier, que *la somme algébrique des charges des corps isolés* M_1, M_2..., *restera invariable*. Cette somme sera d'ailleurs égale à la masse totale d'électricité distribuée sur la surface externe du conducteur creux N'.

On peut considérer ces corps comme des conducteurs dont l'électrisation aurait créé un champ dans un milieu primitivement à l'état neutre au potentiel E' ; on peut donc dire que *la somme des charges de conducteurs isolés dans un champ qu'ils ont créé, reste invariable quand on les déplace, alors même qu'on les mettrait en communication électrique entre eux.*

On conclut de cette loi expérimentale que si certains des corps M_1, M_2..., ont des charges nulles à un moment donné, la somme des charges des autres corps conservera toujours la même valeur, car les déplacements de tous les corps laissent nulles les charges qui le sont déjà (15), Chap. Ier.

Mais de nouveaux faits d'expérience vont nous conduire à préciser davantage la loi observée par les charges électriques des corps isolés dans un champ.

6. — CHAMPS SUPERPOSÉS CRÉÉS AUTOUR D'UN CONDUCTEUR CREUX PAR LES CONDUCTEURS ISOLÉS QU'ON Y INTRODUIT

Supposons que les conducteurs M_1, M_2..., soient réunis dans une première cavité creusée dans la paroi conductrice N qui limite le champ extérieur, cette cavité communiquant avec le champ par une ouverture qui pourra donner libre passage aux corps M_1, M_2... Supposons également que dans l'épaisseur du corps creux N' soit percée une autre ouverture pouvant livrer passage aux mêmes conducteurs. Tout le système étant primitivement à l'état neutre, au potentiel zéro, les conducteurs M_1, M_2..., sont électrisés, puis isolés ; ils n'ont créé un champ électrique que dans la cavité qui les contient ; le diélectrique ou les diélectriques juxtaposés dans tout le reste du système, ainsi que le conducteur creux N' restent à l'état neutre et au potentiel zéro.

Si l'on vient maintenant à sortir de la cavité où ils sont remisés un certain nombre de ces conducteurs, la somme de leurs charges restera constante et la charge *totale* du corps N' restera nulle. Ces conducteurs étant introduits dans la cavité du corps N', il s'établira, à l'extérieur, un champ qui restera, comme nous le savons, insensible à tous les déplacements que pourront subir les conducteurs isolés qu'il contient, et qui peuvent arriver au contact entre eux ou avec la paroi interne du corps N'. La charge sur la paroi extérieure de celui-ci restera constante et égale à la somme des charges *primitives* des conducteurs isolés. Quels que soient les contacts établis, la somme de toutes les charges intérieures sera nulle ; et chaque charge sera identiquement nulle, si tous les conducteurs ont été, à un moment donné, mis en contact avec la paroi interne du corps N' ; dans ce cas, d'ailleurs, le potentiel à l'intérieur du corps N devient uniforme, et prend la valeur du potentiel invariable acquis par le corps N'.

Si les conducteurs considérés sont remis dans la première cavité, puis remplacés par d'autres conducteurs extraits de cette même cavité et introduits à l'intérieur du corps creux N', un nouveau champ s'établira autour de ce corps creux dont la surface extérieure prendra une charge constante égale à la somme des charges des nouveaux conducteurs.

Si, enfin, on ajoute à ces nouveaux conducteurs, dans la cavité du corps N', ceux qui y avaient été déjà introduits, il s'établira un troisième champ autour du corps N'. L'expérience apprend que ce champ n'est que la superposition des deux autres. On le constate en observant le potentiel en un même point de ce champ, dans les trois cas. Ce potentiel, dans le troisième cas, est la somme des potentiels dans les deux premiers.

D'ailleurs les trois champs extérieurs sont identiquement les mêmes, quels que soient les voies et moyens employés pour introduire, dans la cavité du corps N', les conducteurs qui doivent les former. Ainsi, pour former le premier champ, on peut introduire successivement, et dans un ordre quelconque, chacun des conducteurs formant le premier groupe, ou bien, introduire l'un d'entre eux arbitrairement choisi, y ajouter dans un ordre quelconque, tous les autres conducteurs contenus dans la première cavité, et, enfin, ramener dans celle-ci, encore dans un ordre quelconque, tous les conducteurs qui ne font pas partie du premier groupe. Dès que la cavité du corps creux N' ne contiendra plus que les conducteurs formant ce premier groupe, et que tous les autres seront réunis dans la cavité creusée à la limite du champ extérieur, ce champ sera toujours exactement le même, pourvu que, pendant la durée des expériences, on puisse regarder comme négligeables les déperditions d'électricité provenant de ce que les diélectriques du système ne sont pas des isolants parfaits.

7. — PRINCIPE FONDAMENTAL

On est conduit par cet ensemble de faits à admettre que, quand les conducteurs composant les deux groupes que nous avons envisagés, ont quitté la cavité dans laquelle ils étaient primitivement réunis, pour occuper des positions quelconques dans tout le champ limité par la surface conductrice N, non seulement la somme de leurs charges reste constante, mais encore que la somme des charges afférentes à chaque groupe reste aussi constante, alors même que les corps formant un groupe subiraient entre eux des contacts. Comme on peut diviser, arbitrairement, l'ensemble des conducteurs en deux nouveaux groupes jouissant des mêmes propriétés, dont l'un comprendra, par exemple, un seul ou deux conducteurs, on en conclut que tout conducteur qui reste isolé conserve une charge constante, et que, si les charges individuelles de deux conducteurs qui prennent le contact varient, la somme de ces charges reste constante. Cette loi s'appliquerait à tous ces conducteurs quelles que soient leurs positions, soit dans les deux cavités considérées, soit dans le champ qui enveloppe le corps N'.

S'il en est ainsi, un certain nombre de conducteurs étant amenés dans la cavité du corps N', de façon à créer un champ extérieur à ce corps, si de nouveaux conducteurs sont extraits de la première cavité pratiquée dans la paroi conductrice N, et amenés dans ce champ extérieur, leurs charges individuelles, dont les valeurs sont fixées d'avance dans cette première cavité, ne subiront aucune influence du champ déjà créé dans le milieu qui va les recevoir. Par conséquent, quelle que soit la cause qui fasse varier un champ, les conducteurs isolés qu'il contient conserveront une charge constante ; c'est ce qui arrivera, notamment, si l'un des conducteurs vient à être mis en communication avec une source d'électricité étrangère au champ qui en modifiera la charge. La charge des autres conducteurs ne sera nullement affectée par cette opération.

On est donc amené à formuler la loi générale suivante :

Quelles que soient les modifications que peut subir un champ électrique, soit par les déplacements des conducteurs qu'il contient, soit par les communications établies entre certains de ces conducteurs et des sources d'électricité, la charge de tout conducteur isolé restera constante : si plusieurs conducteurs isolés sont mis en communication, la somme de leurs charges restera aussi constante.

8. — MESURE DE LA CHARGE ÉLECTRIQUE

C'est le *principe de conservation des charges des conducteurs isolés*, et qui est mis hors de doute par les expériences si connues exécutées à l'aide du *Cylindre de Faraday*. Ce cylindre est un instrument qui permet de comparer les charges électriques de divers corps, de réaliser des charges égales à celles d'un corps électrisé donné, de même signe ou de signe contraire, de mesurer, en un mot, une charge électrique quelconque, en prenant pour unité la charge bien définie que comporte un corps déterminé, placé dans des conditions électriques bien déterminées.

Il suffit, pour cela, de placer dans l'instrument le corps A dont on veut mesurer la charge, et de constater l'état du champ à l'extérieur : puis, ce corps étant enlevé, d'introduire pour le décharger contre la paroi interne de l'appareil, le petit corps *a* portant l'unité de charge, et de répéter autant de fois l'opération qu'il sera nécessaire pour constituer le champ primitivement établi ; si le nombre de ces opérations est égal à *n*, la charge à mesurer sera exprimée par le nombre *n*.

On peut procéder plus simplement, en observant que les *n* opérations successivement exécutées sur le corps *a*, ne font que superposer, à l'extérieur, des champs identiques, qui font varier, chaque fois, le potentiel d'une même quantité sur la surface extérieure de l'instrument. On peut donc juger, par une première opération, en mesurant la variation e de potentiel qu'elle provoque, du nombre n des opérations nécessaires pour porter le potentiel à la valeur E obtenue, du premier coup, par l'introduction du corps A dans l'instrument, valeur qui est nécessairement égale à ne : d'où l'on conclut que la charge à mesurer est le quotient $\frac{E}{e}$ des potentiels obtenus sur l'instrument, quand on y introduit successivement les deux corps A et a.

On voit par là que le rapport des charges de deux corps quelconques A et B est égal au rapport des potentiels créés sur un cylindre de Faraday ou conducteur creux de toute autre forme, quand on introduit successivement ces corps dans la cavité. La mesure des charges peut donc se ramener à la mesure de potentiels correspondants. On verra, dans la suite, comment se mesurent ces potentiels. Quant à l'unité de charge à choisir, nous y reviendrons aussi, et l'on verra qu'elle peut être définie comme il suit : C'est la charge positive qu'il faut communiquer à une petite sphère métallique pour que, placée à l'unité de distance d'une autre sphère semblable portant la même charge dans un champ d'air sec indéfini, la force de répulsion qui agit entre ces sphères soit égale à l'unité.

Quoique la notion que nous donnons ici de la charge électrique soit bien différente de celle généralement admise, on voit qu'elle se mesure exactement par les mêmes procédés ; il ne s'agit donc que d'une seule et même quantité, de quelque manière qu'on en conçoive l'essence.

CHAPITRE IV

Loi de Coulomb

1.—ACTION D'UN CHAMP UNIFORME SUR UNE PETITE SPHÈRE CONDUCTRICE

Si l'on vient à placer dans un champ uniforme, limité à deux plans parallèles AB et CD, une sphère conductrice, isolée et électrisée, de rayon suffisamment petit pour qu'on puisse la considérer comme réduite à un point mathématique, la force qui agira sur le centre de cette petite sphère sera, par raison de symétrie, normale aux plans AB et CD. Elle obéit à la loi suivante établie par l'expérience :

Cette force est indépendante de la position de la petite sphère dans le champ uniforme, et proportionnelle à sa charge. Elle est dirigée dans le sens de l'intensité du champ, ou en sens contraire, suivant que cette charge est positive ou négative.

Quand on déplace cette petite sphère, la force qui agit sur elle est constante et proportionnelle à sa charge, comme le poids d'un corps grave, dans le champ de la pesanteur, est constant et proportionnel à sa masse. Cette loi expérimentale et les deux principes exposés dans les Chapitres II et III suffisent à édifier toute la théorie de l'Électrostatique.

La force qui agit sur la petite sphère est indépendante de la nature du diélectrique ; cela résulte de la loi de conservation de la charge d'un conducteur isolé dans un champ stable, quand ce conducteur passe d'un diélectrique dans un autre. Si, en effet, on suppose, entre les deux plans AB et CD dont les potentiels sont invariables, deux diélectriques juxtaposés, et dont la surface de séparation serait, par exemple, un plan perpendiculaire aux plans AB et CD, les plans équipotentiels dans l'espace occupé par l'un des diélectriques se prolongeront dans l'espace occupé par l'autre diélectrique. Considérons deux de ces plans A'B' et C'D' : soient a', b' deux points du premier, situés de part et d'autre de la surface de séparation des diélectriques, et c', d' les projections respectives, dans le second plan, des points a' et b', en sorte que les points a', c' sont dans un diélectrique et les points b', d' dans l'autre. Si la petite sphère partant d'un point a' y revient après avoir suivi les côtés du rectangle $a'b'd'c'a'$, le travail effectué par la force électrique qui lui est appliquée sera nul, puisque le système est revenu à son état initial, sans entraîner aucun changement extérieur. Or, ce travail est évidemment nul sur les côtés $a'b'$ et $d'c'$ du rectangle, la force restant perpendiculaire au chemin parcouru ; sur les côtés $b'd'$ et $c'a'$ les travaux sont donc égaux et de signes contraires, ce qui exige que la force constante appliquée à la petite sphère le long des côtés $b'd'$ et $a'c'$ parcourus en sens inverse soit la même sur les deux côtés, c'est-à-dire dans les deux diélectriques, ce qui démontre la proposition.

2. — ACTION D'UN CHAMP STABLE QUELCONQUE SUR UNE PETITE SPHÈRE CONDUCTRICE

La loi expérimentale énoncée plus haut est applicable sans qu'il soit nécessaire de supposer les plans AB et CD indéfiniment prolongés, pourvu que la petite sphère soit placée entre ces plans dans la région où le champ n'ayant encore subi aucune déformation appréciable est sensiblement uniforme.

Il en résulte que, si cette sphère infiniment petite est placée dans un champ quelconque, la force qui agira sur elle ne dépendra que de l'état du champ au point M qu'elle occupera. Or, si on considère le plan tangent à la surface équipotentielle passant par le point M, et si on encadre ce point entre deux plans AB et CD infiniment voisins et parallèles à ce plan tangent, le champ, au voisinage du point M, et entre ces deux plans, pourra être considéré comme uniforme, son intensité constante F étant égale à l'intensité réelle, au point M, du champ considéré. La petite sphère électrisée introduite dans ce champ, a un rayon aussi petit que l'on voudra, et qu'on peut supposer infiniment petit par rapport à la distance qui sépare les deux plans AB et CD. Dans ces conditions la force qui agira réellement sur le centre M de cette sphère, sera la même que celle qui s'exercerait dans le champ uniforme qui vient d'être défini ; elle sera donc proportionnelle à la charge *m* de la sphère, et dirigée dans le sens de l'intensité F du champ, ou dans le sens contraire, suivant que la quantité *m* sera positive ou négative.

Pour étudier comment varie cette force, il suffira de considérer le cas où la charge de la petite sphère isolée est positive et égale à l'unité. La force *f* agissant alors sur elle aura même direction et même sens que l'intensité du champ. Cette force dérive d'un *potentiel uniforme*, ce mot étant pris ici dans le sens qu'on lui donne en mécanique, car son travail total est nul, quand la petite sphère isolée décrit un chemin fermé quelconque dans le champ, puisque tout le système revient à son état primitif. Ce potentiel est une fonction $\Phi(x, y, z)$ des coordonnées du point d'application de la force *f*, et si ce point d'application se trouve sur la surface

$$\Phi(x, y, z) = C \tag{1}$$

C étant une constante quelconque, on sait que la force f sera normale à cette surface ; mais cette force étant dirigée suivant l'intensité du champ, au point x, y, z, est aussi normale à la surface équipotentielle

$$f(x, y, z) = \mathrm{E} \tag{2}$$

qui passe par le point x, y, z, et dont le potentiel est E. Il en résulte que les surfaces représentées par les équations (1) et (2) se confondent, et que, pour une valeur de E, il existe une valeur de C, fonction de E, telle que les équations ci-dessus représentent la même surface, ce que l'on exprimera en posant

$$\Phi(x, y, z) - \varphi(\mathrm{E}) = \Upsilon(f(x, y, z) - \mathrm{E}),$$

Υ étant une constante. Cette identité doit être satisfaite pour toute valeur de x, y, z et E. Si on en prend la dérivée par rapport à E, il vient

$$\frac{d\varphi}{d\mathrm{E}} = \Upsilon$$

d'où

$$\varphi(\mathrm{E}) = \Upsilon\mathrm{E} + \Upsilon'.$$

Ce qui donne

$$\Phi(x, y, z) = \Upsilon f(x, y, z) + \Upsilon'.$$

Les projections de la force f suivant les trois axes de coordonnées sont donc

$$\left\{\begin{aligned} f_x &= -\frac{d\Phi}{dx} = -\Upsilon\frac{df}{dx} = \Upsilon\mathrm{X} \\ f_y &= -\frac{d\Phi}{dy} = -\Upsilon\frac{df}{dy} = \Upsilon\mathrm{Y} \\ f_z &= -\frac{d\Phi}{dz} = -\Upsilon\frac{df}{dz} = \Upsilon\mathrm{Z} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

X, Y, Z étant, suivant les notations déjà adoptées, les projections de l'intensité F du champ, en sorte que l'on a aussi

$$f = \Upsilon\mathrm{F}. \tag{4}$$

Υ est positif, puisque la force f est dirigée dans le même sens que l'intensité F du champ.

Ainsi donc, la force f qui agit sur le centre d'une petite sphère isolée, chargée d'une unité d'électricité positive, et que l'on introduit dans un champ électrique quelconque, est égale à l'intensité du champ au centre de cette petite sphère, multipliée par une constante absolue γ qui ne dépend que des unités choisies. La constante γ est la force qui agit sur une petite sphère chargée d'une masse électrique égale à l'unité, dans un champ uniforme dont l'intensité est égale à l'unité, quelle que soit d'ailleurs la nature du diélectrique.

Observons, en passant, que d'après la formule (4), une petite sphère électrisée et isolée, transportée dans un champ neutre, s'y trouvera partout en équilibre quelles que soient les limites de ce champ, dont l'intensité primitive F était nulle en tout point.

3. — FORMULE DE VASCHY

Nous arrivons maintenant à l'objet principal de ce chapitre qui est de montrer l'équivalence de l'action fictive des masses électriques à la cause réelle qui produit les forces électriques.

Cette équivalence ressort d'une formule remarquable que Vaschy a appliquée d'une façon fort ingénieuse à la théorie de l'Électricité (1). La démonstration de cette formule repose elle-même sur le lemme suivant, dont ce savant a fait un fréquent usage.

Lemme. Soit v un espace limité de toutes parts, dont on exclut des cavités quelconques également limitées de toutes parts : U, X, Y, Z étant des fonctions continues des coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'espace considéré, on a identiquement

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_v \left[\frac{d}{dx}(\mathrm{UX}) + \frac{d}{dy}(\mathrm{UY}) + \frac{d}{dz}(\mathrm{UZ}) \right] dv \\ & + \int_\Omega \mathrm{U}\,(l\mathrm{X} + m\mathrm{Y} + n\mathrm{Z})\, d\Omega = 0 \end{aligned} \right.$$

dv désignant un élément de volume infiniment petit de la région v et $d\Omega$ un élément infiniment petit d'une quelconque des surfaces qui limitent cette région. Les intégrations s'étendent respectivement au volume v et à la totalité des surfaces limitant ce volume. Enfin l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale en un point (x, y, z) des surfaces limites, cette normale étant dirigée vers la région de volume v.

---

(1) *Théorie de l'Électricité*, par Vaschy, 1896, pp. 41 et suiv.

Si les fonctions U, X, Y, Z varient brusquement à la traversée d'une surface non fermée comprise dans le volume v, la formule (5) s'applique encore, à la condition d'étendre la deuxième intégration aux deux faces de cette surface, ce qui revient à la considérer comme limitant une cavité de volume nul.

Appliquons d'abord cette identité en définissant la fonction arbitraire U par la formule

$$\mathrm{U} = \frac{d\frac{1}{r}}{dx},$$

r étant la distance d'un point variable (x, y, z) de la région v à un point fixe M (α, β, γ) que nous supposerons d'abord en dehors de la région v.

La formule (5) deviendra

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_v \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}+\frac{d\mathrm{Y}}{dy}+\frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right)dv + \int_v \left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\mathrm{X} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx\,dy}\mathrm{Y} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx\,dz}\mathrm{Z}\right]dv \\ &+ \int_\Omega \frac{d\frac{1}{r}}{dx}(l\mathrm{X}+m\mathrm{Y}+n\mathrm{Z})\,d\Omega = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans la formule (5) remplaçons X par — Y, Y par X, Z par zéro et faisons $\mathrm{U} = \frac{d\frac{1}{r}}{dy}$, il viendra

$$(7)\quad \int_v \frac{d\frac{1}{r}}{dy}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dy}-\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\right)dv + \int_v \left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\mathrm{X} - \frac{d^2\frac{1}{r}}{dx\,dy}\mathrm{Y}\right)dv$$

$$+ \int_\Omega \frac{d\frac{1}{r}}{dy}(m\mathrm{X}-l\mathrm{Y})d\Omega = 0.$$

Enfin, dans la même formule (5) remplaçons X par — Z, Y par zéro, Z par X, et faisons $U = \dfrac{d\frac{1}{r}}{dz}$, on aura

$$(8)\qquad \int_v \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)dv+\int_v\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}X-\frac{d^2\frac{1}{r}}{dxdz}\right)dv$$
$$+\int_\Omega \frac{d\frac{1}{r}}{dz}(nX-lZ)\,d\Omega=0.$$

Ajoutons, membre à membre, les équations (6), (7) et (8), en observant que l'on a identiquement

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}=0,$$

on trouve

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_v\left[\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)\right]dv\\&+\int_\Omega\left[\frac{d\frac{1}{r}}{dz}(lX+mY+nZ)+\frac{d\frac{1}{r}}{dz}(mX-lY)\right.\\&\qquad\left.-\frac{d\frac{1}{r}}{dz}(lZ-nX)\right]d\Omega=0.\end{aligned}\right.$$

Cette dernière identité n'est plus applicable, quand le point M est à l'intérieur du volume v, car $\frac{1}{r}$ devient infini quand x, y, z représentent les coordonnées de ce point : dans ce cas, nous supprimerons de ce volume celui qu'occuperait une petite sphère ayant son centre au point M, et dont nous ferons tendre le rayon vers zéro.

Soit v_1 le nouveau volume à considérer et Ω_1 la surface de la petite sphère, l'identité (9) pourra s'appliquer en limitant la première intégrale au volume v_1, et en étendant la seconde intégrale à la surface Ω_1. Calculons cette partie de la seconde intégrale, relative à la surface Ω_1. On a, en ordonnant par rapport à X, Y, Z

$$(10)\left\{\begin{aligned}&\int_{\Omega_1}\left[\frac{d\frac{1}{r}}{dx}(lX+mY+nZ)+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}(mX-lY)\right.\\&\qquad\left.-\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz}(lZ-nX)\right]d\Omega_1\\&=\int_{\Omega_1}\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}l+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}m+\frac{d\frac{1}{r}}{dz}n\right)X+\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}m-\frac{d\frac{1}{r}}{dy}l\right)Y\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}n-\frac{d\frac{1}{r}}{dz}l\right)Z\right]d\Omega_1.\end{aligned}\right.$$

Pour tout point x, y, z de la surface de la sphère, on a

$$l=\frac{x-\alpha}{r}\qquad m=\frac{y-\beta}{r}\qquad n=\frac{z-\gamma}{r}$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx}=\frac{\alpha-x}{r^3}\qquad\frac{d\frac{1}{r}}{dy}=\frac{\beta-y}{r^3}\qquad\frac{d\frac{1}{r}}{dz}=\frac{\gamma-z}{r^3}.$$

Les coefficients de Y et de Z au second membre de (10) sont donc nuls, le coefficient de X se réduit à $-\frac{1}{r^2}$, et l'identité (9) doit être remplacée par la suivante

$$(11)\left\{\begin{aligned}&\int_{v_1}\left[\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)\right]dv_1\\&+\int_{\Omega}\left[\frac{d\frac{1}{r}}{dx}(lX+mY+nZ)+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}(mX-lY)\right.\\&\qquad\left.-\frac{d\frac{1}{r}}{dz}(lZ-nX)\right]d\Omega\\&=\int_{\Omega_1}X\frac{d\Omega_1}{r^2}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on appelle $d\omega_1$ l'angle solide $\frac{d\Omega_1}{r^2}$ sous lequel l'élément $d\Omega_1$ est vu du centre M, et X_m la valeur moyenne de X sur la sphère, valeur qui a pour limite la valeur de la fonction X pour le point M, quand le rayon r tend vers zéro, on pourra poser

$$\int_{\Omega_1} X \frac{d\Omega_1}{r^2} = 4\pi X_m.$$

Dans l'identité (11) le volume v_1 devient le volume v limité par la surface Ω, et l'intégrale relative à v_1 tend vers une valeur bien déterminée. Si, pour simplifier les écritures, on pose avec Vaschy

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi\rho \tag{12}$$

$$\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} = 4\pi\mu_x \quad \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} = 4\pi\mu_y \quad \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 4\pi\mu_z \tag{13}$$

$$lX + mY + nZ = 4\pi\sigma \tag{14}$$

$$nY - mZ = 4\pi\tau_x \quad lZ - nX = 4\pi\tau_y \quad mX - lY = 4\pi\tau_z \tag{15}$$

l'identité (11) prend la forme

$$\left\{\begin{aligned} X_m = &\int_v \rho \frac{d\frac{1}{r}}{dx} dv + \int_v \left(\mu_z \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - \mu_y \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right) dv \\ &+ \int_\Omega \sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\Omega + \int_\Omega \left(\tau_z \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - \tau_y \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right) d\Omega. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Si le point M est en dehors du volume v, le second membre est nul d'après l'identité (9). Les valeurs Y_m et Z_m des fonctions Y et Z pour le point M se déduisent de la formule (16) par des permutations circulaires des lettres X, Y, Z, x, y, z.

Telle est la formule de Vaschy que nous appliquerons avec lui en supposant que X, Y, Z sont les composantes suivant les trois axes de l'intensité F d'un champ.

4. — INTENSITÉ DU CHAMP D'APRÈS LA LOI D'ACTION A DISTANCE DES MASSES ÉLECTRIQUES

Imaginons d'abord que la limite enveloppante du volume v soit celle d'un champ créé dans un diélectrique homogène par des conducteurs électrisés qui occuperaient les cavités que nous avons supposées.

Dans toute l'étendue de ce champ on aura, d'après les formules établies au Chapitre II,

$$\rho = 0 \qquad \mu_x = \mu_y = \mu_z = 0 \qquad \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$
$$\mathrm{I} = c\mathrm{F} = 4\pi c\sigma$$

et la formule (16) se réduit à

$$\mathrm{X}_m = \frac{1}{4\pi c}\int_\Omega \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\,\mathrm{I}d\Omega$$

I étant la densité superficielle des masses électriques sur les conducteurs et aux limites du champ.

L'interprétation géométrique de cette formule montre que la force électrique $\gamma m\mathrm{F}_m$ qui, d'après (4), agit sur le centre M (α, β, γ) d'une sphère infiniment petite et isolée, chargée d'une masse m d'électricité, peut être considérée comme résultant de l'action fictive de masses distribuées à la superficie des conducteurs que comprend le champ tout entier, ces masses agissant, suivant la loi de Newton, sur la masse électrique m que porte la petite sphère.

Il suffit évidemment de considérer le cas où la masse m est égale à l'unité, et de montrer que la force $f = \gamma\mathrm{F}_m$ est la résultante φ des actions que nous venons de définir. Il suffit aussi de comparer les projections de ces deux forces sur un axe quelconque, l'axe des x par exemple, et d'établir l'égalité de ces deux projections, $f_x = \varphi_x$.

Or, nous avons déjà

$$f_x = \gamma\mathrm{X}_m = \frac{\gamma}{4\pi c}\int_\Omega \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\,\mathrm{I}d\Omega. \tag{17}$$

Calculons maintenant φ_x. Soit $d\mu$ la masse d'électricité répartie sur un élément $d\Omega$ d'un des conducteurs compris dans le système : On peut la supposer concentrée en un point P (x, y, z) de cet élément ; r étant la distance du point P au point M (α, β, γ), l'action élémentaire $\Delta\varphi$ exercée par la masse $d\mu$ sur le point M, et dirigée de P vers M ou inversement, suivant le signe positif ou négatif de $d\mu$, aura pour expression

$$\Delta\varphi = \lambda \frac{d\mu}{r^2}$$

λ représentant l'action de l'unité de masse électrique sur l'unité de masse de même signe à l'unité de distance. La projection $\Delta\varphi_x$ de cette force sur l'axe des x sera

$$\Delta\varphi_x = -\lambda d\mu \frac{x-\alpha}{r^3} = \lambda d\mu \frac{d\frac{1}{r}}{dx}.$$

Or la masse $d\mu = I d\Omega$, et par suite

$$\Delta\varphi_x = \lambda \frac{d\frac{1}{r}}{dx} I d\Omega.$$

La projection sur l'axe des x de la résultante φ s'obtient en intégrant l'expression ci-dessus, l'intégration étant étendue à tous les éléments de superficie des conducteurs en contact avec le diélectrique, y compris le conducteur qui enveloppe et limite le champ ; c'est ce qu'exprime la formule

$$\varphi_x = \lambda \int_\Omega \frac{d\frac{1}{r}}{dx} I d\Omega. \tag{18}$$

Pour que les valeurs de f_x et de φ_x données par les formules (17) et (18) soient égales, il suffit de fixer la valeur de la constante λ en posant

$$\gamma = 4\pi e\lambda. \tag{19}$$

Ainsi se trouve démontrée la proposition suivante :

Dans un champ homogène, l'action exercée sur une sphère conductrice infiniment petite, chargée d'une masse m d'électricité, est *la même que si les masses électriques distribuées à la superficie de tous les conducteurs agissaient, à distance, sur la masse électrique m, suivant la loi de Newton.*

5. — LOI DE COULOMB

Nous appellerons champ indéfini, celui dont les limites sont assez éloignées de tous les conducteurs qui le créent, pour que ceux-ci puissent être considérés comme à une distance infinie de ces limites.

Si l'on place un conducteur électrisé et isolé dans un champ indéfini, mais primitivement nul et de potentiel zéro, il est évident, par raison de symétrie, que ce conducteur sera, quelle que soit sa position, dans un état d'équilibre indifférent.

Si ce conducteur a une forme sphérique, les surfaces équipotentielles deviendront des sphères concentriques et celle de potentiel zéro sera le plan de l'infini. Le même flux traversant toutes ces sphères avec une densité uniforme I sur chacune d'elles, on aura pour celle de rayon r

$$M = 4\pi r^2 I = -4\pi r^2 c \frac{dE}{dr}$$

M étant la charge électrique de la sphère conductrice considérée. On tire de cette relation

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{M}{4\pi c}\frac{1}{r^2}$$

d'où, en intégrant, et en observant que la constante d'intégration est nulle, puisque le potentiel est zéro à l'infini,

$$(20) \qquad E = \frac{1}{4\pi c}\frac{M}{r} = \frac{\lambda}{\gamma}\frac{M}{r}.$$

Supposons maintenant que cette sphère, dont le centre serait au point M_1, ait une charge m_1, et que son rayon devienne infiniment petit : introduisons dans le champ une autre petite sphère, portant une charge m_2, et dont le centre serait en M_2 à une distance r de M_1. L'action f exercée sur la seconde sphère sera dirigée suivant l'intensité du champ primitif au point M_2, c'est-à-dire, suivant la droite M_1M_2. Sa valeur sera la résultante de l'action sur la masse m_2, suivant la loi de Newton, des masses distribuées à la superficie des conducteurs dans le champ primitif. Ces masses comprennent d'abord les masses transportées à l'infini aux limites du champ, formant une somme finie — m_1, et dont l'action sur la masse m_2 est négligeable : il ne reste plus que la masse m_1, chargeant la première sphère, dont l'action sur m_2 déterminera la force agissant sur la deuxième petite sphère. Cette action aura donc pour expression

$$f = \lambda \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{\Upsilon}{4\pi c} \frac{m_1 . m_2}{r^2}. \tag{21}$$

Par raison de symétrie, et d'ailleurs d'après le principe d'égalité de l'action et de la réaction, la force exercée sur la première petite sphère sera égale et de signe contraire. C'est la loi de Coulomb.

6. — L'UNITÉ DE QUANTITÉ D'ÉLECTRICITÉ ET L'UNITÉ DE CHARGE DANS LE SYSTÈME ÉLECTROSTATIQUE

La constante $\lambda = \frac{\Upsilon}{4\pi c}$ dépend des unités de mesure choisies, ainsi que de la nature du diélectrique. L'unité de force et l'unité de longueur étant préalablement fixées, on peut choisir l'unité de quantité d'électricité de façon que λ se réduise à l'unité pour un diélectrique donné, l'air pur, par exemple, dans les conditions normales de température et de pression.

Plaçons, pour cela, dans un champ indéfini composé d'air pur, et à l'unité de distance l'une de l'autre, deux sphères identiques très petites, et portant, chacune, la même charge électrique que nous supposerons positive ; déterminons par tâtonnements cette charge commune de façon que l'action réciproque et répulsive des deux petites sphères soit égale à l'unité de force. Le flux d'électricité émis, pendant l'unité de temps, par chacune de ces petites sphères, dans ces conditions qui sont parfaitement déterminées, sera l'unité de quantité d'électricité : ce sera, en même temps, l'unité de masse ou de charge électrique dans le système électrostatique. L'application de la formule (21) montre que λ, c'est-à-dire $\frac{\Upsilon}{4\pi c}$, sera alors égal à l'unité ; et la force f, quand le diélectrique est de l'air pur, sera donnée par la formule

$$f = \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Si le diélectrique vient à changer, λ n'est plus égal à l'unité : mais on a toujours la relation (19)

$$\gamma = 4\pi c\lambda.$$

La même relation appliquée à l'air pour lequel $\lambda = 1$, devient, en désignant par c_0 la conductibilité de l'air,

$$\gamma = 4\pi c_0. \tag{22}$$

On tire de ces deux égalités

$$\lambda = \frac{c_0}{c} = \frac{1}{k}$$

k étant le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique considéré : en sorte que la formule (21) prend la forme générale

$$f = \frac{1}{k} \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{23}$$

7. — L'UNITÉ DE POTENTIEL

La constante γ représente une force, et sa valeur dépend des unités choisies (2). Les unités de longueur de force et de charge ou de quantité d'électricité étant fixées, γ sera égal à l'unité, si l'unité de potentiel est convenablement choisie. Faisons varier l'intensité d'un champ uniforme, formé d'ailleurs d'un diélectrique quelconque, de façon que la force agissant sur une sphère infiniment petite, chargée d'une unité de masse électrique, arrive à être égale à l'unité, et prenons une unité de potentiel telle que l'intensité du champ ainsi défini soit représentée par 1. D'après la formule (4), nous aurons $\gamma = 1$. L'unité de potentiel est alors fixée pour la condition que, dans ce champ uniforme, les plans équipotentiels espacés d'unité en unité de longueur ont des potentiels variant d'unité en unité. C'est ce que nous admettrons désormais en faisant toujours $\gamma = 1$.

Dans ces conditions, la force agissant sur une sphère infiniment petite et chargée d'une unité d'électricité positive, qu'on introduirait en un point quelconque d'un champ, est égale, en grandeur, direction et sens, à l'intensité F du champ en ce point, quelle que soit la nature du diélectrique.

8. — FORMULE DE COULOMB

γ étant égal à l'unité et λ à $\frac{1}{k}$, la formule (20) devient

(24) $$E = \frac{1}{k}\frac{M}{r}.$$

La formule (22) donne

(25) $$c_0 = \frac{1}{4\pi}.$$

Le coefficient de conductibilité de l'air pur, avec les unités choisies, est égal à $\frac{1}{4\pi}$.

La densité électrique I en un point de la surface d'un conducteur, dans un champ de pouvoir inducteur k, est donnée par la relation

$$I = c\,F = c_0 \frac{c}{c_0}\,F = \frac{kF}{4\pi}$$

d'où

(26) $$kF = 4\pi I.$$

C'est la formule de Coulomb.

9. — CHAMP CRÉÉ PAR DES POINTS ÉLECTRISÉS

On ne déforme pas un champ, quand on y introduit une sphère conductrice infiniment petite ayant le potentiel du point où on le place. Cette sphère isolée s'y trouvera en équilibre, ce qui montre que sa charge devra être nulle. Si on la déplace, elle prendra le potentiel du point qu'elle occupera. D'après cela, si, dans un champ limité primitivement nul, on introduit, en des points M_1, M_2..., des sphères infiniment petites, portant des charges respectives m_1, m_2..., ces sphères créeront un champ qui sera la superposition des champs partiels créés séparément par chacune d'elles,

les autres restant déchargées, et le potentiel E, en un point P quelconque du champ, sera la somme des potentiels E_1, E_2..., obtenus, au même point, dans les champs partiels. Si le champ est indéfini, on aura, d'après la formule (24)

$$E_1 = \frac{1}{k}\frac{m_1}{r_1}\ldots, \qquad E_2 = \frac{1}{k}\frac{m_2}{r_2}\ldots,$$

r_1, r_2..., étant les distances des points M_1, M_2..., au point P, d'où l'on tire la formule bien connue

$$E = E_1 + E_2 + \ldots = \frac{1}{k}\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots\right)$$

applicable à un champ indéfini.

CHAPITRE V

Propriétés du champ homogène

1. — THÉORÈME DE GAUSS

Étant donnée dans un champ homogène une surface fermée Ω qui enveloppe différents conducteurs électrisés M_1, M_2..., appliquons l'identité (5) du Chapitre précédent au volume v occupé par le diélectrique en faisant $U = 1$; X, Y, Z représentant les composantes de l'intensité du champ en un point quelconque x, y, z du volume v, l'intégrale de volume est nulle, d'après l'équation de Laplace, et il reste

$$(1) \qquad \int_{\Omega+\Omega_1+\Omega_2} (lX + mY + nZ)d\Omega = 0$$

Ω_1, Ω_2..., représentant les surfaces des conducteurs. Pour un point quelconque de ces surfaces, $lX + mY + nZ$ est l'intensité F du champ égale à $\frac{4\pi 1}{k}$. On a donc

$$\int_{\Omega_1+\Omega_2\ldots} (lX + mY + nZ)\, d\Omega = \frac{4\pi}{k}\int 1 d\Omega = \frac{4\pi m}{k}$$

m étant la masse d'électricité répandue à la surface de tous les conducteurs.

Pour un point de la surface Ω, $lX + mY + nZ$ est la composante normale de l'intensité F, comptée positivement ou négativement suivant que cette composante est dirigée vers l'intérieur ou vers l'extérieur du volume v. Si l'on appelle F_n cette composante changée de signe, on aura

$$\int F_n d\Omega = \frac{4\pi m}{k}. \tag{2}$$

C'est la formule de Gauss. Elle résulte d'ailleurs immédiatement de ce que le flux d'électricité sortant pendant l'unité de temps de la surface Ω, par les tubes d'induction qui y aboutissent, est évidemment égal à la somme m du flux émis, pendant le même temps, par les conducteurs M_1, M_2... Elle conduit à une généralisation de la notion de masse électrique, que nous n'avons appliquée jusqu'ici qu'à la superficie des conducteurs. On peut considérer toute surface imaginaire tracée dans le champ comme portant sur chacune de ses faces des masses électriques égales et de signes contraires. Pour chaque élément de cette surface, la masse électrique est la quantité d'électricité qui traverse cet élément pendant l'unité de temps. La densité I de cette masse est donc donnée par la formule

$$I = cF_n = \frac{k}{4\pi} F_n = k\sigma. \tag{3}$$

Elle sera positive ou négative, suivant que F_n sera du côté de la surface qu'on considère ou du côté opposé.

2. — LOI DE FARADAY SUR LA CONSERVATION DES MASSES DANS UN CHAMP HOMOGÈNE

La loi de Faraday sur la conservation des masses subit la même généralisation, exprimée par la formule (1) ; et cette loi peut s'énoncer comme il suit :

La somme des masses électriques contenues à l'intérieur d'une surface fermée, est nulle dans un champ homogène.

Toutes les masses qu'on peut imaginer dans le diélectrique se détruisent deux à deux, sauf celles répandues à la surface des conducteurs, et sur la face interne de la surface limite.

Il résulte évidemment de ce qui précède que la loi de Faraday s'applique à toute partie d'un champ homogène comprise entre deux surfaces fermées.

3. — LES MASSES SCALAIRES ET LES MASSES VECTORIELLES

On a démontré au Chapitre précédent que l'intensité d'un champ homogène en un point quelconque, c'est-à-dire, la force qui agit sur l'unité d'électricité positive placée en ce point est représentée par l'action fictive, à distance, sur ce point, et d'après la loi de Newton, de toutes les masses superficielles existant dans le champ complet. On rencontrera, dans la suite, des cas moins simples, notamment quand le diélectrique du champ sera hétérogène, et alors la loi de Newton, appliquée aux mêmes masses superficielles, ne suffit pas à exprimer l'intensité ou la force électrique en un point quelconque du champ : il faudra faire intervenir des masses cubiques dont la définition sera donnée en temps opportun, et ces masses superficielles ou cubiques ne suffiront pas encore. On est conduit à joindre à ces masses *scalaires* des masses *vectorielles* si ingénieusement introduites par Vaschy dans la théorie de l'électricité, ces dernières masses étant supposées agir, à distance, sur les premières, d'après la loi donnée par Laplace en électromagnétisme (action d'un élément de courant sur un pôle d'aimant).

Une masse vectorielle a, à la fois, une grandeur et une direction. Elle est représentée par un vecteur $\bar{J}$ ayant son origine au point P (x, y, z) où cette masse est supposée exister : elle exerce sur le point M (α, β, γ), chargé d'une masse scalaire m d'électricité, une force φ définie, d'après la loi de Laplace, comme il suit : la force φ est perpendiculaire au plan de la droite PM et du vecteur J ; elle est dirigée, d'après la règle d'Ampère, de la droite vers la gauche pour un observateur couché le long de la droite PM les pieds en M et la tête vers le point P, regardant le vecteur J. Enfin la grandeur de cette force a pour expression

$$\varphi = \lambda \frac{mJ \sin \omega}{r^2} \tag{4}$$

r étant la distance PM, ω l'angle de la droite PM et du vecteur $\bar{J}$, et λ l'action de l'unité de masse vectorielle sur l'unité positive de masse scalaire à l'unité de distance, quand la masse vectorielle est perpendiculaire à la droite PM.

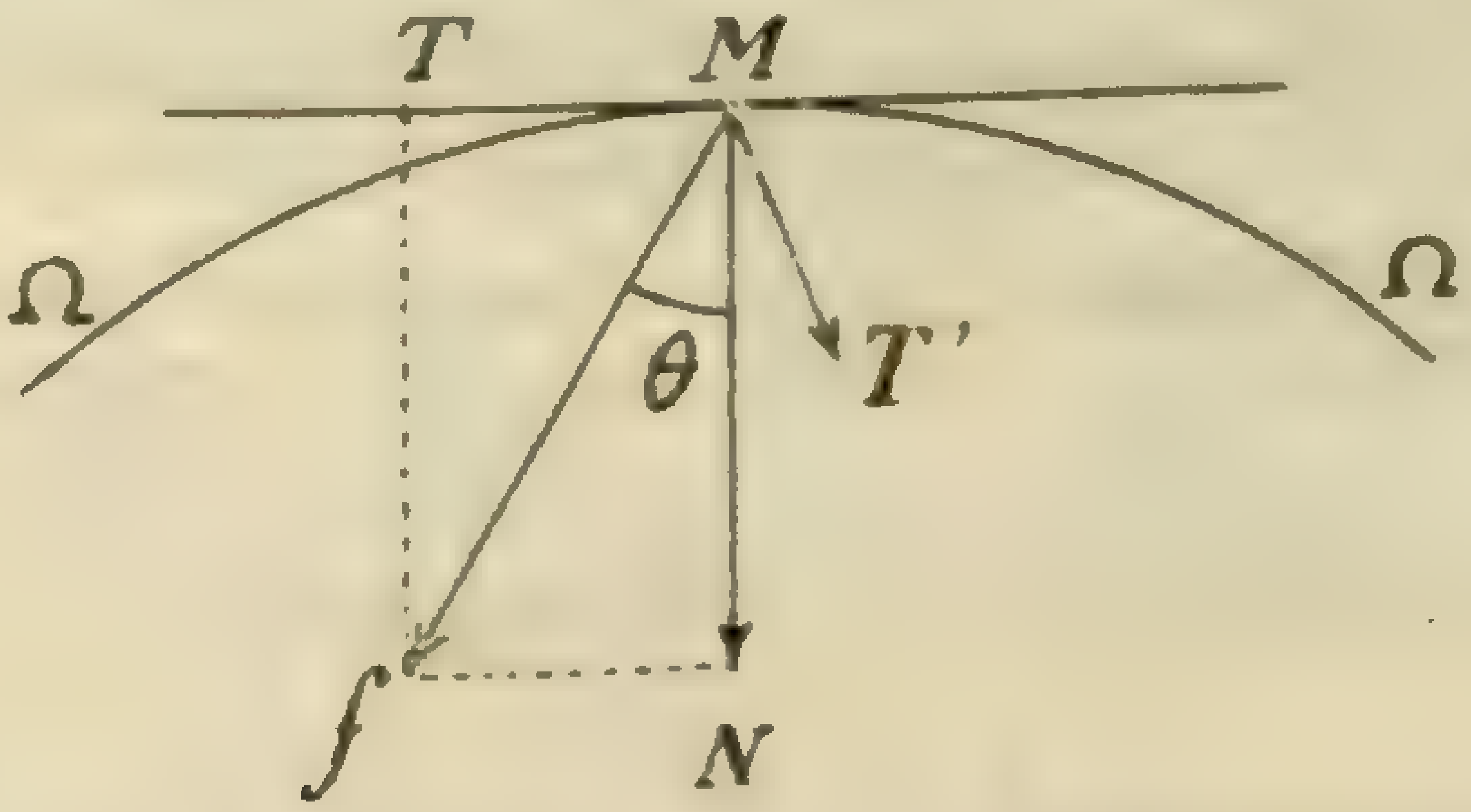
Cette formule donne pour la projection φ_x de la force φ sur l'axe des x, en appelant J_x, J_y, J_z les composantes du vecteur $\bar{J}$ suivant les trois axes de coordonnées

$$(5) \qquad \varphi_x = \lambda m \frac{(\beta - y)\,J_z - (\gamma - z)\,J_y}{r^3} = \lambda m \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy} J_z - \frac{d\frac{1}{r}}{dz} J_y \right)$$

4. — MASSES VECTORIELLES DE SUPERFICIE

En principe, les masses vectorielles, en électricité, comme les masses scalaires, peuvent être répandues sur des surfaces ou dans des volumes ; ne nous occupons que des masses superficielles dont la notion va bientôt s'imposer, et indiquons de suite la signification qu'on est conduit à en donner.

Considérons un flux d'électricité traversant une surface Ω. Soit MN la normale en M dirigée vers une région déterminée A, et Mf l'intensité F du champ qui fait avec MN un angle θ. D'après la formule (3) la densité I de masse scalaire, du côté de la surface Ω qui contient la normale MN, est égale à la projection $F_n = F\cos\theta$ de l'intensité F sur le vecteur MN, multipliée par la conductibilité $\frac{k}{4\pi}$. Si l'on multiplie aussi par $\frac{k}{4\pi}$ la projection $F_t = F\sin\theta$ de F sur le plan tangent à la surface Ω, on aura, en valeur, la densité J de la masse vectorielle en M. Pour avoir sa direction, on fera tourner de 90° ce vecteur dans le plan tangent, et dans un sens



tel qu'il vienne, suivant la règle d'Ampère, se placer vers la gauche d'un observateur couché le long du vecteur F la tête en M et qui regarderait le vecteur $\overline{\mathrm{MN}}$. On voit, d'après cela, qu'il existe en M sur un élément superficiel deux masses vectorielles $\mathrm{J}d\Omega = \frac{k}{4\pi}\,\mathrm{F}\sin\theta d\Omega$, égales et de signes contraires, comme pour les masses scalaires, suivant la face de Ω que l'on considère. Les masses vectorielles s'évanouissent, d'ailleurs, quand l'intensité du champ devient normale à la surface Ω.

On trouve facilement les projections J_x, J_y, J_z du vecteur F suivant les trois axes de coordonnées en remarquant que les cosinus directeurs du vecteur J, que nous désignerons par $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, obéissent aux deux relations

$$\cos a\cdot l + \cos b\cdot m + \cos c\cdot n = 0$$
$$\cos a\cdot \mathrm{X} + \cos b\cdot \mathrm{Y} + \cos c\cdot \mathrm{Z} = 0$$

d'où l'on tire

$$\frac{\cos a}{n\mathrm{Y} - m\mathrm{Z}} = \frac{\cos b}{l\mathrm{Z} - n\mathrm{X}} = \frac{\cos c}{m\mathrm{X} - l\mathrm{Y}}$$

et comme la somme des carrés des dénominateurs est égale à $\mathrm{F}^2 \sin^2\theta$, il vient avec les notations (15) du Chap. IV, et en prenant pour les trois cosinus le signe qui convient pour observer la règle d'Ampère,

$$\cos a = \frac{4\pi\tau_x}{\mathrm{F}_t} \qquad \cos b = \frac{4\pi\tau_y}{\mathrm{F}_t} \qquad \cos c = \frac{4\pi\tau_z}{\mathrm{F}_t}$$

On tire de la première de ces trois relations

$$4\pi\tau_x = \cos a\ \mathrm{F}_t = \frac{4\pi}{k}\cos a\ \frac{k}{4\pi}\mathrm{F}_t = \frac{4\pi}{k}\mathrm{J}_x .$$

On en conclut que les trois projections J_x, J_y, J_z sont données par les formules

$$(6) \qquad \mathrm{J}_x = k\tau_x \qquad \mathrm{J}_y = k\tau_y \qquad \mathrm{J}_z = k\tau_z .$$

5. — LA LOI DE FARADAY ÉTENDUE AUX MASSES VECTORIELLES

Revenons au cas examiné au début de ce Chapitre où une surface fermée Ω enveloppe une partie quelconque d'un champ homogène. En général, sur toute la face interne de Ω, sont répandues des masses vectorielles : appliquons au volume v du diélectrique contenu à l'intérieur de cette surface, l'identité (5) du Chap. IV en faisant $U = 1$, $X = 0$, $Y = -Z$, $Z = Y$; il vient

$$\int_v \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) dv + \int_{\Omega+\Omega_1+\dots} (nY - mZ) d\Omega = 0. \tag{7}$$

Chaque élément de la première intégrale est identiquement nul. Chaque élément de la seconde est nul sur les surfaces $\Omega_1, \Omega_2 \dots$, et il reste

$$\int_\Omega (nY - mZ)\, d\Omega = \frac{4\pi}{k}\int_\Omega J_x d\Omega = 0.$$

La projection sur un axe quelconque de la somme des masses vectorielles répandues sur la face interne de Ω est nulle, et, par suite, cette somme elle-même est nulle. Comme toutes les masses vectorielles de surface qu'on peut imaginer dans l'intérieur du volume v se détruisent deux à deux, on peut énoncer la proposition suivante :

La somme des masses vectorielles de surface contenues à l'intérieur d'une surface fermée est nulle dans un champ homogène.

Les masses vectorielles comme les masses scalaires de surface obéissent à la loi de Faraday. Ces masses n'existent d'ailleurs réellement, sans neutralisation possible par une masse égale et de signe contraire située au même point, qu'à la surface limite enveloppant la partie considérée du champ, et à la condition que cette surface ne soit pas équipotentielle.

Il résulte aussi de ce qui précède que la loi de Faraday étendue aux masses vectorielles s'applique à toute partie d'un champ homogène comprise entre deux surfaces fermées.

6. — ACTION FICTIVE DES MASSES VECTORIELLES SUIVANT LA LOI DE LAPLACE

Appliquons encore au volume v la formule (16) du Chapitre précédent. En observant que dans tout l'intérieur de ce volume

$$\rho = 0 \qquad \mu_y = \mu_z = 0$$

et que pour tout point des surfaces Ω_1, Ω_2..., des conducteurs

$$\tau_y = \tau_z = 0$$

il reste

$$X_m = \int_{\Omega+\Omega_1+\dots} \sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\tau_z \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - \tau_y \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\Omega = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(8)\quad X_m = \frac{1}{k} \int_{\Omega+\Omega_1+\dots} I \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\Omega + \frac{1}{k} \int_{\Omega} \left(J_z \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - J_y \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\Omega = 0.$$

La première intégrale représente la composante suivant l'axe des x de l'action, d'après la loi de Newton, exercée sur le point M chargé d'une unité d'électricité, par toutes les masses scalaires comprises dans le volume v. La seconde intégrale représente, comme le montre la formule (5), la composante de l'action, d'après la loi de Laplace, exercée sur le même point par toutes les masses vectorielles comprises dans ce volume. Le coefficient λ de l'action d'après la loi de Laplace est, comme pour l'action d'après la loi de Newton, égal à l'inverse $\frac{1}{k}$ du pouvoir inducteur spécifique du diélectrique. On tire de là la proposition suivante :

Dans toute partie d'un champ homogène limitée par une surface fermée quelconque, la force agissant sur une sphère infiniment petite chargée d'une masse m d'électricité est égale à l'action fictive, d'après les lois de Newton et de Laplace, exercée, à distance, sur cette masse par toutes les masses scalaires et vectorielles contenues dans cette partie du champ.

Ces masses se réduisent aux masses scalaires répandues à la superficie des conducteurs compris dans la partie considérée du champ, et aux masses scalaires et vectorielles distribuées sur la surface limitant cette partie. Les masses vectorielles disparaissent si cette surface limite est équipotentielle. Si la masse m est égale à l'unité, l'action de toutes les masses sur le point M représentera l'intensité du champ en ce point.

Quand le point M est extérieur à la partie considérée du champ, le premier membre de (8) est nul. Si l'on remarque que les masses tant scalaires que vectorielles répandues sur la face interne de la surface limitant cette partie, sont, en chaque point, égales et de signes contraires aux masses distribuées sur la face opposée, on est conduit à interpréter ainsi qu'il suit l'équation (8) :

Dans un champ homogène, l'action que les masses scalaires distribuées à la surface des conducteurs exercent à l'extérieur d'une surface fermée qui les contient est équivalente à l'action des masses scalaires et vectorielles répandues à l'extérieur de cette surface.

On sait d'ailleurs, d'après la loi de Faraday, que sur cette surface, la somme des masses vectorielles est nulle, et que la somme des masses scalaires est égale à celle répandue sur les conducteurs qu'elle renferme.

En appliquant la formule (8) à toute la partie restante du champ complet, située à l'extérieur de la surface fermée, et en supposant le point M à l'intérieur de cette surface, on complète comme il suit la proposition qui précède :

Dans un champ homogène, l'action que les masses scalaires distribuées à la surface des conducteurs exercent à l'intérieur d'une surface fermée dont ces conducteurs sont exclus, est équivalente à l'action des masses scalaires et vectorielles répandues à l'intérieur de cette surface.

On donne ordinairement à ce théorème une autre forme sans faire intervenir les masses vectorielles qui peuvent, en effet, être remplacées, sur la même surface, par des masses scalaires dont la somme est pareillement nulle (¹). Mais ces masses scalaires présentent l'inconvénient de n'avoir aucune signification physique dans le champ réellement considéré.

7. — LA FORCE ÉLECTRIQUE OU LA PRESSION ÉLECTROSTATIQUE

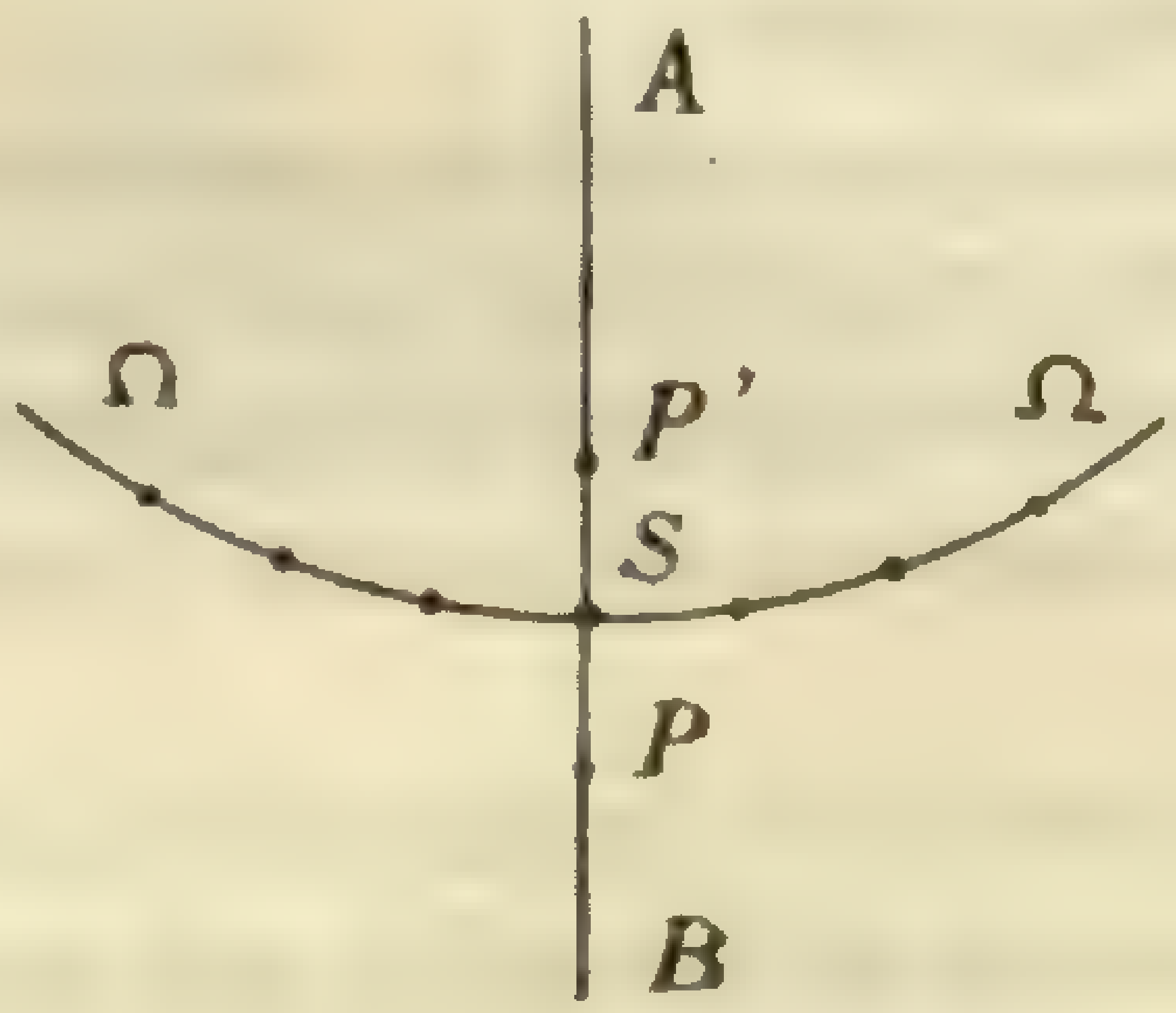
Divisons en éléments infiniment petits $d\Omega$, la superficie des conducteurs compris dans un champ homogène sans omettre celui qui enveloppe et limite le champ. Substituons à ces conducteurs

---

(¹) Voir, par exemple, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme* de Mascart, 1896, p. 59.

des sphères infiniment petites occupant les emplacements de ces éléments, et portant les charges qu'ils avaient sur les conducteurs. Les positions relatives de toutes ces petites sphères isolées étant ainsi fixées, supposons qu'elles soient plongées dans un champ indéfini composé avec le même diélectrique ; elles créeront un nouveau champ qui aura en tout point même intensité que le premier ; car cette intensité est la résultante des actions exercées suivant la loi de Newton par les masses électriques du champ sur l'unité de masse au point considéré ; or ces masses ont mêmes grandeurs et mêmes positions que dans le champ primitif, elles déterminent donc, en ce point, la même intensité ; en outre, les deux champs auront même potentiel en tout point, si le potentiel uniforme du champ indéfini dans lequel ont été plongées les petites sphères est le potentiel des limites du champ primitif.

Soit S le centre d'une des petites sphères réparties, dans le deuxième champ, sur la surface Ω qu'occupait précédemment un



conducteur M. Sur la normale AB à la surface Ω prenons un point P infiniment voisin de S et situé du côté extérieur au conducteur M. L'intensité F des deux champs en ce point est sensiblement la même ; elle est, dans le deuxième champ, la résultante de l'action exercée sur l'unité de masse concentrée en P, d'une part, par tous les points électrisés du champ sauf S, d'autre part, par le point S lui-même. $\overline{F_1}$ et $\overline{F_2}$ étant ces deux composantes, on a

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}.$$

Considérons maintenant l'action exercée sur le point P', pris sur la même normale, à la même distance du point S, mais du côté opposé ; cette action est nulle, car le champ est nul à l'intérieur de la surface Ω. Elle est encore la résultante des actions décomposées comme il vient d'être dit. La force $\overline{F_1}$ n'a pas sensiblement changé : la force F_2 a simplement changé de signe ; on aura donc

$$\overline{F_1} - \overline{F_2} = 0$$

d'où l'on tire

$$\overline{F_1} = \overline{F_2} = \frac{\overline{F}}{2}.$$

L'action $\frac{\overline{F}}{2}$ exercée sur l'unité de masse fixée au point P ou au point P', par toutes les masses électriques, celle fixée au point S étant exceptée, est évidemment, par raison de continuité, la même que celle qui s'exercerait sur l'unité de masse fixée au point intermédiaire S lui-même ; et sur une masse $1 d\Omega$ fixée en ce point, cette action sera $1 \frac{F}{2} d\Omega = \frac{kF^2}{8\pi} d\Omega$.

Supposons que tous les points S relatifs à un même conducteur M soient rendus solidaires, l'action exercée par le champ sur ce système aura le même effet que si chacun des points S était soumis à une force normale $\frac{kF^2}{8\pi} d\Omega$. Cette force peut être considérée comme une pression uniformément distribuée sur les éléments $d\Omega$ qui se raccordent pour former la superficie du conducteur M. Ce système peut, à la limite, quand les points S se rapprochent indéfiniment, être remplacé par le conducteur correspondant M qui se trouvera dans ses conditions primitives. L'action que subit le conducteur dans le champ qui le contient réellement est donc la même que s'il était soumis sur toute sa superficie à une pression normale p agissant de dedans en dehors et égale à $\frac{kF^2}{8\pi}$ par unité de surface, F étant l'intensité du champ au point considéré de la superficie du conducteur. p est ce que l'on appelle la *force électrique par unité de surface* ou la *pression électrostatique*, et elle est exprimée par la formule

(9) $$p = \frac{kF^2}{8\pi}.$$

8. — EXPÉRIENCE DE VAN MARUM

La pression électrostatique est purement fictive comme l'action à distance s'exerçant entre les masses électriques suivant la loi de Coulomb. Elle doit être comprise dans ce sens que l'action exercée sur le conducteur dans le champ qui le contient est la même, au point de vue des déplacements qu'il peut subir, que si, sur toute la superficie de ce conducteur considéré comme un solide invariable, était appliquée une traction normale égale à la pression électrostatique.

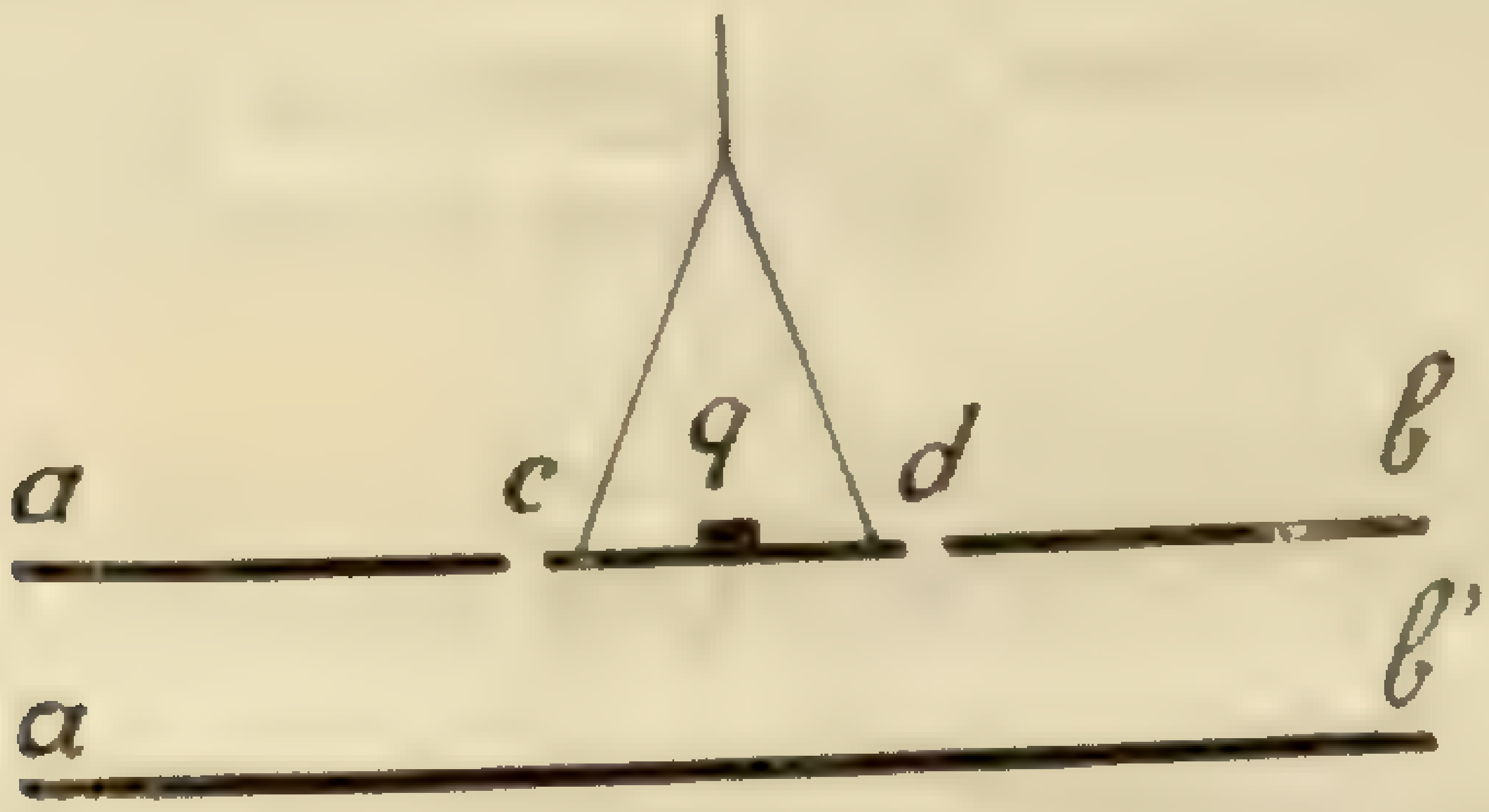
Si ce conducteur est creux, d'une épaisseur infiniment mince, et formé d'une substance extensible à volonté, il faudra, pour l'empêcher de se dilater, opposer à la pression électrostatique une pression mécanique exercée normalement sur sa surface extérieure. D'après cela, une bulle de savon isolée doit augmenter de volume quand on l'électrise, jusqu'à ce que l'excès de la pression extérieure sur la pression intérieure contrebalance la pression électrostatique. C'est ainsi que la force ascensionnelle d'un ballon rempli d'hydrogène augmente par suite de son électrisation, ainsi qu'il résulte d'une expérience de Van Marum. L'augmentation de volume du ballon doit, il est vrai, être corrigée, en plus ou en moins, de la dilatation ou de la contraction due à la variation de potentiel du gaz suivant que l'électrisation est positive ou négative. Pour se rendre compte de l'importance de cette correction, il serait intéressant de constater si la force ascensionnelle est sensiblement plus grande, quand le ballon est électrisé positivement, que quand il est électrisé négativement, ainsi que la théorie semble le prévoir.

Mais si la dilatation électrique du verre, soupçonnée par Volta, a été confirmée par les observations de Govi, de M^r Duter et de M^r Righi, aucune expérience n'a, jusqu'ici, mis en évidence la dilatation des gaz parfaits, qui sont aussi les meilleurs isolants de l'électricité. En particulier l'air sec, dans lequel se pratiquent, d'ordinaire, les expériences d'électrostatique, ne paraît éprouver aucune variation de volume qu'on puisse attribuer à ses états électriques. Il faut en conclure que cette dilatation qui, théoriquement, ne peut être nulle, est négligeable à côté des autres phénomènes observés dans les expériences d'électrostatique. Ce fait s'explique avec l'hypothèse très vraisemblable que les potentiels pratiquement réalisés dans ces expériences, sont relativement très rapprochés les uns des autres et encore très éloignés du potentiel zéro. On sait que le coefficient de dilatation calorifique des gaz parfaits est égal à l'inverse de la température absolue : si les chaleurs obtenues dans nos laboratoires étaient fort au-dessus de zéro absolu de température, la dilatation des gaz serait insensible. Il est bien possible que les gaz parfaits jouissent de certaines propriétés électriques analogues à leurs propriétés calorifiques : dans tous les cas, il n'y a pas plus à s'étonner que leur dilatation électrique, à des potentiels absolus très élevés, soit négligeable que leur dilatation calorifique à des températures absolues également très élevées. On peut donc admettre, en pratique, que la dilatation électrique de l'air sec est insensible à côté des autres phénomènes observés en électrostatique.

9. — L'ÉLECTROMÈTRE DE THOMSON

Si le potentiel a été défini, nous n'avons encore indiqué aucun moyen d'en mesurer les valeurs relatives à l'aide d'un des nombreux instruments imaginés à cet effet. La formule (9) permet de donner la théorie de l'électromètre absolu de Thomson (Lord Kelvin) qui sert à mesurer les différences de potentiel.

Cet instrument se compose de deux disques horizontaux *ab*, *a'b'* isolés et placés à une faible distance. Du disque supérieur se détache une partie concentrique de forme circulaire *cd*, qui est mobile, tandis que la partie annulaire, appelée anneau de garde, reste fixe. Le disque inférieur *a'b'* peut subir de petits déplacements dans le sens vertical, à l'aide d'une vis micrométrique.



La partie mobile *cd* forme le plateau d'une balance, et porte en son centre un poids connu q. On commence par mettre cette balance en équilibre, de façon que le plateau vienne exactement dans le plan de l'anneau de garde avec lequel il est en communication métallique. Cet anneau sert de base à une cage métallique enveloppant la balance et qui forme avec le disque *cd* un conducteur creux dont tout l'intérieur restera au même potentiel, en sorte que la face supérieure de ce disque ne pourra recevoir aucune charge électrique.

Le disque *a'b'* étant suffisamment écarté de l'anneau de garde, et le poids q enlevé, ce qui fera monter le plateau *cd*, on met les deux conducteurs dont il s'agit de mesurer la différence de potentiel E, en communication avec les disques *ab* et *a'b'* et l'on déplace le disque inférieur *a'b'* jusqu'à ce que l'attraction électrique amène le plateau *cd* dans le plan de l'anneau de garde. Il s'est alors établi un champ rigoureusement uniforme, d'intensité F, dans la partie centrale qui sépare les deux disques *ab* et *a'b'*. Soit D la distance entre ces disques, on a

$$F = \frac{E}{D}.$$

La force agissant sur le disque *cd* et de rayon r sera, d'après la formule (9),

$$\pi r^2 p = \pi r^2 \frac{F^2}{8\pi} = \frac{r^2 E^2}{8D^2}.$$

Cette force est équivalente au poids q ; on a donc

$$q = \frac{r^2 E^2}{8D^2}$$

d'où l'on tire

$$E = \frac{D}{r}\sqrt{8q}$$

ce qui détermine la différence de potentiel à mesurer.

CHAPITRE VI

Propriétés du champ hétérogène

1. — CHAMP CONSTITUÉ DANS UN FLUIDE ISOLANT ET HOMOGÈNE, BAIGNANT D'AUTRES CORPS ISOLANTS ET HOMOGÈNES

Nous n'avons jusqu'ici considéré que des champs composés d'un seul diélectrique fluide, de constitution homogène et isotrope, dans lesquels sont plongés des corps parfaitement conducteurs M_1, M_2...

Supposons que dans un pareil champ, et avant toute électrisation des conducteurs, nous introduisions des corps diélectriques M_1', M_2'..., qui peuvent être de constitution différente de l'un à l'autre, mais homogène et isotrope pour chacun d'eux, et dont les positions resteront fixes comme celles des conducteurs. Pour concevoir cette fixité, nous admettrons que ces diélectriques sont solides, ou, s'ils sont fluides, qu'ils sont enfermés dans des enveloppes isolantes rigides et infiniment minces.

Portons les conducteurs M_1, M_2..., à des potentiels E_1, E_2..., auxquels ils seront maintenus au moyen de sources respectivement de mêmes potentiels. Le système prendra un régime permanent, un état d'équilibre dynamique stable, l'ensemble des conducteurs recevant, dans un temps donné, des sources avec lesquelles ils sont en communication une quantité d'électricité égale à celle qui s'échappe par les limites du champ, en sorte que la loi de Faraday est encore observée par les masses scalaires répandues sur les conducteurs et aux limites du champ.

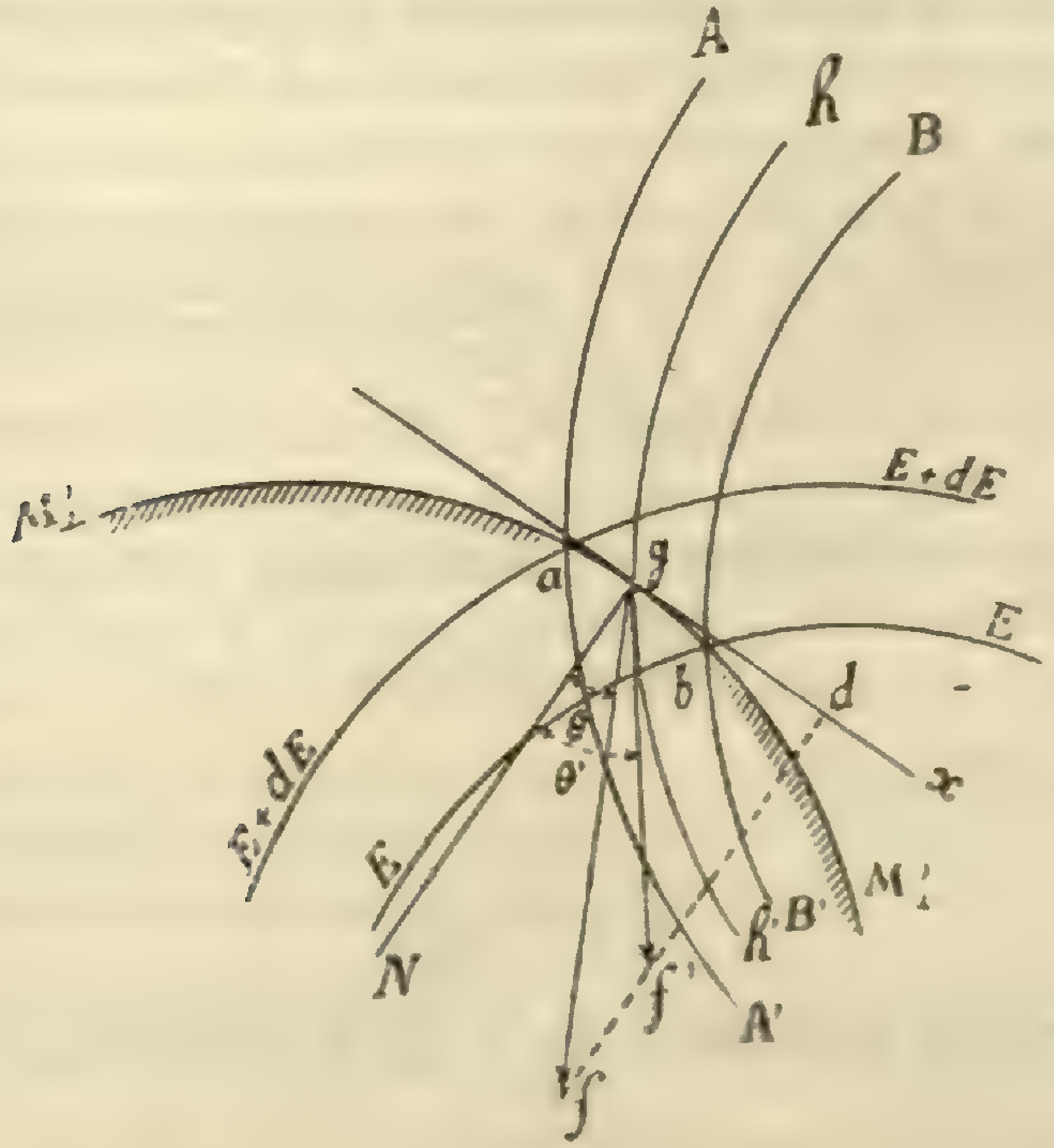
2. — RÉFRACTION DES SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES ET DES TUBES D'INDUCTION A LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX CORPS ISOLANTS

Des surfaces équipotentielles fixes, s'enveloppant sans se couper, se seront établies dans toute l'étendue des diélectriques du système. Chacune de ces surfaces prendra une forme variant d'une façon continue dans un même diélectrique, mais subissant un brusque changement dans son passage d'un diélectrique dans un autre, par suite de la discontinuité dans la constitution du milieu. Les lignes de force, coupant orthogonalement ces surfaces, subiront également une brisure, une *réfraction*, à leur passage d'un diélectrique dans un autre, et y présenteront un point anguleux.

Si du contour d'un élément superficiel pris sur un conducteur, on fait partir des lignes de force, elles engendreront un tube d'induction qui subira les mêmes réfractions que les lignes de force. Le flux d'électricité engagé dans ce tube y restera localisé, sans tendance à en sortir, et s'écoulera dans le sens des potentiels décroissants, observant la loi de Ohm dans chacun des diélectriques qu'il traversera. Par conséquent, dans toute l'étendue du champ, les formules du Chapitre II sont valables. On démontrerait, comme au n° 2 de ce chapitre, qu'il ne peut exister qu'un seul état stable du système, et qu'en chaque point l'équation (10) du champ doit définir le potentiel sans ambiguïté. Enfin l'intensité du champ $F = -\frac{dE}{dn}$ représentera, quelle que soit la nature du diélectrique (n° 1 du Ch. IV), en grandeur, direction et sens, la force électrique qui agira sur une petite sphère d'épreuve, chargée d'une unité d'électricité positive, et transportée partout où on pourra l'introduire dans le champ. Si cette petite sphère est placée à l'intérieur de l'un des corps M_1', M_2'..., supposé liquide ou gazeux, la force agissant sur elle subira, à son passage d'un milieu à l'autre, une brusque variation de direction et de grandeur, égale à la variation de direction et de grandeur de l'intensité du champ. La loi de ces variations est, d'ailleurs, facile à établir.

3. — LOIS DE LA RÉFRACTION

Considérons une ligne de force *hgh'*, qui présente un point anguleux en *g*, à son passage d'un diélectrique de conductibilité électrique *c* à un diélectrique de conductibilité *c'*. Les intensités F et F' du champ au point *g*, considéré successivement comme appartenant au premier et au second milieu, sont des vecteurs *gf* et *gf'* tangents à la ligne de force au point *g*. Chacun de ces vecteurs est normal à la partie de surface équipotentielle située dans le milieu par rapport auquel on prend l'intensité F ou F'. Le plan de ces deux droites, que nous prendrons pour plan de la figure, est donc perpendiculaire à l'arête suivant laquelle se brise la surface équipotentielle sur la surface de séparation de ces deux milieux. Soit $M_1'M_1'$ l'intersection de cette surface de séparation et du plan de la figure.



Découpons sur cette surface autour du point g un élément $d\Omega$, et faisons passer par ce contour un tube d'induction AaA', BbB'. La section droite de ce tube, infiniment voisine de l'élément $d\Omega$, et prise dans l'un ou l'autre milieu étant $d\omega$ ou $d\omega'$, chacune de ces sections sera traversée, pendant l'unité de temps, par la même quantité d'électricité di. Il en sera de même pour toute section droite ou oblique du tube d'induction dans l'un ou l'autre milieu, et notamment pour la section $d\Omega$ qui appartient à la fois aux deux milieux. On a, d'après la loi de Ohm,

$$di = c\mathrm{F}d\omega = c'\mathrm{F}'d\omega'.$$

Or

$$d\omega = d\Omega \cos\theta \qquad d\omega' = d\Omega \cos\theta'$$

θ et θ' étant les angles des vecteurs gf et gf avec la normale $g\mathrm{N}$ à la surface de séparation, normale qui est située dans le plan de la figure comme ces deux vecteurs. On tire de là,

$$(1) \qquad c\mathrm{F}\cos\theta = c'\mathrm{F}'\cos\theta' \quad \text{ou} \quad k\mathrm{F}\cos\theta = k'\mathrm{F}'\cos\theta'.$$

Le produit de la conductibilité électrique ou du pouvoir inducteur spécifique par la composante normale de l'intensité du champ, au passage d'un milieu dans un autre, est le même dans les deux milieux. Telle est la *loi de discontinuité* du vecteur F à la surface de séparation de deux diélectriques. La composante tangentielle de F n'est pas discontinue à la traversée de l'élément $d\Omega$. En effet, l'intensité du champ, dans l'un ou l'autre milieu, au voisinage du point g, et projetée suivant une direction quelconque gx, a pour valeur, comme on sait, $-\frac{dE}{dx}$: Si l'on prend pour direction gx la tangente à la courbe $M_1'M_1'$, dx se confond avec ab : dE est la différence de potentiel en a et b, quel que soit le milieu considéré ; les deux projections sont donc égales, et l'on a

$$F \sin\theta = F' \sin\theta' = gd. \tag{2}$$

On tire de (1) et (2)

$$\frac{k}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{k'}{\operatorname{tg}\theta'}. \tag{3}$$

Cette dernière formule donne la loi de réfraction des lignes de force.

4. — MASSES SCALAIRES ÉGALES ET DE LIGNES CONTRAIRES DISTRIBUÉES A LA SURFACE DES CORPS ISOLANTS

Les masses scalaires distribuées à la superficie des conducteurs se retrouvent à la superficie des corps diélectriques M_1', M_2'... ; mais elles sont neutralisées, en chaque point, par des masses égales et de signes contraires répandues sur la face opposée, du côté du diélectrique qui forme la substance de ces corps.

La masse totale répandue de chaque côté est nulle, car chaque tube d'induction qui traverse le corps, découpe, à sa rentrée et à sa sortie, deux éléments superficiels chargés de masses électriques égales et de signes contraires. On peut donc dire que la charge électrique de chacun des corps M_1', M_2'..., est nulle. Les lignes de force du champ qui, sans pénétrer dans ces corps, leur sont tangentes, déterminent, sur la surface de chacun d'eux, une succession de points de contact dont l'ensemble forme une *ligne neutre*, séparant les parties chargées d'électricité positive des parties chargées d'électricité négative. Les lignes de force tombent toujours normalement sur les parfaits conducteurs ; cette circonstance ne se présente qu'exceptionnellement pour les corps M_1', M_2'..., en général, en un certain nombre de points isolés de leur surface : ce sont les points de contact des surfaces équipotentielles du champ qui, sans pénétrer dans ces corps, leur sont simplement tangentes. D'après la formule (3), en chacun de ces points, la ligne de force passe d'un milieu dans l'autre sans subir de réfraction.

5. — EXTENSION DE LA LOI DE FARADAY AUX MASSES VECTORIELLES

De chaque côté d'un élément superficiel des corps M', on constate la présence de masses vectorielles, de directions opposées en chaque point g, et perpendiculaires au plan des intensités F et F' pour ce point. Ces masses opposées n'ont pas la même valeur absolue comme les masses scalaires correspondantes, puisque leur densité au point g est égale à la projection commune des intensités F et F', multipliée dans un cas par $\frac{k}{4\pi}$, et dans l'autre cas, par $\frac{k'}{4\pi}$; mais le rapport des masses extérieures aux masses intérieures est constant pour toute partie de la superficie d'un des corps M', et égal à $\frac{k}{k'}$.

Si l'on applique au volume du corps M' l'identité (7) du Chapitre précédent, on voit que la somme des masses vectorielles distribuées intérieurement sur sa surface terminale est nulle, d'où résulte que la somme des masses distribuées extérieurement est également nulle. On conclut facilement de là que :

Dans toute surface fermée enveloppant un certain nombre de conducteurs, et pouvant même traverser les corps diélectriques en les coupant, la somme des masses électriques, tant vectorielles que scalaires, est nulle.

La loi de Faraday est encore observée.

6. — INTENSITÉ DU CHAMP D'APRÈS LA LOI D'ACTION DES MASSES SCALAIRES ET DES MASSES VECTORIELLES, SUR UNE MASSE SCALAIRE

Si l'on applique au volume qu'enveloppe cette surface, la formule (16) du Chap. IV, en observant que l'on a encore dans tout l'intérieur de ce volume

$$\rho = 0 \qquad \mu_x = \mu_y = \mu_z = 0$$

et que, pour tout point des surfaces des conducteurs,

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

on trouve, par une démonstration calquée sur celle déjà donnée au Chapitre précédent, que :

Dans toute partie du champ, limitée par une surface fermée quelconque, qui peut traverser les diélectriques solides, la force agissant sur une sphère infiniment petite, chargée d'une masse m d'électricité, est équivalente à l'action fictive exercée sur cette masse par les masses scalaires et vectorielles contenues dans cette partie du champ.

L'intensité du champ au point occupé par la petite sphère est égale à l'action exercée sur l'unité positive de masse scalaire, concentrée en ce point, par toutes les masses tant vectorielles que scalaires comprises dans la partie considérée du champ.

Le coefficient λ de l'action des masses tant scalaires que vectorielles est égal à l'inverse du pouvoir inducteur spécifique du diélectrique, au point où cette masse est supposée exister. Elle sera $\frac{1}{k}$ dans le diélectrique fluide, $\frac{1}{k_1'}$, $\frac{1}{k_2'}$... à l'intérieur des corps M_1', M_2'...

Si la partie du champ considérée est toute celle occupée par le diélectrique fluide, la proposition qui précède montre que la force agissant sur la petite sphère placée en un point quelconque de ce fluide, est équivalente à l'action exercée sur sa charge électrique par les masses vectorielles répandues sur les corps diélectriques M', ainsi que par les masses scalaires répandues sur les mêmes corps, sur les conducteurs M, et aux limites du champ. Le seul coefficient λ qui intervienne ici est $\frac{1}{k}$, l'inverse du pouvoir inducteur du fluide.

Si la partie considérée du champ est celle occupée par l'un des corps diélectriques M′, la même proposition montre que la force agissant sur la petite sphère placée à l'intérieur de ce corps est égale à l'action exercée sur la charge par les masses tant scalaires que vectorielles répandues sur la surface interne du corps diélectrique. Le coefficient λ est l'inverse $\frac{1}{k_1}$, du pouvoir inducteur du diélectrique considéré.

7. — CHAMP CONSTITUÉ DANS UN FLUIDE ISOLANT ET HOMOGÈNE, BAIGNANT D'AUTRES CORPS ISOLANTS DE CONSTITUTION VARIABLE EN CHAQUE POINT

On peut envisager un cas plus général que celui qui a été jusqu'ici examiné dans ce chapitre, et supposer que les diélectriques M′ sont hétérogènes avec un pouvoir inducteur k' variable en chaque point et fonction continue des coordonnées x, y, z de ce point. Cette fonction peut même changer brusquement de valeur à la traversée de certaines surfaces fermées à l'intérieur desquelles se trouvent des noyaux diélectriques N′, d'une constitution nouvelle, et variable, si l'on veut, en chaque point. Enfin on admettra que certains de ces noyaux seront des conducteurs N alimentés, comme les conducteurs M, par des sources qui en maintiendront les potentiels constants.

Comme dans le cas précédent, le système prendra un régime permanent, et la loi de Faraday sera observée par les masses scalaires distribuées sur les conducteurs M et N et aux limites du champ.

Des surfaces équipotentielles se seront établies dans tout l'espace occupé par les diélectriques; elles présenteront une arête saillante, chaque fois qu'elles traverseront une surface de discontinuité marquant une brusque variation du pouvoir inducteur.

Les lignes de force, trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles, subiront une réfraction en traversant chaque surface de discontinuité. Il en sera de même des tubes d'induction partant normalement de la surface des conducteurs M, N, ou des limites du champ, et dans lesquels les flux d'électricité s'écouleront, sans gain ni perte, en obéissant à la loi de Ohm. Dans toute l'étendue du champ, le potentiel parfaitement défini obéit à une relation de la forme (10) du Chapitre II, mais l'équation de Laplace n'est plus applicable. En suivant le raisonnement fait au Chapitre II pour l'obtenir, on voit qu'elle doit être remplacée, en tout point d'un diélectrique hétérogène de pouvoir conducteur k', variable avec les coordonnées de ce point, par l'équation

$$(4) \qquad \frac{d}{dx}(k'\mathrm{X}) + \frac{d}{dy}(k'\mathrm{Y}) + \frac{d}{dz}(k'\mathrm{Y}) = 0.$$

L'intensité du champ $-\frac{d\mathrm{E}}{dn}$ sera partout, en grandeur, direction et sens (n° 1 du Ch. IV), la force qui agirait sur une petite sphère d'épreuve, chargée d'une unité d'électricité positive. Cette intensité subit une brusque variation à sa traversée de chaque surface de discontinuité et dont les lois sont évidemment exprimées par les formules (1), (2) et (3) de ce chapitre.

8. — GÉNÉRALITÉ DE LA LOI DE FARADAY APPLIQUÉE AUX MASSES SCALAIRES DE SUPERFICIE

Les masses scalaires répandues de chaque côté des surfaces de discontinuité se neutralisent comme l'exprime la formule (1). Dans toute partie du champ, pouvant comprendre des conducteurs M et N, et limitée par une surface fermée Ω, la somme des masses scalaires d'électricité superficielle est nulle et la loi de Faraday est observée : cela résulte d'ailleurs de l'application, au volume considéré, de l'identité (5) du Chap. IV, dans laquelle on fait $\mathrm{U} = k$. L'intégrale de volume est alors nulle d'après l'équation (4) ; et il reste

$$\int_{\Omega+\Omega_1+\dots} k(l\mathrm{X} + m\mathrm{Y} + n\mathrm{Z})d\Omega = 0.$$

Ce qui exprime la loi de Faraday. On voit notamment que la charge d'un des corps diélectriques M' ou N' est égale à la somme des charges des conducteurs qu'il contient, et que cette charge est nulle, si le corps ne contient aucun conducteur chargé.

9. — CAS OU LA LOI DE FARADAY S'APPLIQUE AUX MASSES VECTORIELLES

Les masses vectorielles n'apparaissent encore ici que, de part et d'autre, sur les surfaces de discontinuité : Directement opposées, en chaque point, et situées dans le plan tangent, elles sont tangentes à l'arête équipotentielle qui passe par ce point sur la surface, et leurs valeurs sont dans le rapport des pouvoirs inducteurs. Mais la loi de Faraday, en général, n'est plus observée. Si, en effet, on applique l'identité (5) du Chap. IV au volume v que nous venons de considérer, en faisant $U = k$, $X = 0$, $Y = -Z$ et $Z = Y$ il vient

$$\int_v \left[\frac{d}{dz}(kY) - \frac{d}{dy}(kZ)\right] dv + \int_{\Omega+\dots} k\,(nY - mZ)\,d\Omega = 0$$

l'intégrale de surface étant étendue à tout l'intérieur de la surface Ω limitant le volume v, et aux deux faces des surfaces de discontinuité. Si l'on observe qu'en chaque point

$$\frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy} = -\frac{d^2E}{dxdy}$$

$$nY - mZ = 4\pi\tau_x = 4\pi\frac{J_x}{k}$$

l'identité précédente devient

$$\int_v \left[\frac{dk}{dz}Y - \frac{dk}{dy}Z\right] dv + 4\pi\int_{\Omega+\dots} J_x d\Omega = 0.$$

L'intégrale de surface représente la projection sur l'axe en x de la masse vectorielle totale contenue dans le volume v. Elle n'est pas nulle, en général, l'intégrale de volume ne l'était pas davantage. Pour que cette projection s'annule, quelle que soit la surface limitant le volume v dans le champ, il faut et il suffit que chaque élément de l'intégrale de volume soit nul, ce qui exige

$$\frac{\frac{dk}{dy}}{Y} = \frac{\frac{dk}{dz}}{Z}$$

et pour que la masse vectorielle totale elle-même soit nulle, il faut et il suffit que chacune de ses projections sur les axes de coordonnées soit nulle, ce qui exige

$$\frac{\frac{dk}{dx}}{\mathrm{X}} = \frac{\frac{dk}{dy}}{\mathrm{Y}} = \frac{\frac{dk}{dz}}{\mathrm{Z}}. \tag{5}$$

Ces relations expriment que le pouvoir inducteur k est une fonction du potentiel E. Ainsi donc pour que la loi de Faraday soit observée par les masses vectorielles dans une partie quelconque du champ, limitée par une surface fermée, il faut et il suffit que les surfaces $k =$ constante sur lesquelles le pouvoir inducteur ne varie pas, coïncident avec les surfaces équipotentielles du champ.

10. — MASSES CUBIQUES D'ÉLECTRICITÉ DANS LES PARTIES HÉTÉROGÈNES DU CHAMP

Si l'on applique au même volume v la formule (16) du Chap. IV, en observant que l'on a en tout point du champ

$$\mu_x = \mu_y = \mu_z = 0$$

on aura

$$\mathrm{X}_m = \int_v \rho \frac{d\frac{1}{r}}{dx} dv + \int_\Omega \sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\Omega + \int_\Omega \left(\tau_z \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - \tau_y \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\Omega$$

Dans cette formule, ρ n'est pas nul comme il arrive dans un champ homogène, en vertu de l'équation de Laplace. La valeur de ρ se tire de l'équation (4), qui peut se mettre sous la forme

$$4\pi k\rho + \frac{dk}{dx}\mathrm{X} + \frac{dk}{dy}\mathrm{Y} + \frac{dk}{dz}\mathrm{Z} = 0. \tag{6}$$

De même que nous avons posé $k\sigma = \mathrm{I}$, $k\bar{\tau} = \bar{\mathrm{J}}$, posons aussi

$$k\rho = \mathrm{D} = \frac{k}{4\pi}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right) \tag{7}$$

et par suite

$$\mathrm{D} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dk}{dx}\mathrm{X} + \frac{dk}{dy}\mathrm{Y} + \frac{dk}{dz}\mathrm{Z}\right) \tag{8}$$

la valeur de X_m deviendra

$$(9) \quad X_m = \int_v \frac{D}{k} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} dv + \int_\Omega \frac{1}{k} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{Jz}{k} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - \frac{Jy}{k} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\Omega.$$

On voit par là que l'intensité F_m du champ au point M, pris à l'intérieur du volume v, ne peut plus être représentée seulement par l'action des masses superficielles, scalaires ou vectorielles, contenues dans le volume v, et agissant, d'après les lois de Newton et de Laplace, sur l'unité de masse scalaire concentrée en M. Ces actions ont pour projections sur l'axe des x les deux derniers termes de l'équation ci-dessus; il faut y ajouter le premier terme, pour avoir la projection de F_m. Or ce premier terme représente la projection de l'action exercée sur la même unité de masse scalaire, et suivant la loi de Newton, par des masses scalaires répandues dans les éléments de volume dv, et dont la densité cubique serait, en chaque point, la quantité D donnée par l'équation (7) ou (8). Le coefficient λ de l'action des masses, quelles qu'elles soient, est égal à l'inverse $\frac{1}{k}$ du pouvoir inducteur spécifique au point (x, y, z) où cette masse est supposée exister. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Dans toute partie du champ limitée par une surface fermée, la force électrique agissant sur une sphère infiniment petite et chargée d'une masse m d'électricité est équivalente à l'action fictive sur cette masse, des masses superficielles, tant scalaires que vectorielles, répandues dans ce volume, ainsi que des masses scalaires répandues dans tous les éléments du même volume où le pouvoir inducteur est variable.

Pour que les masses scalaires disparaissent de tous les éléments de volume, il faut et il suffit que la densité cubique D de ces masses soit toujours nulle, soit d'après (8)

$$(10) \qquad \frac{dk}{dx} X + \frac{dk}{dy} Y + \frac{dk}{dz} Z = 0.$$

Cette équation de condition exprime que les surfaces $k =$ const. sur lesquelles le pouvoir inducteur est invariable, doivent couper orthogonalement les surfaces équipotentielles, ce qui signifie que le pouvoir inducteur doit être constant sur chaque ligne de force, et l'équation de Laplace sera alors satisfaite.

11. — LA LOI DE FARADAY INAPPLICABLE AUX MASSES CUBIQUES

Si la somme des masses scalaires de superficie contenues dans un champ limité par une surface conductrice est toujours nulle, il est facile de voir qu'il n'existe aucune raison pour qu'il en soit toujours ainsi des masses cubiques comprises dans les mêmes limites d'un champ hétérogène. Les masses cubiques n'obéissent donc pas, en général, à la loi de conservation de Faraday.

12. — CHAMP STABLE MAINTENU DANS UN FLUIDE DE CONDUCTIBILITÉ MÉDIOCRE

Dans les différents systèmes précédemment examinés, il a été admis que les divers diélectriques sont d'une conductibilité électrique extrêmement faible, comparable à celle de l'air sec, et que les phénomènes calorifiques développés par la loi de Joule sont insensibles. Quand ces corps, qu'on appelle communément des isolants, sont remplacés, en partie ou en totalité, par de médiocres conducteurs, les effets de la chaleur de Joule ne sont plus négligeables. Il devient alors intéressant de préciser dans quelles conditions peut s'établir un régime permanent, canalisant non seulement l'écoulement de l'électricité, mais aussi l'écoulement de la chaleur créée en chaque point du champ où la conductibilité électrique devient notable.

Pour définir ce régime permanent, on peut concevoir, par exemple, que les parfaits conducteurs comme les corps métalliques, sont maintenus non seulement à potentiel constant par leur mise en relation avec une source d'électricité, mais aussi à température constante par leur mise en relation avec une source de chaleur. Considérons, notamment, le cas simple où le champ est composé d'un seul fluide de médiocre conductibilité, celui-ci étant homogène quand toute la masse est prise à une même pression, une même température et un même potentiel. Sa conductibilité électrique, fonction de la pression et de la température étant c, nous représenterons par γ sa conductibilité thermique, fonction de la pression et du potentiel. Ce fluide est limité, comme dans les cas précédents, par la paroi interne d'un conducteur creux N, maintenu au potentiel E_0 et à la température T_0. Il renferme d'autres conducteurs M_1, M_2..., maintenus respectivement aux potentiels E_1, E_2..., et aux températures T_1, T_2... Comme nous supposons tout le système soumis à une pression uniforme P, nous pourrons poser

$$c = \varphi(T) \qquad \gamma = \varphi_1(E) \tag{11}$$

les fonctions φ et φ_1 contenant implicitement la constante P. T et E représentent la température et le potentiel au point du champ où les deux conductibilités sont c et γ.

Grâce à l'issue donnée aux flux d'électricité et de chaleur par l'intermédiaire des corps N, M_1, M_2..., il s'établira évidemment dans le système un état d'équilibre dynamique : le potentiel et la température, variables d'un point à l'autre dans le champ, seront fixes et déterminés en chaque point (x, y, z) par deux équations telles que les équations (8) et (10) du Chap. II.

$$(12) \left\{ \begin{aligned} E &= f(x, y, z) \\ T &= f_1(x, y, z). \end{aligned} \right.$$

13. — EFFETS DE LA CHALEUR DE JOULE

Le champ sera partagé, par des surfaces équipotentielles et par des surfaces isothermes, en couches de même potentiel et de même température. Les trajectoires orthogonales des premières surfaces formeront des tubes d'induction dont les propriétés déjà étudiées restent les mêmes : notamment, le flux d'électricité circulant dans chaque tube étant constant, on aura toujours l'équation (4)

$$\frac{d}{dx}(cX) + \frac{d}{dy}(cY) + \frac{d}{dz}(cZ) = 0. \tag{13}$$

Le pouvoir inducteur $k = 4\pi c$ étant fonction de la température et, par suite, variable dans le champ comme cette température elle-même, on retrouve ici dans toute l'étendue du champ des masses cubiques, et l'intensité, en chaque point, est définie, non seulement par l'action newtonienne des masses superficielles d'électricité distribuées à la surface des conducteurs, mais encore par l'action toujours newtonienne de ces masses cubiques répandues dans le champ, toutes ces masses scalaires étant supposées agir sur l'unité de masse fixée au point considéré.

Les trajectoires orthogonales des surfaces isothermes forment également des canaux étanches d'écoulement de la chaleur. Si le flux qui y circule était constant comme pour l'électricité, on aurait, d'après l'hypothèse de Fourier, une équation analogue à l'équation (13), dans laquelle c devrait être remplacé par γ et X, Y, Z, par X_1, Y_1, Z_1, dérivées par rapport à x, y, z de la deuxième fonction (12) changée de signe. Mais, dans chaque élément de volume dv du champ, se dégage, d'après la loi de Joule, et dans l'unité de temps, une quantité de chaleur égale à $cF^2dv = c(X^2 + Y^2 + Z^2)dv$; et comme on suppose un régime permanent établi, cette quantité représente l'excès de la quantité de chaleur qui sort de l'élément de volume dv sur la quantité de chaleur qui y entre, en sorte que l'équation (9) du Chap. II devra être remplacée par la suivante

$$(14) \qquad \frac{d}{dx}(\gamma X_1) + \frac{d}{dy}(\gamma Y_1) + \frac{d}{dz}(\gamma Z_1) = c(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Le problème de l'équilibre dynamique dans un champ se pose donc, en général, de la manière suivante :

Calculer les fonctions (12) de x, y, z qui représentent le potentiel E et la température T, en chaque point x, y, z du champ, connaissant :

1° La nature du champ définie par les fonctions (11) supposées connues et qui expriment les deux espèces de conductibilité.

2° La position des conducteurs N, M_1, M_2..., dont les potentiels E_0, E_1, E_2..., et les températures T_0, T_1, T_2..., sont donnés.

On aura à intégrer les équations (13) et (14) en tenant compte de ces conditions. Ce problème a une solution et n'en a qu'une. Nous n'insisterons pas sur cette question qui est purement théorique. Elle mérite cependant d'attirer l'attention des mathématiciens. Dans le problème de la propagation de la chaleur, qui a donné lieu à de si brillantes études, on n'a examiné, croyons-nous, que les phénomènes de simple conduction ; il semblerait intéressant de chercher à aborder le cas où, dans l'étendue du champ calorifique, se trouvent des sources qui créent de la chaleur suivant une certaine loi.

14. — CAS OU LE CHAMP STABLE BAIGNE D'AUTRES CORPS DE CONDUCTIBILITÉ MÉDIOCRE

Le champ, sur lequel nous venons de jeter un rapide aperçu, pourrait contenir, en outre des parfaits conducteurs M_1, M_2..., des corps solides M_1', M_2'..., médiocres conducteurs. Traversés, avec réfraction, par les tubes d'induction, ces corps donneront lieu, en vertu de la loi de Joule, à un développement de chaleur, comme le milieu fluide dans lequel ils sont plongés. Ce développement de chaleur, par suite de la différence de conductibilité électrique des corps qui le supportent, subira une brusque variation dans chaque tube d'induction, au moment où celui-ci se réfracte pour passer d'un milieu dans un autre. On voit bien là la cause d'un nouveau phénomène calorifique sur chaque surface de discontinuité, et qui, en électro-dynamique, devient l'effet Peltier. La température neutre, à la soudure de deux fils conducteurs que traverse un courant, n'est autre que la température à laquelle les deux métaux soudés ont acquis la même conductibilité, température à laquelle le phénomène dont nous venons de parler n'a plus de raison d'être, et pour laquelle l'effet Peltier s'évanouit.

Enfin, dans les divers champs stables examinés à ce chapitre, on aurait pu supposer l'existence de conducteurs soumis à des potentiels variant d'un point à un autre, grâce à des courants établis dans leur intérieur au moyen de certains points considérés comme sources d'électricité et maintenus à potentiels constants ; mais c'eût été empiéter sur le domaine de l'électro-dynamique ; c'est dans cette partie de la science de l'électricité que nous traiterons cette question.

CHAPITRE VII

Les forces électriques dans un champ hétérogène

1. — CALCUL GÉNÉRAL DES FORCES ÉLECTRIQUES EXERCÉES SUR UN CORPS ISOLANT PLONGÉ DANS UN CHAMP FLUIDE HOMOGÈNE

Revenons au cas étudié au Chapitre précédent d'un champ limité par une surface conductrice, et contenant un diélectrique fluide homogène de pouvoir inducteur k, dans lequel seraient plongés des conducteurs M et des diélectriques solides M'. Les corps M' peuvent contenir eux-mêmes des conducteurs N et d'autres diélectriques N'. Le pouvoir inducteur peut varier dans les diélectriques M', N'. Le champ est créé en portant les conducteurs M, N à des potentiels invariables.

Les diélectriques M', aussi bien que les conducteurs M, ont une tendance à se mouvoir dans le champ, et ne sont maintenus au repos que par les liaisons qu'on leur impose en admettant, par exemple, que, dans chacun d'eux, trois points restent fixes, ou mieux, que, sur la surface de chacun d'eux, considéré comme solide invariable, s'exercent des pressions ou tensions mécaniques convenablement distribuées et inclinées, faisant équilibre aux forces électriques. Ces forces ne dépendent évidemment, en vertu du principe de l'action au contact, que de l'état du champ sur ces surfaces, et doivent pouvoir s'exprimer en fonction de cet état.

On a vu au Chapitre V que, pour les conducteurs plongés dans un champ homogène, et c'est encore le cas ici pour les corps M, ces forces consistent en une traction normale, dont la valeur, par unité de surface, est donnée par la formule (9)

$$p = \frac{kF^2}{8\pi}.$$

Proposons-nous maintenant de résoudre le même problème relatif aux corps M', et de rechercher la valeur et la direction de la force $-pd\Omega'$, qu'il faudrait appliquer sur chaque élément $d\Omega'$ de la superficie de ces corps pour les maintenir en équilibre.

Si l'on désigne par p_x, p_y, p_z les composantes, suivant les axes de coordonnées, de la force électrique p, la résultante des forces s'exerçant sur les surfaces Ω' de tous les diélectriques M' compris dans le champ, aura pour projection sur l'axe des x

$$\int_{\Omega'} p_x d\Omega'.$$

R_x étant la projection, sur le même axe, de la résultante $\overline{R}$ de toutes les tensions électrostatiques exercées normalement à la surface des conducteurs M et sur la limite du champ, on devra avoir

$$(1) \qquad R_x + \int_{\Omega'} p_x d\Omega' = 0$$

car les forces mécaniques dont il s'agit sont équivalentes à des forces électriques qui, en vertu du principe d'égalité de l'action et de la réaction, sont, deux à deux, égales et opposées.

On a indifféremment

$$R_x = \int_{\Omega} \frac{k}{8\pi} (F^2)_x \, d\Omega = \frac{k}{8\pi} \int_{\Omega} l(X^2 + Y^2 + Z^2) d\Omega$$
$$= \frac{k}{8\pi} \int_{\Omega} X(lX + mY + nZ) d\Omega.$$

Si l'on applique l'identité (5) du Chap. IV au volume v occupé par le diélectrique fluide, en faisant $U = 1$ et en remplaçant X par $X^2 + Y^2 + Z^2$, Y et Z par zéro, on aura, après avoir multiplié par $\frac{k}{8\pi}$,

$$\frac{k}{8\pi} \int_{v} \frac{d}{dx} (X^2 + Y^2 + Z^2) dv + \frac{k}{8\pi} \int_{\Omega + \Omega'} l(X^2 + Y^2 + Z^2) d\Omega = 0$$

soit

$$\frac{k}{8\pi} \int_{v} \frac{d}{dx} (X^2 + Y^2 + Z^2) dv + \frac{k}{8\pi} \int_{\Omega'} l(X^2 + Y^2 + Z^2) d\Omega' + R_x = 0.$$

Si l'on applique la même identité au même volume, en faisant $U = X$, on aura pareillement

$$\frac{k}{8\pi}\int_v\left[\frac{d}{dx}(X^2)+\frac{d}{dy}(XY)+\frac{d}{dz}(XZ)\right]dv$$
$$+\frac{k}{8\pi}\int_{\Omega'}X(lX+mY+nZ)d\Omega'+R_x=0.$$

Multipliant cette dernière équation par 2, et la retranchant de la précédente, il reste, les intégrales de volume se détruisant élément par élément,

$$R_x=\frac{k}{8\pi}\int_{\Omega'}\left[l(X^2+Y^2+Z^2)-2X(lX+mY+nZ)\right]d\Omega'$$

et, si on pose

$$P_x=\frac{k}{8\pi}\left[2X(lX+mY+nZ)-l(X^2+Y^2+Z^2)\right]$$

l'équation (1) prend la forme

$$(2)\qquad \int_{\Omega'}(p_x-P_x)d\Omega'=0.$$

2. — FORCE ÉLECTRIQUE SUR L'UNITÉ DE SURFACE

Cette égalité, vraie pour l'ensemble Ω' des surfaces des diélectriques M', l'est aussi, comme l'a montré Vaschy (¹), pour une partie quelconque ω' de ces surfaces.

Soit ω_1' une partie de la surface Ω_1' du diélectrique M_1' : tout le système étant à l'état neutre au potentiel zéro des limites du champ, imaginons un feuillet conducteur infiniment mince et fermé, passant par le contour de ω_1'. Chargeons d'une façon arbitraire les conducteurs M, N, extérieurs au feuillet ainsi que des sphères conductrices infiniment petites qu'on supposera distribuées d'une

---

(¹) Vaschy, *Théorie de l'Électricité*. 1896, pages 60 à 65.

façon quelconque dans le champ, mais aussi à l'extérieur du feuillet. Il sera ainsi créé un nouveau champ dont le potentiel sera constant dans tout l'espace enveloppé par le feuillet. On peut remplacer la surface Ω_1'', occupée par ce feuillet, par de petites sphères portant des charges convenables, celles répandues extérieurement sur les éléments du feuillet qu'elles remplacent. Toutes les petites sphères que nous avons imaginées, étant placées sans charge aux mêmes points du champ primitif, n'y porteront aucune modification. Superposons les deux champs qui contiennent les mêmes conducteurs aux mêmes emplacements, nous obtiendrons un champ que l'on peut réellement créer, et dont l'intensité pourra être quelconque en tout point, sauf à l'intérieur de la surface Ω_1'', où cette intensité sera la même que dans le champ primitif. L'intégrale (2) est applicable à ce dernier champ, et comme on peut le créer, grâce aux petites sphères que nous sommes libres d'y distribuer, de telle sorte que son intensité soit nulle sur toute la surface Ω', exception étant faite pour la partie ω_1', on devra avoir

$$\int_{\omega_1'} (p_x - P_x)d\Omega' = 0.$$

Cette équation étant vraie pour une surface non fermée ω_1', d'étendue quelconque, prise sur l'un des diélectriques M', est applicable à un élément de cette surface : on en conclut

$$p_x = P_x.$$

On aurait de même

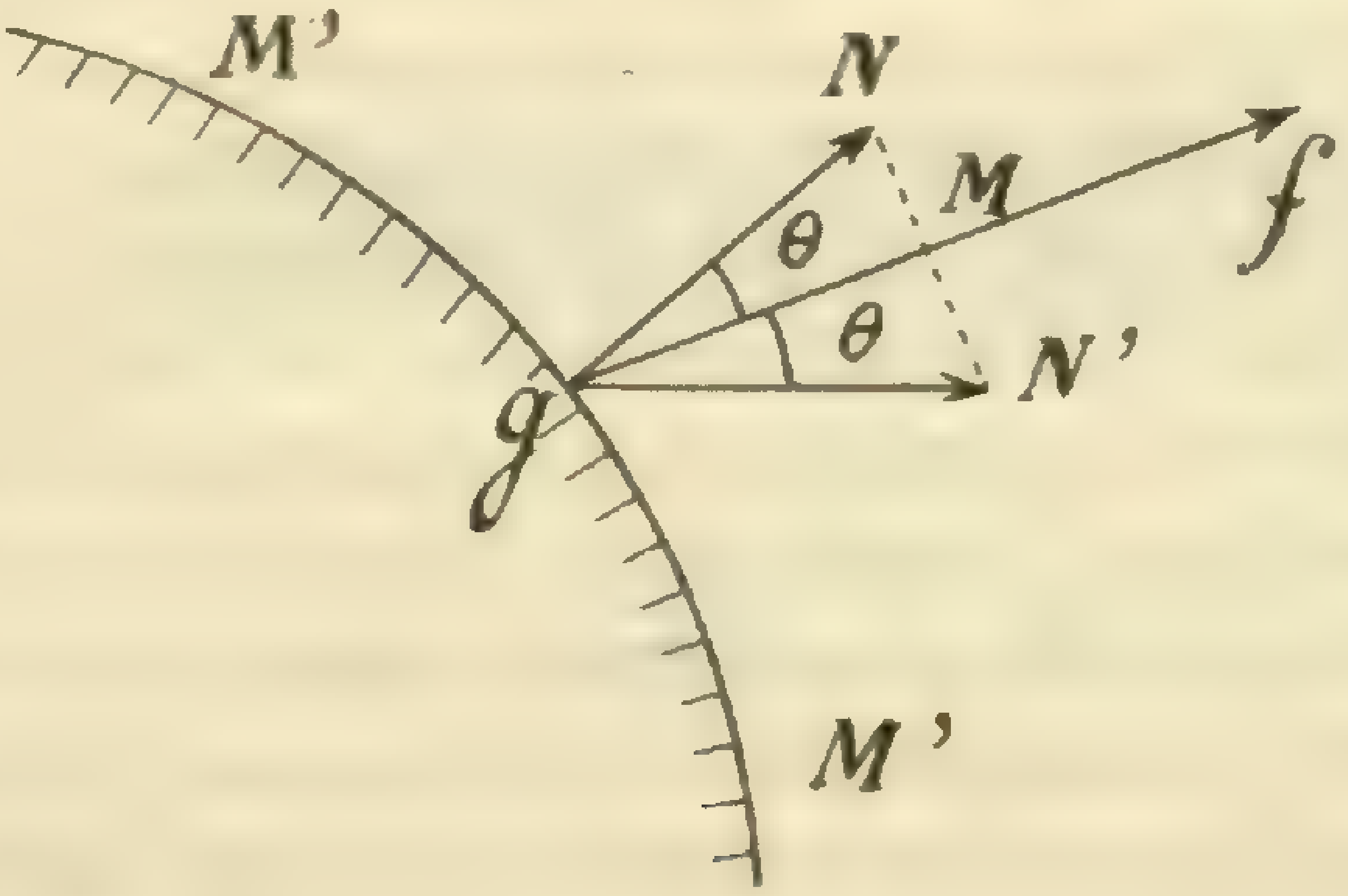
$$p_y = P_y \qquad p_z = P_z$$

P_y, P_z se déduisant de P_x par des permutations circulaires des lettres X, Y, Z, *l, m, n*. On a donc

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} p_x &= \frac{k}{8\pi}\left[2X(lX + mY + nZ) - l(X^2 + Y^2 + Z^2)\right] \\ p_y &= \frac{k}{8\pi}\left[2Y(lX + mY + nZ) - m(X^2 + Y^2 + Z^2)\right] \\ p_z &= \frac{k}{8\pi}\left[2Z(lX + mY + nZ) - n(X^2 + Y^2 + Z^2)\right]. \end{aligned} \right.$$

On voit que la force par unité de surface p, appliquée en un point g, sur le diélectrique M′, est représentée en grandeur, direction et sens, par la formule symbolique

$$(4) \qquad \bar{p} = \frac{k}{8\pi}\left[2\bar{F}F\cos\theta - (F^2)_{l,\,m,\,n}\right].$$



C'est la résultante de deux vecteurs. Le premier gf est dirigé suivant l'intensité $\bar{F}$ du champ, prise à l'extérieur, dans le diélectrique fluide. Il a pour valeur

$$gf = 2\,\frac{kF^2}{8\pi}\cos\theta.$$

Le second fN' est directement opposé à la normale au point g dirigée vers l'extérieur, et qui fait un angle θ avec l'intensité $\bar{F}$. Il a pour valeur

$$fN' = \frac{kF^2}{8\pi}.$$

Si donc on prend, sur la normale, $gN = fN'$, la projection de N sur gf tombera au milieu M de gf, comme la projection de N′ qui lui est symétrique : d'où résulte que :

Le vecteur p est le symétrique, par rapport à l'intensité extérieure $\bar{F}$ *du champ, d'un vecteur égal à* $\frac{kF^2}{8\pi}$ *et porté sur la normale extérieure à la surface.*

3. — VARIATIONS DE LA FORCE ÉLECTRIQUE SUR LA SURFACE D'UN CORPS

Quand $\theta = 0$, ce qui n'arrive, en général, qu'en des points isolés de la surface du diélectrique solide, la force p est une tension normale à la surface. Quand θ varie de 0° à 45°, cette tension s'incline sur la surface jusqu'à lui devenir tangente pour $\theta = 45°$; elle agit alors comme une force de glissement ; quand θ varie de 45° à 90°, la force p devient une pression oblique qui finit par agir normalement à la surface sur les lignes neutres, quand $\theta = 90°$. Si l'on continue à faire varier θ de 90° à 180°, on verra se reproduire les mêmes circonstances, que quand il varie de 90 à 0°.

4. — FORCE ÉLECTRIQUE SUR L'UNITÉ DE SURFACE DANS UN CHAMP STABLE QUELCONQUE

On voit par les formules (3) que la force électrique, à égale intensité du champ, est proportionnelle au pouvoir inducteur k ; elle dépend, pour un élément de surface, de l'intensité du champ et du pouvoir inducteur au voisinage de cet élément. Aussi les formules (3) ne s'appliquent-elles pas seulement au cas qui a été supposé pour les démontrer. Elles sont encore valables, quand on veut exprimer la force électrique p qui s'exerce à la superficie de l'un des noyaux N', et qui tend à déplacer ce noyau par rapport au diélectrique M'. On peut même supposer que ce noyau est délimité par une surface imaginaire quelconque ω' ; la force électrique qu'il exerce, par unité de surface, contre la paroi qui l'enveloppe sera encore représentée par les formules (3) dans lesquelles k n'est plus à considérer comme une constante.

5. — FORCE ÉLECTRIQUE SUR L'UNITÉ DE VOLUME

La résultante Φ des forces électriques qui s'exercent sur le noyau de volume v n'est que la résultante des forces $pd\omega'$ appliquées à chaque élément de sa surface ω', et dont les composantes sont données par les formules (3). La composante Φ_x de Φ sera donc

$$\Phi_x = \frac{1}{8\pi} \int_{\omega'} k \Big[2X(lX + mY + nZ) - l(X^2 + Y^2 + Z^2) \Big] d\omega'.$$

Or, deux applications de l'identité (5) du Chap. IV donnent, en observant que l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale dirigée vers l'extérieur de la surface fermée ω',

$$\int_v \left[\frac{d}{dx}(kX^2)+\frac{d}{dy}(kXY)+\frac{d}{dz}(kXZ)\right]dv$$
$$=\int_{\omega'} kX(lX+mY+nZ)d\omega'$$

$$\int_v \frac{d}{dx}\left[k(X^2+Y^2+Z^2)\right]dv=\int_{\omega'} kl(X^2+Y^2+Z^2)d\omega'$$

Si l'on retranche, membre à membre, la deuxième de ces équations de la première multipliée par 2, on obtient au second membre $8\pi\Phi_x$, et on a, en effectuant les dérivations sous les signes $\int_v$

$$8\pi\Phi_x = 2\int_v \left[\frac{d}{dx}(kX)+\frac{d}{dy}(kY)+\frac{d}{dz}(kZ)\right.$$
$$\left.+kX\frac{dX}{dx}+kY\frac{dX}{dy}+kZ\frac{dX}{dz}\right]dv$$
$$-\int_v\left[2kX\frac{dX}{dx}+2kY\frac{dY}{dx}+2kZ\frac{dZ}{dx}+\frac{dk}{dx}(X^2+Y^2+Z^2)\right]dv.$$

Et, comme on a

$$(5)\quad \frac{d}{dx}(kX)+\frac{d}{dy}(kY)+\frac{d}{dz}(kZ)=0\quad \frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}=0\quad \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}=0$$

la valeur de Φ_x se réduit à

$$(6)\qquad \Phi_x=-\frac{1}{8\pi}\int_v \frac{dk}{dx}(X^2+Y^2+Z^2)dv.$$

Si l'on prend un volume v infiniment petit, la force Φ_x que nous désignerons alors par $\Delta\Phi_x$ se réduit à un élément de cette intégrale ; on a

$$\Delta\Phi_x=-\frac{dk}{dx}\frac{F^2}{8\pi}dv.$$

φ_x, φ_y, φ_z étant les composantes de la force électrique $\bar{\varphi}$ qui s'exerce sur l'unité de volume, au point x, y, z on aura aussi

$$\Delta\Phi_x = \varphi_x dv.$$

On en déduit pour ces trois composantes de la force φ

$$\varphi_x = -\frac{dk}{dx}\frac{F^2}{8\pi}, \quad \varphi_y = -\frac{dk}{dy}\frac{F^2}{8\pi} \quad \varphi_z = -\frac{dk}{dz}\frac{F^2}{8\pi}. \tag{7}$$

Et la force $\bar{\varphi}$ elle-même sera représentée par l'équation géométrique [1]

$$\bar{\varphi} = -\frac{\overline{dk}}{dn}\frac{F^2}{8\pi}. \tag{8}$$

$\frac{dk}{dn}$ est la dérivée du pouvoir inducteur par rapport à la normale à la surface $k =$ constante passant par le point x, y, z. La force $\bar{\varphi}$ est un vecteur dirigé suivant cette normale, dans le sens où le pouvoir inducteur va en décroissant. Elle n'existe que dans un milieu hétérogène. Si le diélectrique M′ est homogène, ses éléments de volume ne sont soumis à aucune force électrique ; c'est ce qui arrive, et devait être, pour le milieu fluide contenant les diélectriques solides.

6. — VARIATION DE LA FORCE ÉLECTRIQUE A LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX CORPS

Les forces électriques qui agissent sur un noyau N′, se composent donc de forces $\bar{\varphi}dv$ s'exerçant sur les éléments de volume du noyau et de forces $\bar{P}d\omega'$ s'exerçant sur les éléments de la surface de discontinuité ω', qui sépare ce noyau du diélectrique environnant.

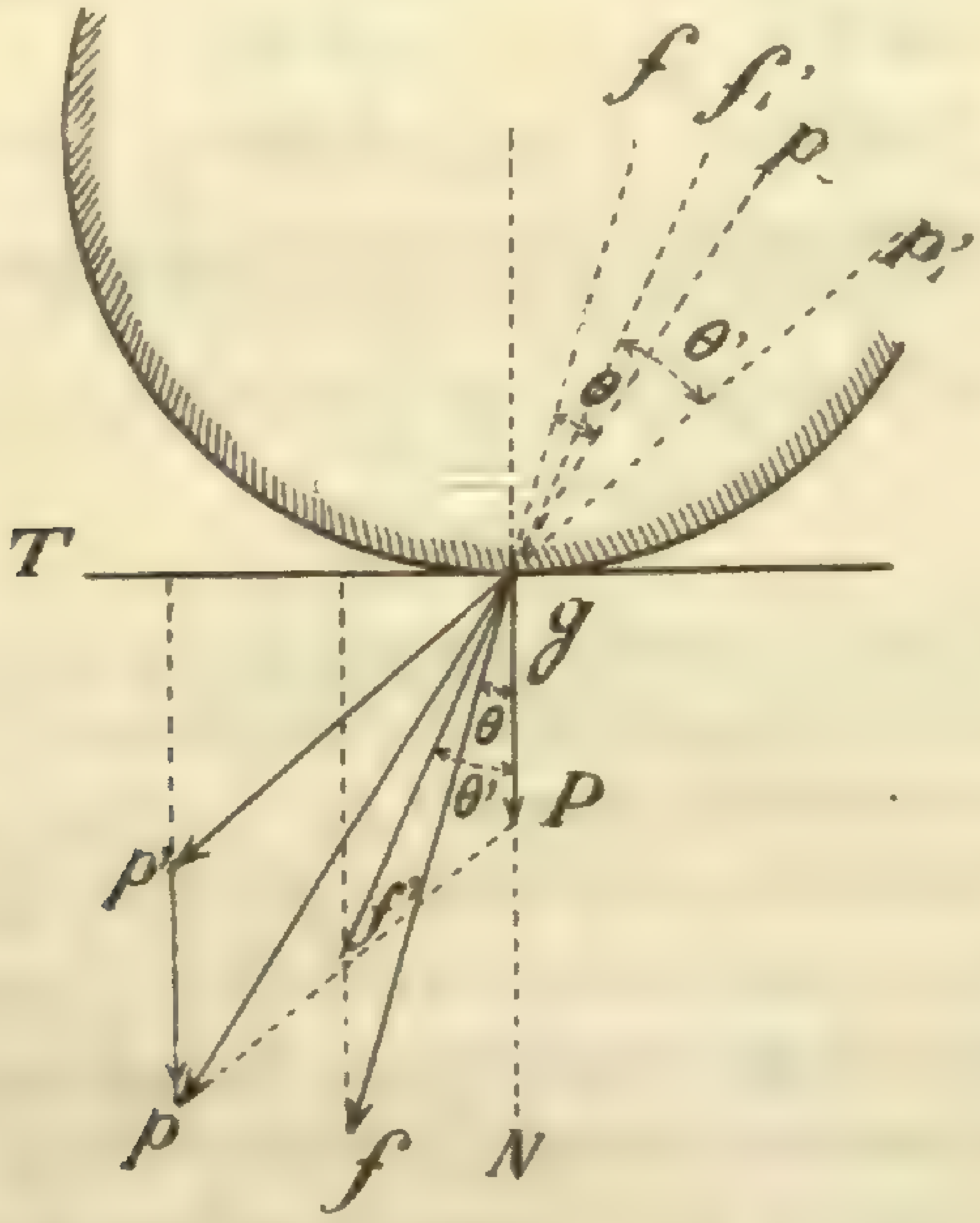
La force $\bar{P}$ est la différence géométrique des deux vecteurs

$$\bar{p} = \frac{kF^2}{8\pi} \quad \bar{p'} = \frac{k'F'^2}{8\pi}$$

---

[1] Voir Vaschy, *loc. cit.*, pp. 66 à 68. Nos formules diffèrent de celles de ce savant, parce que nous supposons le champ stable, et que nous admettons la relation (4) du Chap. précédent (formules (5) ci-dessus).

représentés par gp et gp' sur la figure : k et k' sont les pouvoirs inducteurs de part et d'autre de la surface ω', k à l'extérieur et k' à l'intérieur, sur l'élément $d\omega'$. F et F', gf et gf' sont les intensités du champ sur les faces correspondantes de l'élément $d\omega'$. Ces intensités font respectivement avec la normale gN dirigée à l'extérieur, des angles θ et θ'.



Les projections P_n et P_t de la force $\overline{P}$ sur la normale gN et sur le plan tangent en g sont

$$P_n = p \cos 2\theta - p' \cos 2\theta'$$
$$P_t = p \sin 2\theta - p' \sin 2\theta'$$

Mais, en vertu des relations (1) et (2) du Chap. VI, on a

$$p \sin 2\theta = \frac{k\mathrm{F}^2 \sin\theta\cos\theta}{4\pi} = \frac{k'\mathrm{F}'^2 \sin\theta'\cos\theta'}{4\theta} = p' \sin 2\theta'.$$

Et, par suite, $P_t = 0$. La force P à laquelle est soumise la surface de séparation ω' est normale à celle-ci, et sa valeur suivant gN est

$$\mathrm{P} = \frac{k\mathrm{F}^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{8\pi} - \frac{k'\mathrm{F}^{2'}(\cos^2\theta' - \sin^2\theta')}{8\pi}$$

Ou, eu égard aux relations (1) et (2) du Chap. VI (1),

$$P = \frac{k' - k}{8\pi} FF' \cos(\theta - \theta'). \tag{9}$$

7. — AUTRES FORMES DE LA FORCE ÉLECTRIQUE

La première des formules (3) peut se mettre sous la forme

$$p_x = \frac{k}{2}\left(X\frac{lX + mY + nZ}{4\pi} + Y\frac{mX - lY}{4\pi} - Z\frac{lZ - nX}{4\pi}\right)$$

soit, d'après les notations (14) et (15) du Chap. IV,

$$p_x = \frac{k}{2}(X\sigma + Y\tau_z - Z\tau_y). \tag{10}$$

D'après les formules (26) du Chap. IV, (6) du Chap. VI, on voit que les projections de $\overline{p}$ sur les trois axes deviennent, p_y et p_z se déduisant de p_x par permutations circulaires des lettres X, Y, Z, x, y, z,

$$\left\{\begin{aligned} p_x &= \frac{1}{2}(XI + YJ_z - ZJ_y) \\ p_y &= \frac{1}{2}(YI + ZJ_x - XJ_z) \\ p_z &= \frac{1}{2}(ZI + XJ_y - YJ_x). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Ces composantes de l'action qui s'exerce au point g par unité de surface, peuvent être remplacées par la résultante p mise sous une forme géométrique qui sera équivalente à la forme (4). On peut, d'abord, remplacer les composantes $\frac{1}{2}$ XI, $\frac{1}{2}$ YI, $\frac{1}{2}$ ZI par leur résultante $\frac{1}{2}\,\overline{F}I$, et y ajouter la résultante des trois composantes $\frac{1}{2}(YJ_z - ZJ_y)$, $\frac{1}{2}(ZJ_x - XJ_z)$, $\frac{1}{2}(XJ_y - YJ_x)$.

---

(1) Vaschy, *loc. cit.*, p. 133.

Cette dernière résultante est à la fois perpendiculaire à $\overline{\mathrm{F}}$ et à $\overline{\mathrm{J}}$; car on a identiquement

$$\mathrm{X}(\mathrm{YJ}_z - \mathrm{ZJ}_y) + \mathrm{Y}(\mathrm{ZJ}_x - \mathrm{XJ}_z) + \mathrm{Z}(\mathrm{XJ}_y - \mathrm{YJ}_x) = 0$$

$$\mathrm{J}_x(\mathrm{YJ}_z - \mathrm{ZJ}_y) + \mathrm{J}_y(\mathrm{ZJ}_x - \mathrm{XJ}_z) + \mathrm{J}_z(\mathrm{XJ}_y - \mathrm{YJ}_z) = 0.$$

De plus sa grandeur est donnée en remarquant que l'on a

$$(\mathrm{YJ}_z - \mathrm{ZJ}_y)^2 + (\mathrm{ZJ}_x - \mathrm{XJ}_z)^2 + (\mathrm{XJ}_y - \mathrm{YJ}_x)^2$$
$$= (\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2)(\mathrm{J}_x{}^2 + \mathrm{J}_y{}^2 + \mathrm{J}_z{}^2) = \mathrm{F}^2\mathrm{J}^2.$$

En sorte que la force $\bar{p}$ peut se mettre sous la forme

$$(12) \qquad \bar{p} = \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{FI}} + \overline{\mathrm{FJ}}) = \frac{\overline{k\mathrm{F}^2 \cos\theta}}{8\pi} + \frac{\overline{k\mathrm{F}^2 \sin\theta}}{8\pi}$$

C'est la résultante des deux forces

$$\overline{g\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{FI}} = \frac{\overline{k\mathrm{F}^2 \cos\theta}}{8\pi}$$

$$\overline{\mathrm{MN}'} = \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{FJ}} = \frac{\overline{k\mathrm{F}^2 \sin\theta}}{8\pi}.$$

Les formules remarquables démontrées dans ce Chapitre, ont été données par Vaschy ; elles ne paraissent pas avoir attiré, comme elles le méritaient, l'attention des Physiciens. Elles sont cependant susceptibles d'être soumises au contrôle de l'expérience, et peuvent jeter quelque lumière sur des questions encore bien obscures dans les théories actuelles. Il est vrai que Vaschy, avec la base qu'il avait adoptée dans ses études sur l'électricité, et qui consistait dans la notion de l'*intensité du champ électrique*, n'a pas pu, malgré toutes les preuves qu'il a données d'une admirable sagacité, définir comment cette intensité est liée à la nature du champ. C'est ainsi qu'il pose

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz} = 4\pi\rho$$

$$\frac{d}{dx}(k\mathrm{X}) + \frac{d}{dy}(k\mathrm{Y}) + \frac{d}{dz}(k\mathrm{Z}) = 4\pi\delta,$$

sans pouvoir préciser les corps qui jouissent de la propriété $\rho = 0$

ou $\delta = 0$. Cette incertitude rendait difficile toute vérification expérimentale.

Notre théorie a évité cet écueil. Nous avons vu que, dans tout champ stable, la quantité ρ n'est nulle que dans les parties homogènes du champ, et que la quantité δ est *toujours* nulle (Chap. VI, formule (4)), en sorte que les démonstrations comme les formules elles-mêmes ont pu être données dans des conditions physiques absolument déterminées. On va voir aux Chapitres suivants les conséquences capitales à tirer de ces formules.

CHAPITRE VIII

Les lois de Laplace et d'Ampère en électrostatique

1. — DEUX NOUVELLES LOIS D'ACTION A DISTANCE

Nous avons vu s'introduire en Électrostatique les deux lois de Newton et de Laplace, la première régissant l'action d'une masse scalaire d'électricité sur une masse de même nature, la seconde régissant l'action d'une masse vectorielle sur une masse scalaire, et que le génie de Laplace avait imaginée pour représenter l'action d'un élément de courant sur un pôle d'aimant. Deux nouvelles lois sont nécessaires pour permettre d'exprimer par des actions fictives à distance toutes les forces électriques qui s'exercent dans un champ. Ce sont les lois qui régissent l'action d'une masse scalaire sur une masse vectorielle, et l'action d'une masse vectorielle sur une masse vectorielle.

Ainsi qu'a pu le prévoir Vaschy, on peut démontrer que la force électrique $p d\omega$ (formules (3) ou (11) du Chapitre précédent) qui agit sur un élément $d\omega$ de la superficie d'un diélectrique solide, plongé dans un champ stable, est équivalente à l'action fictive de toutes les masses tant scalaires que vectorielles contenues dans le champ sur la masse scalaire et sur la masse vectorielle qui se trouvent répandues sur l'élément $d\omega$ du diélectrique considéré. Mais il importe, avant tout, de définir la loi d'action des masses scalaires, et la loi d'action des masses vectorielles, sur les masses vectorielles.

2. — LA DEUXIÈME LOI DE LAPLACE, OU LOI D'ACTION D'UNE MASSE SCALAIRE SUR UNE MASSE VECTORIELLE

La première de ces lois n'est que la loi de Laplace régissant l'action d'un pôle d'aimant sur un élément de courant, l'élément de courant étant remplacé ici par une masse vectorielle telle que nous l'avons déjà définie. D'après cela, la force $\overline{\varphi}$ exercée par une masse scalaire m, placée au point P, sur une masse vectorielle $\overline{J}$, placée au point M, est perpendiculaire au plan de la droite MP et du vecteur $\overline{J}$; elle est dirigée, d'après la règle d'Ampère, de la droite vers la gauche pour un observateur couché le long de MP, les pieds en M et regardant le vecteur $\overline{J}$. Enfin, la grandeur de cette force a pour expression

$$\varphi = \lambda \frac{mJ \sin \omega}{r^2} \tag{1}$$

r étant la distance MP, ω l'angle de la droite MP et du vecteur $\overline{J}$, et λ l'action de l'unité positive de masse scalaire sur l'unité de masse vectorielle à l'unité de distance, quand la masse vectorielle est perpendiculaire à la droite MP. La valeur de λ sera toujours $\frac{1}{k}$, k étant le pouvoir inducteur au point P. On voit par là que les actions mutuelles que les masses électriques placées en M et P exercent l'une sur l'autre, sont parallèles, de sens contraires, et n'ont la même valeur que quand le pouvoir inducteur est le même aux points P et M. Leurs points d'application ne sont d'ailleurs pas directement opposés. Les deux lois de Laplace ne satisfont donc pas au principe d'égalité de l'action et de la réaction ; c'est encore une raison, avec beaucoup d'autres, pour ne pas la considérer comme exprimant des actions réelles.

3. — LA LOI D'AMPÈRE, OU LOI D'ACTION RÉCIPROQUE DE DEUX MASSES VECTORIELLES L'UNE SUR L'AUTRE

La dernière loi qu'il nous reste à formuler, et qui régit les forces électriques s'exerçant entre masses vectorielles, est la loi d'Ampère qui régit l'action réciproque de deux éléments de courant l'un sur l'autre. D'après cela, la grandeur de la force φ exercée par une masse vectorielle $\bar{J}$, placée au point M sur une autre masse vectorielle $\bar{J}_0$, placée au point M_0, est exprimée par la formule

$$(2) \qquad \varphi = \lambda \frac{JJ_0}{r^2}\left(2\cos(\bar{J}, \bar{J}_0) - 3\cos(\bar{J}, \bar{r})\cos(\bar{J}_0, \bar{r})\right).$$

λ est un coefficient positif égal à $\frac{1}{k}$, k étant le pouvoir inducteur en M ; $\bar{r}$ représente le vecteur M_0M. La force φ est attractive ou répulsive, et dirigée dans le sens de ce vecteur ou dans le sens opposé, suivant qu'elle est positive ou négative.

Les actions mutuelles que les masses vectorielles placées en M et M_0 exercent l'une sur l'autre, sont donc directement opposées, et satisfont même au principe d'égalité de l'action et de la réaction, quand les coefficients k et k', affectant respectivement les points et M et M_0, sont égaux ; mais ce principe sera en défaut dans les applications que nous aurons à faire de la loi hypothétique d'Ampère, en Électrostatique, toutes les fois qu'il y aura à considérer l'action réciproque de masses vectorielles élémentaires situées en deux points du champ où les pouvoirs inducteurs sont différents.

Si les vecteurs $\bar{J}$ et $\bar{J}_0$ sont rapportés à trois axes de coordonnées, et si, pour simplifier, on suppose le vecteur J_0 à l'origine, sa direction étant la direction des x positifs, on aura, x, y, z étant les coordonnées de l'origine du vecteur J, et J_x, J_y, J_z ses composantes suivant les trois axes

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{JJ_0}{kr^2}\left(2\frac{J_x}{J} - 3\frac{x}{r}\,\frac{xJ_x + yJ_y + zJ_z}{rJ}\right) \\ &= \frac{J_0}{kr^2}\left(2J_x - 3\frac{x}{r}\,\frac{xJ_x + yJ_y + zJ_z}{r}\right) \end{aligned} \right.$$

ou encore, avec les notations (6) du Chap. V

$$(4) \qquad \varphi = \frac{J_0}{r^2}\left(2\tau_x - 3\frac{x}{r}\,\frac{x\tau_y + y\tau_y + z\tau_z}{r}\right).$$

Et les projections de la force φ sur les trois axes seront

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_x &= \frac{J_0 x}{r^3}\left(2\tau_x - \frac{3x\,(x\tau_x + y\tau_y + z\tau_z)}{r^2}\right) \\ \varphi_y &= \frac{J_0 y}{r^3}\left(2\tau_x - \frac{3x\,(x\tau_x + y\tau_y + z\tau_z)}{r^2}\right) \\ \varphi_z &= \frac{J_0 z}{r^3}\left(2\tau_x - \frac{3x\,(x\tau_x + y\tau_y + z\tau_z)}{r^2}\right). \end{aligned} \right.$$

4. — FORCE EXERCÉE SUIVANT LES QUATRE LOIS D'ACTION A DISTANCE SUR UN POINT CHARGÉ D'UNE MASSE SCALAIRE ET D'UNE MASSE VECTORIELLE

Considérons maintenant une partie quelconque de l'un des champs étudiés au Chapitre VI, et limitée par une surface fermée Ω, cette partie pouvant contenir des cavités. Dans le volume v ainsi défini, duquel il faut toujours exclure les espaces occupés par les conducteurs, se trouvent des masses scalaires et des masses vectorielles d'électricité, les premières distribuées sur les limites du volume v, ou sur les surfaces de discontinuité, ou encore dans les régions hétérogènes du champ (masses cubiques), les secondes distribuées sur les limites du volume v et sur les surfaces de discontinuité seulement.

Soit F_0 (X_0, Y_0, Z_0) l'intensité du champ en un point M_0 pris à une certaine distance de la surface Ω et des surfaces de discontinuité. Supposons transportées en ce point par la pensée deux masses arbitraires d'électricité, une masse scalaire I_0 et une masse vectorielle $\overline{J}_0$, cette dernière étant, comme il arrive toujours en électricité, perpendiculaire à l'intensité F_0. Nous disons que si toutes les masses électriques contenues dans la partie considérée du champ agissaient sur les deux masses concentrées en M_0, suivant la loi de Newton, les deux lois de Laplace, et la loi d'Ampère, la force φ exercée sur ce point serait représentée par la formule symbolique

$$(6)\qquad \overline{\varphi} = \overline{F}_0\, I_0 + F_0 \overline{J}_0$$

et serait la résultante de deux forces : $\overline{F}_0\, I_0$ ayant même direction que $\overline{F}_0$, et $F_0\, J_0$ ayant une direction perpendiculaire au plan des vecteurs $\overline{F}_0$ et $\overline{J}_0$.

Observons d'abord que le vecteur $\overline{F_0 I_0}$ n'est, d'après ce qui a été déjà démontré au Chap. VI, que la résultante des actions exercées sur la masse scalaire I_0 par toutes les masses tant scalaires que vectorielles contenues dans la partie considérée du champ. Il reste donc à établir que le vecteur F_0J_0 représente bien la résultante des actions exercées par les mêmes masses scalaires et vectorielles sur la masse vectorielle $\overline{J_0}$.

Désignons par L, M, N, les trois projections du vecteur $\overline{F_0J_0}$ respectivement sur les trois axes *ox, oy, oz* ; nous aurons, J_{ox}, J_{oy}, J_{oz} étant les projections du vecteur J_0 sur les mêmes axes

$$\begin{aligned} L &= Y_0 J_{oz} - Z_0 J_{oy} \\ M &= Z_0 J_{ox} - X_0 J_{oz} \\ N &= X_0 J_{oy} - Y_0 J_{ox}. \end{aligned}$$

Transportons dans ces équations les valeurs de X_0, Y_0, Z_0 qu'on tire de la formule (9), Chap. VI, on aura pour la valeur de N, par exemple

$$\begin{aligned} N = \int_v \frac{D}{k}\left(J_{oy}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} - J_{ox}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right)dv + \int_\Omega \frac{I}{k}\left(J_{oy}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} - J_{ox}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right)d\Omega \\ + \int_\Omega \left[J_{oy}\left(\frac{J_z}{k}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} - \frac{J_y}{k}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right) - J_{ox}\left(\frac{J_x}{k}\frac{d\frac{1}{r}}{dz} - \frac{J_z}{k}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right)\right]d\Omega \end{aligned}$$

Les valeurs de L et de M se tirent de cette expression par des permutations circulaires des lettres *x, y, z*.

On voit facilement que les deux premières intégrales ci-dessus ne représentent autre chose que la projection sur l'axe des *z* de la résultante des actions exercées sur la masse vectorielle J_0 par toutes les masses scalaires tant cubiques que superficielles qui sont répandues dans la partie considérée du champ, ces actions obéissant à la deuxième loi de Laplace que traduit la formule (1), donnée plus haut. Nous sommes donc ramenés à démontrer que la troisième intégrale, et les deux autres qu'on en tire par permutations circulaires sont les projections respectives sur l'axe des *z*, l'axe des *x* et l'axe des *y*, de la résultante des actions exercées, suivant la loi d'Ampère, par les masses vectorielles du champ sur la masse vectorielle $\overline{J_0}$.

Désignons par f_z l'expression placée sur le signe $\int_\Omega$, dans la troisième intégrale ci-dessus, et par f_x, f_y celles qu'on en tire successivement par permutations circulaires des lettres x, y, z : enfin, pour simplifier la démonstration qu'il nous reste à donner, supposons l'origine des coordonnées à l'origine M_0 du vecteur $\overline{J_0}$, la direction positive de l'axe des x étant la direction du vecteur $\overline{J_0}$, en sorte que nous aurons $J_{ox} = J_0$, $J_{oy} = 0$, $J_{oz} = 0$. Les expressions de f_x, f_y, f_z deviendront

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= J_0 \left(\frac{J_y}{k} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - \frac{J_x}{k} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) \\ f_z &= -J_0 \left(\frac{J_x}{k} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} - \frac{J_z}{k} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \right) \end{aligned} \right.$$

ou, en observant que

$$J_x = k\tau_x \qquad J_y = k\tau_y \qquad J_z = k\tau_z$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = -\frac{x}{r^3} \quad \frac{d\frac{1}{r}}{dy} = -\frac{y}{r^3} \quad \frac{d\frac{1}{r}}{dz} = -\frac{z}{r^3}$$

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= \frac{J_0}{r^3} (y\tau_x - x\tau_y) \\ f_z &= \frac{J_0}{r^3} (z\tau_x - x\tau_z). \end{aligned} \right.$$

Si les trois valeurs f_x, f_y, f_z étaient respectivement identiques aux trois valeurs de φ_x, φ_y, φ_z, données par les équations (5), le théorème serait démontré. Cette identité n'existe pas : mais en choisissant convenablement les trois fonctions U, V et W, on peut poser

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} f_x + J_0 U &= \varphi_x \\ f_y + J_0 V &= \varphi_y \\ f_z + J_0 W &= \varphi_z. \end{aligned} \right.$$

Et le théorème sera encore démontré, si les fonctions U, V et W sont telles que l'on ait

$$(10) \qquad \int_\Omega \mathrm{U}\,d\Omega = 0 \quad \int_\Omega \mathrm{V}\,d\Omega = 0 \quad \int_\Omega \mathrm{W}\,d\Omega = 0.$$

Or, on tire des équations (5), (8) et (9)

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{2x\tau_x}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}(x\tau_x + y\tau_y + z\tau_z) \\ \mathrm{V} &= \frac{y\tau_x + x\tau_y}{r^3} - \frac{3xy}{r^5}(x\tau_x + y\tau_y + z\tau_z) \\ \mathrm{W} &= \frac{z\tau_x + x\tau_z}{r^3} - \frac{3xz}{r^5}(x\tau_r + y\tau_y + z\tau_z) \end{aligned} \right.$$

Ces trois fonctions jouissent de la propriété énoncée. Il suffit de le démontrer pour les deux premières, en raison de la symétrie qui existe entre la seconde et la troisième.

Des applications évidentes de la formule (5) du Chap. IV donnent successivement

$$\int_v \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{x}{r^3}\,\mathrm{Y}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{x}{r^3}\,\mathrm{Z}\right)\right] dv + \int_\Omega \frac{x}{r^3}(n\mathrm{Y} - m\mathrm{Z})\,d\Omega = 0$$

$$\int_v \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r^3}\,x\mathrm{Z}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r^3}\,y\mathrm{Z}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r^3}(y\mathrm{Y} - x\mathrm{X})\right)\right] dv$$
$$+ \int_\Omega \frac{1}{r^3}\Big(lx\mathrm{Z} - my\mathrm{Z} + n(y\mathrm{Y} - x\mathrm{X})\Big) d\Omega = 0$$

$$\int_v \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{r^5}(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y})\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{x^2}{r^5}(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z})\right)\right.$$
$$\left. + \frac{d}{dz}\left(\frac{x^2}{r^5}(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\right)\right] dv$$
$$+ \int_\Omega \frac{x^2}{r^5}\Big(l(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) + m(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) + n(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\Big) d\Omega = 0$$

$$\int_v \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{xy}{r^5}(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y})\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{xy}{r^5}(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z})\right)\right.$$
$$\left. + \frac{d}{dz}\left(\frac{xy}{r^5}(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\right)\right] dv$$
$$+ \int_\Omega \frac{xy}{r^5}\Big(l(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) + m(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) + n(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\Big) d\Omega = 0.$$

C'est-à-dire, en effectuant les opérations sous les signes $\int_v$ et en tenant compte des relations (15) du Chap. IV

$$3\int_v \frac{x}{r^5}(yZ - zY)\,dv + 4\pi\int_\Omega \frac{x\tau_x}{r^3}\,d\Omega = 0 \tag{12}$$

$$3\int_v \frac{x(zX - xZ) + y(yZ - zY)}{r^5}\,dv + 4\pi\int_\Omega \frac{y\tau_x + x\tau_y}{r^3}\,d\Omega = 0 \tag{13}$$

$$2\int_v \frac{x}{r^5}(yZ - zY)\,dv + 4\pi\int_\Omega \frac{x^2}{r^5}(x\tau_x + y\tau_y + z\tau_z)\,d\Omega = 0 \tag{14}$$

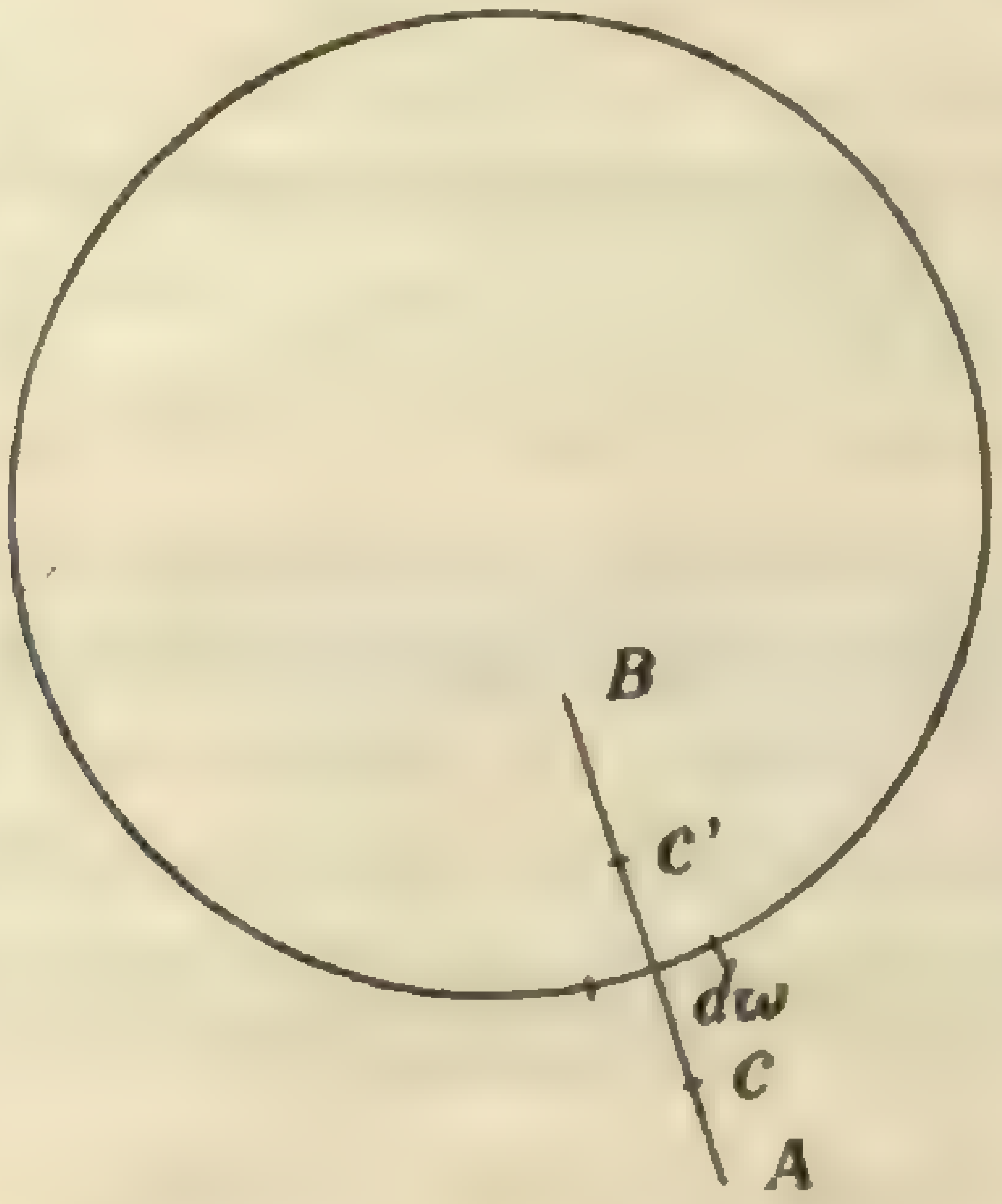
$$\int_v \frac{x(zX - xZ) + y(yZ - zY)}{r^5}\,dv + 4\pi\int \frac{xy}{r^5}(x\tau_x + y\tau_y + z\tau_z)\,d\Omega = 0. \tag{15}$$

Si l'on retranche, membre à membre, l'équation (14) multipliée par 3 de l'équation (12) multipliée par 2, on retrouve la première des équations (10) à démontrer. Si l'on retranche l'équation (15) multipliée par 3 de l'équation (13), on retrouve la deuxième des équations (10) à démontrer.

5. — LA FORCE ÉLECTRIQUE PAR UNITÉ DE SURFACE, D'APRÈS LES LOIS DE COULOMB, DE LAPLACE ET D'AMPÈRE

Le théorème qui vient d'être établi justifie l'hypothèse d'une action fictive entre les masses électriques suivant les lois de Coulomb, de Laplace et d'Ampère, car cette hypothèse traduit exactement les actions réelles exprimées par les formules (3), (4), (11) et (12) du Chapitre précédent. On va le voir par un raisonnement analogue à celui qui a permis d'établir la formule (9) du Chap. V.

Considérons une surface de discontinuité ω, limitant, par exemple, un diélectrique solide qui serait plongé dans un champ limité, lui-même, par une surface fermée Ω. Un élément $d\omega$ de la surface ω comporte, à l'extérieur, une masse scalaire I$d\omega$ et une masse vectorielle J$d\omega$ d'électricité. Sur la normale AB à l'élément $d\omega$, prenons un point C infiniment voisin et situé à l'extérieur du diélectrique solide : supposons en ce point une masse scalaire I et une masse vectorielle $\overline{J}$ d'électricité. D'après la formule (6), l'action $\overline{\varphi}$ exercée, sur ce point, par toutes les masses électriques



comprises entre les surfaces Ω et ω et agissant suivant les lois hypothétiques de Coulomb, de Laplace et d'Ampère, sera

$$\overline{\varphi} = \overline{FI} + \overline{FJ} \tag{16}$$

l'intensité du champ, au point C, à l'extérieur, étant égale, à un infiniment petit près, à l'intensité F sur l'élément $d\omega$.

La force $\overline{\varphi}$ est la résultante de la force $\overline{\varphi_1}$ exercée par toutes les masses sauf celles situées sur l'élément $d\omega$ et de la force $\overline{\varphi_2}$ exercée par ces dernières elles-mêmes : et on a

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_2}.$$

La force exercée sur le point C', pris sur la normale AB, à la même distance de l'élément $d\omega$, mais du côté opposé, et chargé des mêmes masses que le point C, est nulle ; car dans la formule (16) l'intensité F doit être prise égale à zéro, d'après les identités (9) et (16) du Chap. IV. Cette force est encore la résultante des actions décomposées comme il vient d'être dit pour le point C. La force $\overline{\varphi_1}$ n'a pas sensiblement changé, la force $\overline{\varphi_2}$ a simplement changé de sens. On a donc

$$\overline{\varphi_1} - \overline{\varphi_2} = 0.$$

D'où l'on tire

$$\overline{\varphi}_1 = \varphi_2 = \frac{\varphi}{2}.$$

La force $\frac{\overline{\varphi}}{2}$ exercée sur la masse scalaire I et sur la masse vectorielle J, fixées au point C ou au point C′, par toutes les masses électriques sauf par celles situées sur l'élément $d\omega$, est évidemment, par raison de continuité, la même que si le point C ou C′ se transportait sur l'élément $d\omega$; d'où résulte que l'action exercée suivant les lois de Coulomb, de Laplace et d'Ampère, par toutes les masses électriques comprises entre les surfaces Ω et ω sur les masses superficielles que comporte l'élément $d\omega$ est

$$\frac{\overline{\varphi}}{2}\,d\omega = \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{FI}} + \overline{\mathrm{FJ}})d\omega.$$

C'est justement, d'après la formule (12) du Chapitre précédent, la force électrique réellement exercée sur cet élément.

6. — LOIS, EN NOMBRE INFINI, QUI PEUVENT REMPLACER LA LOI D'AMPÈRE

La loi d'Ampère n'est pas la seule qui, jointe à celles de Coulomb et de Laplace, donne une interprétation mécanique de l'action électrique exercée sur les corps contenus dans un champ. On peut substituer à la force imaginée par Ampère pour représenter l'action réciproque de deux masses vectorielles, toute force φ définie par les équations (9) et (10) : les fonctions U, V et W ne sont astreintes qu'aux conditions (10), et il y a une infinité de manières de les choisir. On peut donc substituer à la loi d'Ampère une infinité d'autres lois.

Une première solution consiste à supposer les trois fonctions U, V et W identiquement nulles, et la force $\overline{\varphi}$ se réduit alors à la force f définie par les équations (8) ; son interprétation est assez compliquée. On voit cependant que cette force est la projection dans le plan des yz, c'est-à-dire, dans un plan perpendiculaire au vecteur $\overline{J_0}$, de la force exercée sur une masse *scalaire* J_0 par la masse vectorielle τ, cette projection ayant tourné d'un angle droit dans le sens de l'axe des z vers l'axe des y, c'est-à-dire, dans le sens que donne la règle d'Ampère, pour un observateur placé le long du vecteur $\overline{J_0}$, les pieds à l'origine du vecteur.

On peut donner de la force $\bar{f}$ une définition peut-être plus simple, en la considérant comme la différence géométrique de deux forces $\overline{f_1}$ et $\overline{f_2}$. Il suffit pour cela d'observer que la composante nulle f_x peut se mettre sous la forme

$$f_x = \frac{J_0}{r^3}(x\tau_x - x\tau_x).$$

La force f apparaît alors comme la différence des deux forces dont il s'agit.

Les composantes de la première f_1 sont

$$\frac{J_0\tau_x}{r^2}\frac{x}{r} \qquad \frac{J_0\tau_x}{r^2}\frac{y}{r} \qquad \frac{J_0\tau_x}{r^2}\frac{z}{r}$$

en sorte que cette force est dirigée suivant le rayon r et a pour grandeur

$$\frac{J_0\tau_x}{r^2} = \frac{J_0\tau}{r^2}\cos(J_0,\tau).$$

Les composantes de la force f_2 sont

$$\frac{J_0 x}{r^3}\tau_x \qquad \frac{J_0 x}{r^3}\tau_y \qquad \frac{J_0 x}{r^3}\tau_z$$

cette force est dirigée suivant le vecteur $\bar{\tau}$ et a pour grandeur

$$\frac{J_0\tau}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{J_0\tau}{r^2}\cos(J_0,r)$$

et l'on a

$$f = f_1 - f_2 = \overline{\frac{J_0\tau}{r^2}\cos(J_0,\tau)} - \frac{J_0\bar{\tau}}{r^2}\cos(J_0,r).$$

La force f_2, pas plus que la force f, ne satisfait au principe d'égalité de l'action et de la réaction. La force f_1 y satisfait, quand le pouvoir inducteur est le même aux points d'application des masses vectorielles agissantes.

Parmi les autres lois qui peuvent remplacer la loi d'Ampère nous citerons la loi de Reynard qu'avait indiquée Ampère lui-même et la loi de Grassmann, sur lesquelles il paraît inutile d'insister ici.

Il est permis de prévoir, dès à présent, que l'application de ces lois d'action fictive à distance au dernier cas signalé dans le Chapitre VI, conduira rigoureusement, en Électrodynamique, à la loi fondamentale d'Ampère sur l'action réciproque de deux éléments de courant, et en Électromagnétisme, aux deux lois de Laplace sur l'action réciproque entre un pôle d'aimant et un élément de courant, quand se seront dévoilés à nos yeux les liens étroits qui unissent les phénomènes magnétiques aux phénomènes électriques.

7. — CONDITION D'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE DANS UN CHAMP UNIFORME

La conception des actions fictives à distance, suivant les lois de Coulomb, de Laplace et d'Ampère, est souvent utile pour la démonstration de certains théorèmes. Elle permet, par exemple, d'établir d'une façon simple, qu'un corps solide conducteur ou isolant, et même hétérogène, ne peut se trouver en équilibre électrique, dans un champ indéfini homogène et uniforme, que si sa charge est nulle. Dans ce dernier cas, le corps ne sera sollicité par aucune force de translation, et n'obéira qu'à l'action d'un couple qui lui fera prendre une orientation déterminée.

Imaginons donc le transport d'un semblable corps, considéré comme un solide invariable, dans un champ uniforme d'intensité $\overline{F}$. Nous pouvons supposer ce champ limité entre deux plans parallèles et conducteurs, assez éloignés pour que leurs distances respectives à un point quelconque du solide, puissent être considérées comme infinies.

Ce corps étant maintenu par des liaisons dans une position fixe, sera sollicité dans le champ stable qui se sera établi, par des forces électriques que l'on peut réduire à une résultante de translation et à un couple. La résultante de translation est la somme géométrique des forces exercées sur la masse scalaire et sur la masse vectorielle que comporte, à l'extérieur, chaque élément superficiel du solide, d'une part par les masses scalaires répandues aux limites du champ, et d'autre part par les masses tant scalaires que vectorielles répandues sur le reste de ce solide.

On peut faire abstraction dans la formation de cette somme géométrique, de toutes les composantes élémentaires qui, deux à deux, sont égales et de sens opposés. Tel est le cas des forces qui résultent d'actions réciproques entre toutes les masses tant vectorielles que scalaires qui se trouvent répandues sur le solide invariable. La somme des masses vectorielles est nulle : elle est donc composée de masses élémentaires égales et de sens contraires qui subissent des actions égales en grandeur mais de sens opposés de la part de chaque masse scalaire rejetée à l'infini et fixée sur un élément superficiel des limites du champ. Il suffit donc de ne tenir compte que de l'action des masses scalaires, situées aux limites du champ, sur les masses de même nature que comporte la surface extérieure du solide.

L'action de l'ensemble des premières masses sur une masse scalaire élémentaire dm, prise en un point quelconque dans la région du corps solide, est représentée en grandeur, direction et sens par le vecteur Fdm. La résultante de translation que nous cherchons est donc représentée en grandeur, direction et sens par le vecteur Fm, m étant la charge du corps solide. Si cette charge est nulle, le corps n'est plus soumis qu'à un couple directeur.

POTENTIEL
DU
TEMPS DE PARCOURS

PAR

HATON DE LA GOUPILLIÈRE
MEMBRE DE L'INSTITUT, INSPECTEUR GÉNÉRAL DES MINES
GRAND OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR

§ 1

GÉNÉRALITÉS

1. La Géométrie des masses (¹) comprend trois théories fondamentales : celles des centres de gravité, des moments d'inertie et du potentiel. Elles procèdent uniformément d'après l'étude d'une intégrale définie

$$V = \sum m\varphi(x, y, z), \tag{1}$$

étendue à tous les éléments matériels m, de coordonnées x, y, z, qui composent un corps quelconque. L'expression φ est la *fonction caractéristique* de chacune de ces théories.

On donne à la somme (1) le nom de *potentiel* lorsque sa fonction caractéristique dépend uniquement de la distance r de chaque élément m à un point fixe

$$V = \sum m\varphi(r).$$

(¹) Haton de la Goupillière, *La Géométrie des Masses* (REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES PURES ET APPLIQUÉES, 15 juin 1893).

Si l'on envisage la dérivée $m\varphi'(r)$ comme une force $F(r)$ émanée de ce centre suivant le rayon r, et dr comme la projection sur cette droite d'un déplacement ds de la masse m, le produit $m\varphi'(r)dr$ représente le travail élémentaire dont elle est le siège. La fonction caractéristique du potentiel devient dans ces conditions l'intégrale de l'*action* exercée sur l'unité de masse.

On a par exemple pour la gravitation et le potentiel *Newtonien*

$$F(r) = \frac{1}{r^2}, \quad \varphi(r) = \frac{1}{r};$$

avec l'action proportionnelle à la distance, qui est douée d'élégantes propriétés

$$F(r) = r, \quad \varphi(r) = r^2;$$

et pour l'action en raison inverse du cube de la distance (¹)

$$F(r) = \frac{1}{r^3}, \quad \varphi(r) = \frac{1}{r^2}.$$

Nous nous rappellerons d'une manière générale que, si n désigne l'ordre d'un potentiel, l'action correspondante s'exerce en raison de la puissance $n - 1$ de la distance. Il faut toutefois faire exception pour la valeur $n = 0$, car l'intégration de $\frac{1}{r}$ donne alors un logarithme.

On a pu remarquer que nous faisons abstraction en cette occasion de facteurs numériques d'intégration. Il est en effet à peu près indifférent, pour les usages généraux du potentiel, de tenir compte ou non des constantes qui viennent le multiplier ou s'y ajouter. Rien de plus facile que de les préciser définitivement lorsqu'auront été fixées dans chaque cas les limites d'intégration, ainsi que le choix des diverses unités.

(¹) Cette loi a été signalée par Newton au *Livre des Principes*, comme jouissant de la propriété que si l'on ajoute un semblable terme à l'expression quelconque d'une force centrale, le nouveau mouvement qui prendra naissance peut s'obtenir par la simple composition cinématique du premier avec une rotation de sa trajectoire autour du pôle, proportionnelle à celle du rayon vecteur à chaque instant (Haton de la Goupillière, *Thèse*, 1857).

2. J'ai déjà appliqué (¹) la théorie du centre de gravité et celle des moments ou axes principaux d'inertie à la notion du *temps de parcours ;* en considérant la durée qui s'écoule le long de la route d'un mobile, comme l'équivalent d'une masse répartie, d'après la lenteur ou la rapidité du mouvement, sur les éléments successifs de la trajectoire, de manière à constituer à celle-ci une densité variable. J'entreprends en ce moment la même application pour le potentiel.

Il se présente à ce sujet deux questions distinctes, selon qu'on se propose d'évaluer le *potentiel spécial* à un centre déterminé, qu'il est toujours loisible de prendre pour origine des coordonnées auxquelles on rapportera le corps ; ou bien le *potentiel général* relatif à un point arbitraire de l'espace (ξ, η, ζ), en vue par exemple d'en déduire les surfaces de niveau, ou les composantes de la force développée par le système dans ce champ.

Pour le potentiel du temps de parcours spécial à l'origine

$$(2) \qquad V = \int \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dt,$$

il suffira de remplacer dans la fonction caractéristique les coordonnées du mobile par leurs valeurs en fonction du temps, déduites des équations du mouvement, et d'effectuer l'intégration (²).

Rien n'empêche d'ailleurs, une fois le résultat obtenu, d'y substituer inversement l'expression du temps en fonction des coordonnées, afin de n'y laisser que des éléments géométriques.

Donnons-en de suite un exemple très simple.

3. J'envisage pour cela le mouvement qui a pour équations

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = \operatorname{tang} t.$$

On en déduit celles de la trajectoire

$$x = yz, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

(¹) Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto, 1906. — Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1908. — Journal de l'École polytechnique, 2ᵉ série, 13ᵉ cahier.

(²) Bien entendu, l'on pourra, si cela est plus avantageux, remplacer t et dt en fonction de x et dx, ou de l'une des autres coordonnées, ou encore d'une variable auxiliaire quelconque.

Ce déplacement s'effectue donc périodiquement, d'un infini à l'autre, sur la quartique fournie par l'intersection d'un paraboloïde hyperbolique équilatère et du cylindre de révolution qui est décrit autour d'une perpendiculaire à son axe, élevée en son sommet dans l'un de ses plans directeurs.

On aura comme fonction caractéristique du potentiel Newtonien spécial à l'origine

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+\operatorname{tang}^2 t}} = \cos t,$$

et pour la valeur de ce potentiel du temps de parcours

$$V_{-1} = \int_{\sigma}^{t} \cos t\,dt = \sin t = x.$$

§ 2

LOI DES AIRES

4. Pour définir le mouvement, nous adopterons en premier lieu la *loi des aires ;* soit que le mobile se trouve *assujetti* a priori sur une courbe donnée, sous l'empire de forces appropriées et d'une composante normale de liaison ; soit qu'il décrive au contraire *librement* sa trajectoire par l'effet de la force centrale toute spéciale qui en est capable, et qui est alors fournie par la formule de Binet.

Dans l'un et l'autre cas, l'action statique qui sert à définir le potentiel dont nous entreprenons l'évaluation, reste tout à fait indépendante de la nature des forces motrices. Celles-ci ne sauraient s'y confondre à l'occasion qu'à titre particulier, lorsque nous le jugerons à propos.

Le temps dt étant en raison de l'aire $\frac{1}{2}r^2 d\theta$, nous pouvons adopter pour sa mesure le produit $r^2 d\theta$; puisque nous nous sommes accordé, dans un but de simplification, la faculté de faire au besoin abstraction de certains facteurs constants, pour ces évaluations qui sont essentiellement proportionnelles. Le potentiel du temps de parcours devient ainsi

$$(3) \qquad V = \int r^2 \varphi(r) d\theta.$$

5. Signalons tout d'abord, d'une manière spéciale, l'action inversement proportionnelle au cube de la distance. La fonction caractéristique φ étant alors $\frac{1}{r^2}$, le potentiel V_{-2} du temps de parcours se réduit à θ. *Il est donc égal à l'angle de rotation du rayon vecteur, quelle que soit la trajectoire sur laquelle est assujetti le mobile.*

6. Pour l'action qui s'exerce en raison inverse de la quatrième puissance de la distance $\left(\varphi = \frac{1}{r^3}\right)$, le potentiel devient

$$V_{-3} = \int \frac{d\theta}{r}.$$

Prenons comme exemple le mouvement elliptique effectué suivant la loi des aires par rapport au foyer

$$r = \frac{1}{1 + e\cos\theta},$$

$$V_{-1} = \int_\sigma^\theta (1 + e\cos\theta) d\theta = \theta + e\sin\theta.$$

7. Avec la loi de gravitation, φ prend pour valeur $\frac{1}{r}$, et le potentiel Newtonien

$$V_{-1} = \int r d\theta.$$

Le mouvement précédent devient alors *libre*, sous l'empire de cette action. C'est celui des planètes ; et il nous donne

$$V_{-1} = \int_\sigma^\theta \frac{d\theta}{1 + e\cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctang}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right).$$

On aurait par exemple pour la demi-ellipse

$$\theta = \pi, \quad V_{-1} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}},$$

et une valeur double avec la révolution complète.

8. Considérons maintenant le potentiel d'ordre quelconque n (correspondant à l'action suivant la puissance $n - 1$ de la distance)

$$V_n = \int r^{n+2} d\theta.$$

J'envisagerai comme exemple la famille des *spirales algébriques* d'ordre quelconque k : entier, fractionnaire ou incommensurable, positif ou négatif

$$(4) \qquad r = \theta^k,$$

$$V_n = \int \theta^{(n+2)k} d\theta,$$

$$\Big[(n+2)k + 1\Big] V_n = \theta^{(n+2)k+1} = r^{n+2+\frac{1}{k}}.$$

Il faut toutefois exclure de cette formule l'hypothèse particulière

$$n + 2 + \frac{1}{k} = 0,$$

car l'intégration donne alors Log θ. Dans ce cas spécial, l'action procède, pour chaque ordre k de spirales, suivant la puissance

$$n - 1 = -\left(\frac{1}{k} + 3\right),$$

de la distance. Ce serait par exemple la gravitation avec la spirale hyperbolique ($k = -1$) ; l'action en raison inverse de la quatrième puissance de la distance pour celle d'Archimède ($k = 1$) ; de la cinquième pour la spirale de Fermat $\left(k = \frac{1}{2}\right)$, de la première avec le *lituus* de Côtes $\left(k = -\frac{1}{2}\right)$.

Si nous rentrons dans le cas général, nous aurons par exemple pour le potentiel Newtonien ($n = -1$) d'une spirale quelconque

$$(k+1)\,V_{-1} = r^{\frac{1}{k}+1},$$

ou pour un ordre arbitraire n, avec la spirale d'Archimède en particulier ($k = 1$)

$$(n+3)\,V_n = r^{n+3}.$$

9. Considérons en second lieu la famille des *spirales sinusoïdes* d'ordre quelconque k

$$r^k = \cos k\theta, \tag{5}$$

$$kV_n = \int \cos^{\frac{n+2}{k}} k\theta\, d(k\theta).$$

L'intégration s'effectuera en termes finis toutes les fois que $n+2$ sera un multiple positif ou négatif de k.

Soit par exemple le cercle passant au pôle ($k = 1$), avec le potentiel Newtonien ($n = -1$)

$$V_{-1} = \int_0^\theta \cos\theta\, d\theta = \sin\theta.$$

Pour l'hyperbole équilatère rapportée à son centre ($k = 2$), et le potentiel de l'action proportionnelle à la distance ($n = 2$), à laquelle il appartient précisément de faire décrire *librement* cette trajectoire

$$2V_2 = \int_0^\theta \cos^2 2\theta\, d(2\theta) = 2\theta + \sin 2\theta.$$

Cette classe de courbes admet comme limite la spirale logarithmique lorsque k tend vers zéro. La formule générale devient alors illusoire, mais on a directement pour

$$r = e^{A\theta}, \tag{6}$$

$$V_n = \int_{-\infty}^{\theta} r^{n+2}\, d\theta = \frac{e^{(n+2)A\theta}}{(n+2)A},$$

$$(n+2)\, AV_n = r^{n+2}.$$

10. Supposons maintenant d'une manière spéciale que le mobile décrive *librement*, suivant la loi des aires, une courbe dont nous nous donnerons l'équation sous la forme

$$\frac{1}{r} = f(\theta), \quad r = \frac{1}{f(\theta)}, \quad dr = -\frac{f'(\theta)}{f^2(\theta)}\, d\theta. \tag{7}$$

Ce ne peut être alors que sous l'empire de la force centrale, parfaitement déterminée, qui a pour valeur d'après la formule de Binet

$$f^2(\theta)\left[f(\theta) + f''(\theta)\right]. \tag{8}$$

Comme définition du potentiel, nous choisirons précisément cette même loi d'action. Sa fonction caractéristique devient dans ces conditions

$$\varphi = \int f^2(\theta)\left[f(\theta) + f''(\theta)\right] dr,$$

ou en substituant la valeur (7) de dr

$$\varphi = -\int f'(\theta)\left[f(\theta) + f''(\theta)\right] d\theta = -\frac{f^2(\theta) + f^2(\theta)}{2}. \tag{9}$$

Le potentiel du temps de parcours aura dès lors comme valeur générale

$$\begin{aligned} -2V &= \int \left[f^2(\theta) + f'^2(\theta)\right] r^2 d\theta \\ &= \theta + \int \left[\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right]^2 d\theta \\ &= \theta + \int \left(\frac{d \log r}{d\theta}\right)^2 d\theta. \end{aligned}$$

11. Reprenons, à ce nouveau point de vue, nos précédents exemples ; et d'abord les spirales algébriques (4)

$$f(\theta) = \theta^{-k}, \quad \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = -\frac{k}{\theta},$$

$$-2\mathrm{V} = \theta + \int \frac{k^2}{\theta^2}\, d\theta = \theta - \frac{k^2}{\theta}.$$

On voit que ce potentiel reste le même pour les deux valeurs de k égales et de signes contraires ; c'est-à-dire avec les spirales transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques. Nous pouvons également écrire en fonction de la distance

$$-2\mathrm{V} = r^{\frac{1}{k}} - k^2 r^{-\frac{1}{k}},$$

Il vient dans les mêmes conditions pour la spirale logarithmique (6)

$$-2\mathrm{V} = (\mathrm{A}^2 + 1)\theta,$$

et avec les spirales sinusoïdes (5)

$$-2\mathrm{V} = \theta + \int \operatorname{tang}^2 k\theta d\theta = \frac{\theta}{k} \operatorname{tang} k\theta.$$

§ 3

MOUVEMENT DES GRAVES

12. Comme seconde catégorie de mouvements, j'envisagerai celui d'un corps pesant sur une courbe assignée directement, dont nous nous donnerons l'équation sous la forme

$$x = f(y),$$

avec des ordonnées *plongeantes*.

Si l'on suppose qu'un mobile doué de l'unité de masse descende à partir du niveau y_0, avec une vitesse initiale v_0, le théorème des forces vives donnera

$$(10)\left\{\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2g(y - y_0),\\ dt &= \frac{ds}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy_0) + 2gy}}.\end{aligned}\right.$$

Nous avons d'après cela pour le potentiel Newtonien spécial à l'origine

$$\sqrt{2g}\, V_{-1} = \int dy \sqrt{\frac{1 + f'^2(y)}{\left[\left(\frac{v_0^2}{2g} - y_0\right) + y\right]\left[y^2 + f^2(y)\right]}},$$

La valeur du temps est devenue irrationnelle, tandis qu'avec la loi des aires elle était exprimée par une fonction rationnelle, et même par la plus simple de toutes. On ne saurait donc s'attendre ici aux mêmes facilités d'intégration par les moyens ordinaires: On rencontrera la plupart du temps des intégrales elliptiques ou hyperelliptiques. Cependant la question pourra encore quelquefois se maintenir, même alors, sur le terrain des fonctions élémentaires, si l'on impose certaines conditions spéciales aux données initiales. J'en présenterai quelques exemples.

13. Considérons d'abord le mouvement libre des projectiles suivant la parabole

$$x = \sqrt{y}, \quad f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

$$\sqrt{2g}\, V_{-1} = \int dy \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{4y}}{\left[\left(\frac{v_0^2}{2g} - y_0\right) + y\right](y^2 + y)}}$$

$$= \int \frac{dy}{y} \sqrt{\frac{\frac{1}{4} + y}{\left[\left(\frac{v_0^2}{2g} - y_0\right) + y\right](1 + y)}},$$

intégrale elliptique. Toutefois si l'on s'impose que les conditions initiales satisfassent à l'égalité

$$\frac{v_0^2}{2g} - y_0 = \frac{1}{4},$$

il reste simplement

$$\sqrt{2g}\,\mathrm{V}_{-1} = \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y}}.$$

Soit de même un mobile assujetti à parcourir la seconde parabole cubique

$$x^2 = y^3,\quad f(y) = y^{\frac{3}{2}},\quad f'(y) = \frac{3}{2}\sqrt{y},$$

$$\sqrt{2g}\,\mathrm{V}_{-1} = \int dy \sqrt{\frac{1+\frac{9}{4}y}{\left[\left(\frac{v_0^2}{2g} - y_0\right)+y\right](y^2+y^3)}},$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\mathrm{V}_{-1} = \int \frac{dy}{y}\sqrt{\frac{\frac{4}{9}+y}{\left[\left(\frac{v_0^2}{2g}-y_0\right)+y\right](1+y)}}.$$

Admettons que les données initiales remplissent la condition

$$\frac{v_0^2}{2g} - y_0 = \frac{4}{9},$$

il restera encore

$$\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\mathrm{V}_{-1} = \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y}},$$

c'est-à-dire le même résultat, sauf un coefficient numérique.

Cette intégrale a pour valeur

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{1+y}} = \mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{1+y}-1}{\sqrt{1+y}+1}\right).$$

Si on la prend à partir du point d'intersection de chacune des deux trajectoires par une droite menée de l'origine sous une inclinaison de 45°, il viendra

$$\int_1^y \frac{dy}{y\sqrt{1+y}} = \mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{1+y}-1}{\sqrt{1+y}+1}\right) - 2\,\mathrm{Log}\,(\sqrt{2}-1).$$

14. Après la loi de gravitation, envisageons, pour définir le potentiel, l'*action constante*. Elle donne comme potentiel du temps de parcours sur une courbe quelconque

$$\sqrt{2g}\,V_1 = \int dy \sqrt{\frac{\left[1 + f'^2(y)\right]\left[y^2 + f^2(y)\right]}{\left(\frac{v_0^2}{2g} - y_0\right) + y}}.$$

Reprenons l'exemple de la parabole semi-cubique

$$\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,V_1 = \int y\,dy \sqrt{\frac{\left(\frac{4}{9} + y\right)\left(1 + y\right)}{\left(\frac{v_0^2}{2g} - y_0\right) + y}}.$$

Le dénominateur peut, dans ce cas, être employé à faire disparaître soit l'un, soit l'autre des deux facteurs du numérateur.

Posons à cet effet en premier lieu

$$\frac{v_0^2}{2g} - y_0 = 1,$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,V_1 = \int y \sqrt{\frac{4}{9} + y}\,dy.$$

ou d'autre part

$$\frac{v_0^2}{2g} - y_0 = \frac{4}{9},$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,V_1 = \int y \sqrt{1 + y}\,dy.$$

Ces deux résultats sont compris dans la formule

$$\int y \sqrt{y + c}\,dy = \frac{2}{15}(y + c)(3y - 2c)\sqrt{y + c}.$$

Rien n'empêche plus d'ailleurs, dans le cas actuel, d'intégrer à partir de l'origine.

15. Traitons encore un exemple dans l'espace à trois dimensions. Je supposerai qu'un corps pesant descende sur un dôme sphérique en y décrivant une loxodromie.

Si α désigne l'angle constant que fait l'arc ds de cette courbe avec celui $d\lambda$ du méridien, (en appelant λ la colatitude), on a

$$ds = \frac{d\lambda}{\cos \alpha},$$

et pour l'abaissement y au-dessous du sommet

$$y = 1 - \cos \lambda.$$

Il vient donc

$$\sqrt{2g} \cos \alpha \, dt = \frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g} + \cos \lambda_0\right) - \cos \lambda}}.$$

Nous ne saurions, dans le cas actuel, laisser le pôle du potentiel à l'origine, pour laquelle tous les rayons seraient égaux. Nous le placerons à une hauteur h au-dessus de ce centre ; ce qui donne comme expression du rayon vecteur δ

$$\delta = \sqrt{h^2 + 1 - 2h \cos \lambda}. \tag{11}$$

Il vient donc pour le potentiel de l'action constante

$$\sqrt{\frac{g}{h}} \cos \alpha \, V_1 = \int d\lambda \sqrt{\frac{\frac{h^2+1}{2h} - \cos \lambda_0}{\left(\frac{v_0^2}{2g} + \cos \lambda_0\right) - \cos \lambda}},$$

c'est-à-dire encore une intégrale elliptique, sauf dans le cas spécial où nous disposerons des données initiales de la manière suivante

$$\frac{v_0^2}{2g} + \cos \lambda_0 = \frac{h^2+1}{2h}.$$

Le résultat devient alors absolument simple

$$\sqrt{\frac{g}{h}} \cos \alpha \, V_1 = \lambda.$$

§ 4

MOUVEMENT SPHÉRIQUE

16. Il est aisé d'étendre à d'autres cas l'étude du mouvement sur la sphère, rapporté à la longitude θ et à la colatitude λ. En quelque point de l'espace que l'on place le pôle du potentiel, à la distance *h* du centre, il sera permis d'y faire passer l'axe zénithal, et d'employer dès lors la formule (11).

Si nous y faisons, pour simplifier

$$\cos\lambda = \alpha, \qquad \frac{h^2+1}{2h} = \mathrm{H},$$

elle deviendra

$$\frac{\delta}{\sqrt{2}} = \sqrt{\mathrm{H} - \alpha}\,,$$

et nous aurons comme potentiel d'ordre *n*

$$(12) \qquad 2^{-\frac{n}{2}}\,\mathrm{V}_n = \int (\mathrm{H} - \alpha)^{\frac{n}{2}}\,dt,$$

expression que l'on intégrera en remplaçant α en fonction de *t* d'après les équations du mouvement.

17. Il peut se présenter à cet égard une circonstance singulière qui mérite d'attirer l'attention.

Supposons qu'au lieu de fournir, pour poser le problème, outre l'équation de la sphère $r = 1$, deux autres relations entre λ, θ et *t*, l'on fasse connaître d'une part l'équation de la trajectoire entre λ et θ, et, pour définir le mouvement, une formule unique entre *t* et λ (c'est-à-dire α), à l'exclusion de θ. Le calcul s'effectuera dans ces conditions à l'aide de cette seule égalité, sans aucun recours à l'équation de la courbe, puisque nous n'avons nul besoin de lui emprunter l'expression de la longitude θ, qui ne figure pas dans (12). Il s'ensuit que *le potentiel reste alors le même pour toutes les trajectoires possibles*, quand on leur adjoint individuellement cette même équation du mouvement en latitude.

Inversement une courbe déterminée possède une infinité de potentiels distincts, lorsqu'on la fait parcourir suivant diverses lois de mouvement en latitude.

Une semblable singularité appartiendra également à tout autre système de coordonnées qui serait constitué de telle sorte, qu'une seule de ses variables figure dans l'expression de la distance δ du mobile au pôle du potentiel.

A ce titre, on la rencontre au premier chef dans le système polaire de la géométrie plane (r, θ), pour lequel δ n'est autre que r lui-même. Au contraire, elle ne saurait se produire avec les coordonnées rectangulaires, chez lesquelles la valeur de δ renferme à la fois les deux variables. Lors même en effet que l'on définirait le mouvement par une relation entre une seule d'entre elles et le temps, il n'en faudrait pas moins chercher la seconde dans l'équation de la trajectoire, afin de la substituer dans l'expression générale du potentiel.

18. Considérons comme application l'*ellipse sphérique*, c'est-à-dire la courbe telle que la somme des arcs de grand cercle qui joignent chacun de ses points à deux pôles fixes reste constante. Désignons cette somme par $2a$, et par $2c$ la distance mutuelle des pôles, que je placerai dans le premier méridien, à égales distances du zénith. Si nous faisons usage des coordonnées bipolaires, la trajectoire aura pour équation

$$\epsilon + \epsilon' = 2a.$$

Comme loi de mouvement, nous supposerons un accroissement uniforme de l'arc ϵ avec une vitesse b ; et par suite, d'après l'équation de la courbe, une égale diminution de ϵ'. En évaluant le temps à partir du plan de symétrie, nous aurons ainsi

$$\epsilon = a + bt, \quad \epsilon' = a - bt,$$

et en appliquant à chacun de ces deux arcs la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos(a + bt) = \cos\lambda \cos c + \sin\lambda \sin c \cos\theta,$$
$$\cos(a - bt) = \cos\lambda \cos c - \sin\lambda \sin c \cos\theta,$$

d'où, en ajoutant membre à membre

$$\cos a \cos bt = \cos c \cos\lambda,$$

$$bt = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\cos c}{\cos a}\cos\lambda\right),$$

$$bdt = -\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{\cos^2 c} - \alpha^2}},$$

$$(13)\qquad 2^{-\frac{n}{2}}\, bV_n = \int \frac{(\mathrm{H} - \alpha)^{\frac{n}{2}}\, d\alpha}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{\cos^2 c} - \alpha^2}}.$$

Changeons de variables en prenant

$$\alpha = \frac{\cos a}{\cos c}\,\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 + 1},$$

le radical disparaît, et il reste

$$-2^{-\frac{n+2}{2}}\, b \cos^{\frac{n}{2}} c\, \mathrm{V}_n$$

$$= \int \frac{\left[(\mathrm{H}\cos c + \cos a) + (\mathrm{H}\cos c - \cos a)\beta^2\right]^{\frac{n}{2}}}{(1+\beta^2)^{\frac{n+2}{2}}}\, d\beta,$$

c'est-à-dire une fonction rationnelle lorsque l'ordre n sera entier et pair, d'ailleurs de signe quelconque ; ce qui permettra d'achever l'intégration.

Admettons par exemple que l'action soit proportionnelle à la distance ($n = 2$). On trouve alors en effectuant tous les calculs

$$\frac{b}{2}\mathrm{V}_2 = \mathrm{H}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\cos a}{\cos c}\cos\lambda\right) + \sqrt{\frac{\cos^2 a}{\cos^2 c} - \cos^2\lambda}.$$

19. Comme second exemple, je définirai le mouvement par la condition que ses deux composantes suivant le parallèle et le méridien soient entre elles à chaque instant dans le même rap-

port (¹) que le sinus et le cosinus d'un multiple quelconque de la longitude.

Nous poserons à cet effet, avec une fonction arbitraire $f\,(\theta,\ \lambda)$

$$(14) \qquad \frac{\sin\lambda\, d\theta}{dt} = f(\theta, \lambda)\sin k\theta, \quad \frac{d\lambda}{dt} = f(\theta, \lambda)\cos k\theta.$$

Il s'ensuit immédiatement pour la trajectoire cette propriété, qu'elle traverse les divers méridiens sous un angle proportionnel à leur longitude. Cette définition, semblable à celle des spirales sinusoïdes dans le plan, nous permet de donner à ces courbes le nom de *spirales sinusoïdes sphériques*.

Leur équation différentielle s'obtient en divisant membre à membre les précédentes

$$\frac{\sin\lambda\, d\theta}{d\lambda} = \frac{\sin k\theta}{\cos k\theta},$$

$$\frac{d\lambda}{\sin\lambda} = \frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\, d\theta,$$

$$\mathrm{Log\ tang}\,\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{k}\,\mathrm{Log}\sin k\theta,$$

$$\mathrm{tang}^{k}\frac{\lambda}{2} = \sin k\theta.$$

On retrouve ainsi la même équation que pour les spirales sinusoïdes planes, avec remplacement du rayon vecteur par la tangente de la demi-colatitude.

De la seconde des équations du mouvement on déduit

$$dt = \frac{d\lambda}{f\cos k\theta} = \frac{d\lambda}{f\sqrt{1 - \mathrm{tang}^{2k}\frac{\lambda}{2}}},$$

en remplaçant dans f la colatitude λ par sa valeur en θ. Il vient donc

---

(¹) Il ne faut pas confondre ce rapport avec celui des vitesses *angulaires* en longitude et en latitude, que nous aurons à employer dans une autre occasion (n° 66).

$$2^{-\frac{n}{2}} V_n = \int \frac{(H - \cos\lambda)^{\frac{n}{2}} d\lambda}{f\sqrt{1 - \operatorname{tang}^{2k}\frac{\lambda}{2}}}.$$

20. Nous nous trouvons d'après cela en mesure de constituer à volonté les énoncés de divers problèmes capables de conduire à des résultats intégrables. Il suffit à cet effet de disposer convenablement de la fonction arbitraire $f(\theta, \lambda)$.

Prenons par exemple, avec une constante m

$$f = \frac{m}{\sqrt{1 - \operatorname{tang}^{2k}\frac{\lambda}{2}}},$$

Il restera, en multipliant les deux termes de la fonction par sin λ

$$(15) \qquad 2^{-\frac{n}{2}} m V_n = \int \frac{(H - \cos\lambda)^{\frac{n}{2}} \sin\lambda d\lambda}{\sqrt{1 - \cos^2\lambda}}$$

$$= -\int \frac{(H - \alpha)^{\frac{n}{2}} d\alpha,}{\sqrt{1 - \alpha^2}},$$

expression qui rentre dans le type précédent (13) pour $a = c$, et qui s'intégrera par suite dans les mêmes conditions.

Il est facile de reconnaître à quelle loi de mouvement correspond ce choix de la fonction arbitraire, car il donne

$$(16) \qquad \frac{d\lambda}{dt} = m, \quad \lambda = mt,$$

c'est-à-dire un mouvement angulaire uniforme en latitude.

Si l'on suppose en particulier l'action en raison directe de la distance ($n = 2$), on trouve en intégrant à partir du zénith

$$\frac{m}{4} V_2 = H\lambda - \sin\lambda.$$

On remarquera que le résultat précédent (15) ne renferme pas k. Cela tient à ce qu'il ne dépend en aucune façon de la trajectoire, attendu que nous nous trouvons précisément dans le cas singulier qui a été signalé au n° 17, puisque la loi de mouvement (16) est définie au moyen de l'unique variable λ, qui figure seule dans l'expression (11) de ẟ.

21. Afin de présenter un exemple qui au contraire appartienne en propre à la spirale sinusoïde sphérique, j'adopterai cette autre forme pour la fonction arbitraire

$$f(\theta, \lambda) = (H - \cos\lambda)^{\frac{n}{2}} \sin\lambda.$$

La loi de mouvement qui en découle se trouve alors définie par la valeur suivante de la vitesse angulaire en longitude (14)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sin k\theta}{\cos kt} f(\theta, \lambda) = (H - \cos\lambda)^{\frac{n}{2}} \sin k\theta,$$

qui dépend, cette fois, des deux coordonnées ensemble.

Le potentiel devient par là

$$2^{-\frac{n}{2}} V_n = \int (H - \cos\lambda)^{\frac{n}{2}} dt = \int \frac{d\theta}{\sin k\theta},$$

$$2^{-\frac{n}{2}} k V_n = \text{Log tang}\left(\frac{k}{2}\theta\right).$$

Supposons en particulier $k = 2$, on aura

$$2^{1-\frac{n}{2}} V_2 = \text{Log tang}\,\theta,$$

et comme loi de mouvement

$$dt = \frac{d\theta}{(H - \cos\lambda)^{\frac{n}{2}} \sin 2\theta} = \frac{d\theta}{\left(H - \dfrac{1 - \text{tang}^2 \dfrac{\lambda}{2}}{1 + \text{tang}^2 \dfrac{\lambda}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} \sin 2\theta}$$

$$= \frac{d\theta}{\left(H - \dfrac{1 - \sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \sin 2\theta}$$

ou, en introduisant la variable auxiliaire

$$p = \text{tang}\ \theta,$$

$$2\,(\mathrm{H} - 1)^{\frac{n}{2}}\,dt = \frac{(1 + p)^n\,dp}{p\left[p^2 - 2\frac{1 + \mathrm{H}}{1 - \mathrm{H}}\,p + 1\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

Si l'on suppose n pair, quel que soit son signe, on obtient une fonction rationnelle, avec des racines connues pour le dénominateur ; toujours intégrable par conséquent.

L'hypothèse $k = 1$ fournit un cercle passant par le zénith. Elle donne le potentiel

$$2 - \frac{n}{2}\,\mathrm{V}_n = \text{Log tang}\,\frac{\theta}{2},$$

et comme loi de vitesse

$$dt = \frac{d\theta}{\left(\mathrm{H} - \frac{1 - \sin^2\theta}{1 + \sin^2\theta}\right)^{\frac{n}{2}}\sin\theta},$$

que l'on rendra encore intégrable en prenant pour variable auxiliaire

$$q = \text{tang}\,\frac{\theta}{2},$$

$$dt = \frac{dq}{q\left[\mathrm{H} - \frac{(1 + q^2)^2 - 4q^2}{(1 + q^2)^2 + 4q^2}\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

§ 5

COORDONNÉES INTRINSÈQUES

22. Parfois, en cinématique, on fournit directement d'une part la trajectoire et de l'autre la loi du mouvement. Nous prendrons cette dernière sous la forme

$$t = f(s),$$

en fonction de l'arc parcouru s. Il sera dès lors tout indiqué de représenter la courbe par son *équation naturelle*

$$s = \psi(\omega),$$

à l'aide de ses *coordonnées intrinsèques* à savoir, outre son arc, l'angle de contingence ω, évalués l'un et l'autre à partir d'un point O de cette ligne adopté comme origine.

Envisageons dans ces conditions, pour un ordre quelconque n, le potentiel du temps de parcours spécial à cette origine. Il aura comme valeur

$$V_n = \int_{\omega_0}^{\omega} \left[\left(\int_o^{\omega} ds \sin \omega \right)^2 + \left(\int_o^{\omega} ds \cos \omega \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} dt,$$

c'est-à-dire

$$V_n = \int_{\omega_0}^{\omega} \left\{ \left[\int_o^{\omega} \psi'(\omega) \sin \omega d\omega \right]^2 \right.$$
$$\left. + \left[\int_o^{\omega} \psi'(\omega) \cos \omega d\omega \right]^2 \right\}^{\frac{n}{2}} f' [\psi(\omega)] \psi'(\omega) d\omega.$$

23. Comme application de cette formule générale, je considérerai l'épicycloïde rapportée à l'un de ses sommets

$$s = \sin k\omega.$$

Comme loi de mouvement, nous lui associerons l'*isochronisme*, qui constitue l'une des plus belles propriétés de ces courbes, lorsque le mobile se trouve soumis à l'influence d'une force proportionnelle à la distance au centre du cercle fixe (¹). Cette loi s'y trouve représentée par la formule

$$s = s_0 \cos \frac{\pi t}{2T}.$$

Elle donne $s = o$ pour $t = T$ quelle que soit la distance initiale s_0 ;

(¹) Cette proposition est due à Newton. Je l'ai étendue au cas du frottement et d'une résistance proportionnelle à la vitesse. Le centre d'isochronisme se trouve alors déplacé. (Haton de la Goupillière, JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 2ᵉ série, tome XIII, page 204).

mais nous nous bornerons à la demi-oscillation ($s_0 = 1$) étendue entre le point de rebroussement et le sommet. Il suit de là

$$(17) \qquad t = \frac{2\mathrm{T}}{\pi} \operatorname{arc\,cos} s = \frac{2\mathrm{T}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} s\right) = \mathrm{T} - \frac{2k\mathrm{T}}{\pi}\,\omega.$$

On a donc

$$-\frac{\pi}{2k^{n+1}\mathrm{T}}\,\mathrm{V}_n = \int_{\omega_0}^{\omega}\left[\left(\int_0^{\omega} \cos k\omega \sin \omega d\omega\right)^2 + \left(\int_0^{\omega} \cos k\omega \cos \omega d\omega\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} d\omega.$$

Si l'on décompose en sommes ces produits, afin de procéder à leur intégration, on obtient, après avoir effectué toutes les réductions

$$-\frac{\pi}{2\,n-1}\cdot\frac{(k^2-1)^n}{k\,n+1}\cdot\frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{T}} = \int_{\omega_0}^{\omega}\left[(\cos k\omega + k \sin k\omega - 1)^2 - k \sin 2k\omega\right]^{\frac{n}{2}} d\omega,$$

expression qu'il sera facile d'intégrer de nouveau pour toutes les valeurs paires et positives de n (¹).

24. On peut également chercher le potentiel du temps de parcours dans le même mouvement, mais relativement au centre du cercle fixe.

Nous rapporterons dans ce but la courbe à son point de rebroussement, sous la forme

$$s = \cos k\omega.$$

Le nouveau potentiel devient alors

$$-\frac{\pi}{2k\,n+1\,\mathrm{T}}\,\mathrm{V} = \int_{\omega_0}^{\omega}\left[\left(\int_0^{\omega} \sin k\omega \sin k d\omega\right)^2 + \left(\mathrm{R} - \int_0^{\omega} \sin k\omega \cos \omega d\omega\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} d\omega.$$

Il s'évaluera par les mêmes moyens.

(¹) On doit toutefois excepter de cette formule l'hypothèse $k = 1$, qui concerne la cycloïde. Mais ce cas est facile à traiter directement.

Le cas le plus simple correspond à $n = 2$. L'action potentielle est alors proportionnelle à la distance au centre du cercle, et se confond par conséquent avec la force motrice capable du mouvement tautochrone.

25. Je prendrai comme second exemple la trajectoire

$$s = e^{\omega} + e^{-\omega}, \quad ds = (e^{\omega} - e^{-\omega})\,d\omega,$$

qui est égale à la développée de sa développée. Elle donne identiquement

$$2\int (e^{\omega} + e^{-\omega}) \sin \omega\, d\omega = e^{\omega}(\sin \omega - \cos \omega) - e^{-\omega}(\sin \omega + \cos \omega),$$

$$2\int (e^{\omega} + e^{-\omega}) \cos \omega\, d\omega = e^{\omega}(\sin \omega + \cos \omega) + e^{-\omega}(\sin \omega - \cos \omega),$$

d'où, en faisant la somme des carrés

$$2r^2 = e^{2\omega} + e^{-2\omega}.$$

Nous lui associerons comme loi de mouvement la rotation uniforme de la tangente

$$t = \omega, \quad dt = d\omega.$$

Il vient dans ces conditions, pour le potentiel d'ordre pair et positif $2n$

$$2^n\, V_{2n} = \int (e^{2\omega} + e^{-2\omega})^n\, d\omega.$$

Développons par la formule du binôme de Newton, en profitant, pour grouper ensemble les termes équidistants des extrêmes, de ce qu'ils ont les mêmes coefficients. On obtient, après avoir effectué l'intégration

$$2^{n+1}\, V_{2n} = \frac{e^{2n\omega} - {}^{-2n\omega}}{n} + \frac{n}{1}\left[\frac{e^{2(n-2)\omega} - e^{-2(n-2)\omega}}{n-2}\right]$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left[\frac{e^{2(n-4)\omega} - e^{-2(n-4)\omega}}{n-4}\right] + \ldots$$

Lorsque n est impair, toute la suite reste composée d'exponentielles. S'il est pair, il existe un dernier terme constant, que l'intégration multiplie par ω.

On a identiquement

$$e^{2k\omega} - e^{-2k\omega} = (e^{k\omega} + e^{-k\omega})(e^{k\omega} - e^{-k\omega}) = \frac{s_k \rho_k}{k},$$

si nous désignons par s_k et ρ_k l'arc et le rayon de courbure $\rho = \frac{ds}{d\omega}$ qui correspondent à l'angle de contingence $k\omega$. Le développement prend alors la forme suivante, qui ne contient plus que des éléments purement géométriques :

$$2^{n+1} V_{2n} = \frac{s_n \rho_n}{n} + \frac{n}{1} \cdot \frac{s_{n-2}\rho_{n-2}}{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{s_{n-4}\rho_{n-4}}{n-4} + \dots$$

Signalons comme le type le plus simple du premier genre ($n=1$)

$$4V_2 = s\rho,$$

pour l'action proportionnelle à la distance ($2n = 2$) ; et dans le second genre, avec l'action en raison du cube de la distance ($2n = 4$, $n = 2$)

$$16V^4 = s_{2\omega}\rho_{2\omega} + 8\omega.$$

§ 6

POTENTIEL GÉNÉRAL

26. Après cette étude du potentiel spécial à un centre déterminé, passons à celle du potentiel général relatif à un point arbitraire du plan, auquel nous donnerons pour rayon vecteur a et comme azimut α. Sa distance δ au mobile (r, θ) est à chaque instant

$$\delta = \sqrt{r^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha) + a^2}.$$

Reprenons comme définition du mouvement la loi des aires, avec $r^2 d\theta$ comme expression de l'élément du temps de parcours. Son potentiel sera, pour une fonction caractéristique quelconque φ

$$V = \int \varphi\left(\sqrt{r^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha) + a^2}\right) r^2 d\theta.$$

Si l'on envisage en particulier l'action proportionnelle à la distance δ, la fonction φ devient δ^2, et le potentiel

$$V_2 = \int \left[r^4 - 2ar^3 \cos(\theta - \alpha) + a^2 r^2 \right] d\theta.$$

27. Appliquons cette formule à la spirale logarithmique (6). Elle nous donne (¹)

$$V_2 = \int_{-\infty}^{\theta} e^{4A\theta}\, dt + a^2 \int_{-\infty}^{\theta} e^{2A\theta}\, d\theta$$

$$- 2a\cos\alpha \int_{-\infty}^{\theta} e^{3A\theta} \cos\theta d\theta - 2a \sin\alpha \int_{-\infty}^{\theta} e^{3A\theta} \sin\theta d\theta,$$

c'est-à-dire

$$4V_2 = \frac{1}{A}\left(e^{4A\theta} + 2a^2 e^{2A\theta} \right)$$

$$- \frac{8ae^{3A\theta}}{1 + 9A^2}\left[\cos\alpha\,(3A\cos\theta + \sin\theta) + \sin\alpha\,(3A\sin\theta - \cos\theta) \right].$$

En introduisant la quantité auxiliaire

$$\cot\epsilon = 3A,$$

on pourra écrire

$$4V_2 = \frac{r^2}{A}(r^2 + 2a^2) - 8ar^3 \sin\epsilon \left[\cos\alpha\cos(\theta - \epsilon) + \sin\alpha\sin(\theta - \epsilon) \right],$$

ou enfin

$$4AV^2 = r^2\left[r^2 + 2a^2 - 8Aar\sin(\operatorname{arc\,cot} 3A)\cos(\theta - \alpha - \operatorname{arc\,cot} 3A) \right].$$

(¹) Les intégrations réussiraient de même avec les spirales sinusoïdes (5) d'un ordre égal à l'inverse d'un nombre entier quelconque ; et par exemple pour la parabole à son foyer $\left(n = -\frac{1}{2}\right)$.

28. Si nous considérons V_2 comme une constante, a et α comme des coordonnées courantes, et r comme un paramètre arbitraire, nous constituons ainsi l'équation des courbes de niveau. On y reconnaît celle du cercle.

Les coordonnées (b, β) de son centre ont pour valeurs

$$b = \frac{4A}{\sqrt{1+9A^2}} = r, \qquad \beta = \theta + \operatorname{arc\,cot} 3A,$$

expressions qu'il serait facile de construire à l'aide de la règle et du compas, en fonction de l'angle constant qui est compris entre la courbe et son rayon vecteur, et qui a pour cotangente A.

En traitant b et β comme des coordonnées courantes du lieu géométrique de ces centres, lorsque le mobile décrit la spirale, il suffira, pour obtenir l'équation de ce lieu, d'éliminer r et θ entre ces deux égalités et la relation (6). On obtient ainsi

$$b = \frac{4A}{1+9A^2} e^{A(\beta - \operatorname{arc\,cot} 3A)}.$$

Cette formule représente une spirale logarithmique égale à la proposée, mais tournée autour de son pôle de l'angle

$$\frac{1}{A} \operatorname{Log}\left(\frac{4A}{1+9A^2}\right) - \operatorname{arc\,cot} 3A.$$

29. Ces considérations peuvent être étendues à l'espace à trois dimensions. Le potentiel relatif au point (ξ, η, ζ) devient alors

$$V = \int \varphi\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right] dt,$$

expression que l'on intégrera après avoir remplacé x, y, z en fonction de t, d'après les trois équations du mouvement.

Prenons comme exemple la révolution qui s'exécute elliptiquement suivant la loi des aires, sous l'empire d'une force dirigée vers le centre de la courbe et proportionnelle à la distance à ce point. C'est précisément cette même force que nous adopterons pour l'action propre à définir le potentiel.

On aura comme équations de ce mouvement

$$x = a \sin t, \quad y = b \cos t, \quad z = 0;$$

et par conséquent pour celles de la trajectoire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$

La fonction caractéristique devient

$$\varphi = (a \sin t - \xi)^2 + (b \cos t - \eta)^2 + \zeta^2.$$

Si l'on intègre à partir de l'origine du temps, c'est-à-dire du sommet du petit axe, il vient

$$\mathrm{V}^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} \sin 2t - 2b\eta \sin t + 2a\xi (\cos t - 1)$$
$$+ \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \zeta^2 + \eta^2 + \zeta^2\right) t\,;$$

ou encore

$$\mathrm{V}_2 = \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) xy - 2\frac{b}{a} x\eta + 2a\left(\frac{y}{b} - 1\right)\xi$$
$$+ \left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \frac{a^2 + b^2}{2}\right) \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}.$$

30. En mettant cette équation sous la forme

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2a \frac{\left(\frac{y}{b} - 1\right)}{\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}} \xi - 2 \frac{b\,\frac{x}{a}}{\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}} \eta = \text{const.},$$

pour représenter les surfaces de niveau, nous y reconnaissons un système de sphères concentriques.

Les coordonnées de leur centre commun ont à chaque instant pour valeurs

$$\frac{\mathrm{X}}{a} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}}, \quad \frac{\mathrm{Y}}{b}\ \frac{\frac{x}{a}}{\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}}, \quad \mathrm{Z} = 0.$$

Au moment initial ($x = 0$, $y = b$), on a

$$\frac{\mathrm{X}_0}{a} = \left(\frac{\frac{x}{a}}{\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}}\right) \frac{\frac{x}{a}}{1 + \frac{y}{b}} = 0, \quad \frac{\mathrm{Y}_0}{b} = \frac{\frac{x}{a}}{\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}} = 1,$$

et le centre se trouve en ce point de départ. En terminant la révolution complète, on retrouve les mêmes valeurs de x et de y, mais $arc\ sin\ \frac{x}{a}$ n'est plus nul. Il atteint alors la valeur 2π, et Y s'annule. Le centre des sphères se confond donc alors avec celui de la trajectoire.

31. Pour en connaître, dans l'intervalle, le lieu géométrique, qui se trouve situé dans le plan Oxy, il suffit d'éliminer x et y entre ces dernières équations et celle de l'ellipse.

Nous avons d'abord

$$\frac{\frac{Y}{b}}{\frac{X}{a}} = \frac{\frac{x}{a}}{1-\frac{y}{b}},$$

et en substituant cette valeur de $\frac{y}{b}$ dans l'équation de la courbe

$$\left(1-\frac{b}{a}\,\frac{X}{Y}\cdot\frac{x}{a}\right)^2 = 1-\left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{2\,\frac{X}{a}\,\frac{Y}{b}}{\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2},$$

puis en remettant dans l'expression de Y

$$\frac{2\,\frac{X}{a}\,\frac{Y}{b}}{\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2} = \sin\left[\frac{2\,\frac{X}{a}}{\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2}\right].$$

32. Les deux exemples précédents nous montrent comme lignes et surfaces de niveau, des cercles et des sphères concentriques. Cette circonstance ne leur est pas spéciale, et ce que chacun offre de particulier consiste uniquement dans la recherche du lieu des centres. On sait en effet que, pour un système quelconque, les lieux des points pour lesquels le moment d'inertie, axial ou polaire, conserve une valeur constante, sont des cercles ou des sphères décrits autour du centre de gravité. Or le moment d'inertie n'est

pas autre chose que le potentiel de l'action proportionnelle à la distance.

Ces vues peuvent se généraliser et s'étendre, *pour un système matériel absolument quelconque* (et en dehors de la théorie du temps de parcours) *à tous les potentiels d'ordre pair et positif* $n = 2k$. Rapportons à cet effet ce système à son centre de gravité et à ses axes principaux centraux, ce qui donne

$$\sum mx = 0,\quad \sum my = 0,\quad \sum mz = 0; \tag{18}$$

$$\sum mxy = 0,\quad \sum mxz = 0,\quad \sum myz = 0. \tag{19}$$

La fonction caractéristique prend la forme

$$\varphi = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^k$$

$$= \left[(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 2(\xi x + \eta y + \zeta z) + (x^2 + y^2 + z^2)\right]^k,$$

ce que j'écrirai en abrégé de la manière suivante :

$$\varphi = (\mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R})^k$$

$$= \mathrm{P}^k + \frac{k}{1}\mathrm{P}^{k-1}(\mathrm{Q}+\mathrm{R}) + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\mathrm{P}^{k-2}(\mathrm{Q}+\mathrm{R})^2 + \ldots$$

Réunissons ensemble les termes de même degré en ξ, η, ζ, et remarquons pour cela que P renferme ces variables au carré, Q à la première puissance, tandis que R en est indépendante. Nous aurons ainsi tout d'abord ces quatre groupes

$$\varphi = \mathrm{P}^k + k\mathrm{P}^{k-1}\mathrm{Q}$$

$$+ \left[k\mathrm{P}^{k-1}\mathrm{R} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\mathrm{P}^{k-2}\mathrm{Q}^2\right]$$

$$+ \left[\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\mathrm{P}^{k-2}\cdot 2\mathrm{QR} + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mathrm{P}^{k-3}\mathrm{Q}^3\right] + \ldots$$

Multiplions actuellement par m et intégrons. Le premier membre devient le potentiel V. Les termes qui renferment la première puissance de Q s'évanouissent d'après les relations (18). Ceux qui contiennent Q^2 se simplifient en raison des conditions (19). Si l'on représente en outre par

$$Ma = \sum mx^2, \quad Mb = \sum my^2, \quad Mc = \sum mz^2,$$

(M désignant la masse totale) les moments plans principaux d'inertie, il reste seulement

$$\frac{V}{M} = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^k + n(a + b + c)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{k-1}$$
$$+ 2k(k-1)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{k-2}(a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2) + \dots$$

On voit par là que l'équation des surfaces de niveau est du même degré $2k$ que le potentiel pour tous les ordres pairs et positifs, et qu'elle présente en outre dans chacun d'eux un type immuable (comme l'est par exemple, pour $k = 1$, la sphère parmi les quadriques), lequel ne varie, d'un problème à l'autre, que par les valeurs numériques qu'y prennent les diverses intégrales définies, telles que a, b, c, etc.

Ces équations présentent le caractère *multisphérique ;* c'est-à-dire que la partie du degré le plus élevé y est constituée par la puissance $\frac{n}{2} = k$ du premier membre de l'équation d'une sphère de rayon nul. De même, lorsqu'on se restreint à la géométrie plane, les lignes de niveau sont des courbes *multicirculaires*, dont les *quartiques bicirculaires* (¹), si l'action est proportionnelle au cube de la distance, nous présentent l'exemple le plus simple.

33. L'équation devient dans ce dernier cas

$$V = M(\xi^2 + \eta^2)^2 + 2M(a + b)(\xi^2 + \eta^2) + 4M(a\xi^2 + b\eta^2)$$
$$- 4\xi\left(\sum mx^3 + \sum mx^2y\right) - 4\eta\left(\sum my^3 + \sum my^2x\right)$$
$$+ \sum mx^4 + \sum my^4 + 2\sum mx^2y^2.$$

(¹) Cette catégorie étendue de lignes comprend les anallagmatiques, les ovales de Descartes, les cassiniennes, les lemniscates, les spiriques de Persée, etc. Elles ont été l'objet de nombreux travaux de la part de Newton, Chasles, Moutard, de La Gournerie, Laguerre, Darboux, Humbert, Cayley, Roberts, Casey, Hart, Jeffery, Quetelet, Genocchi, etc. (G. Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables*, 1908, t. I, p. 237).

Lorsque le système matériel est symétrique par rapport à ses axes principaux centraux, les coefficients des termes du premier degré en ξ, η, s'évanouissent identiquement, et il reste seulement

$$\frac{V}{M} = (\xi^2 + \eta^2)^2 + 2(a + b)(\xi^2 + \eta^2) + 4(a\xi^2 + b\eta^2) + \frac{1}{M}\sum mr^4.$$

En passant aux coordonnées polaires, on a comme équation des lignes de niveau

$$\rho^4 + 2(a + b)\rho^2 + 4\rho^2(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta) = \text{const.},$$

ou encore

$$\rho^4 + 2\rho^2\Big[2(a + b) + (a - b)\cos 2\theta\Big] = \text{const.}$$

Le produit des racines de cette équation bicarrée étant indépendant de θ, nous reconnaissons que ces courbes sont anallagmatiques.

Quand l'ellipsoïde central est de révolution ($a = b$), on obtient simplement des cercles.

34. Revenons maintenant de la Géométrie des masses envisagée au point de vue général à son application au temps de parcours. Les résultats précédents subsistent, mais bien entendu par rapport au centre de gravité et aux axes principaux *de ce même temps*, et non de la courbe elle-même supposée homogène. Nous savons (¹) les déterminer en fonction des limites définissant l'arc parcouru à chaque instant.

On peut de plus, comme dans les problèmes précédents (n^os 28, 31), trouver par rapport aux axes coordonnés fixes auxquels sont rapportées les trois équations du mouvement, le lieu géométrique de ce centre de gravité, qui est fourni par les égalités

$$X = \frac{\int x\,dt}{t}, \quad Y = \frac{\int y\,dt}{t}, \quad Z = \frac{\int z\,dt}{t}.$$

(¹) Haton de la Goupillière, ANNAES SCIENTIFICOS DA ACADEMIA DO PORTO, 1906. — JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 1908. — JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 2^e série, 13^e cahier.

Il suffit à cet égard d'éliminer x, y, z, t entre ces six relations, pour obtenir les deux équations de ce lieu.

35. Lorsque l'ordre du potentiel devient impair, les calculs se compliquent beaucoup à cause de la présence d'un radical. J'en présenterai quelques exemples.

Envisageons le déplacement d'un mobile sur un cercle de rayon égal à l'unité, avec une vitesse angulaire qui varie à chaque instant proportionnellement au sinus de la moitié de l'azimut (¹).

L'équation de ce mouvement dérive de sa définition même

$$\frac{d\theta}{dt} = \sin\frac{\theta}{2}, \quad dt = \frac{dt}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad t = 2\mathrm{Log\,tang}\,\frac{\theta}{4}.$$

Prenons comme variable auxiliaire

$$u = \mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2}, \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$d\theta = \frac{2du}{1+u^2}, \quad dt = \frac{2du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

La fonction caractéristique deviendra

$$\varphi = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$= \left[\xi^2 + \eta^2 + 1 - 2(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta)\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$= \left[\xi^2 + \eta^2 + 1 - 2\,\frac{\xi(1-u^2) + 2\eta u}{1+u^2}\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$(20) \qquad = \frac{\left[(\xi^2+\eta^2+1)(1+u^2) - 2\xi(1-u^2) - 2\eta u\right]^{\frac{n}{2}}}{(1+u^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

(¹) Il s'effectue sous l'empire d'une force centripète $\sin^2\frac{\theta}{2}$, et d'une composante perpendiculaire $\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$.

d'où l'expression du potentiel

$$(21)\quad \frac{\mathrm{V}_n}{2} = \int \frac{\left[(\xi^2+\eta^2+1+2\xi)u^2-4\eta u+(\xi^2+\eta^2+1-2\xi)\right]^{\frac{n}{2}}}{u\,(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

L'ordre n étant supposé impair, l'exposant du dénominateur est entier. Quant au numérateur, il se compose d'une fonction rationnelle de u multipliée par un radical carré qui porte sur un trinôme du second degré. Nous sommes ainsi ramenés à un type d'intégration pour lequel il existe des méthodes classiques.

36. Achevons le calcul dans le cas du potentiel Newtonien ($n = -1$).

Pour simplifier l'écriture, nous emploierons l'abréviation

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = \mathrm{H}.$$

Il vient alors

$$\frac{\mathrm{V}_{-1}}{2} = \int \frac{du}{u\sqrt{(\mathrm{H}+2\xi)\,u^2 - 4\eta n + (\mathrm{H}-2\xi)}}.$$

En posant encore

$$(\mathrm{H}+2\xi)\,n^2 - 4\eta u + (\mathrm{H}-2\xi) = \mathrm{K},$$

on trouve

$$\frac{\mathrm{V}_{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}-2\xi}}\,\mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{K}} + u\sqrt{\mathrm{H}+2\xi} - \sqrt{\mathrm{H}-2\xi}}{\sqrt{\mathrm{K}} + u\sqrt{\mathrm{H}+2\xi} + \sqrt{\mathrm{H}-2\xi}}\right).$$

Si nous intégrons à partir du point de vitesse maxima

$$\theta = \pi, \qquad u = \mathrm{tang}\,\frac{\pi}{2} = \infty,$$

la fraction, après que l'on a divisé ses deux termes par u, se réduit à l'unité, et son logarithme à zéro. Il n'y a donc rien à changer dans l'expression de l'intégrale, et l'on n'a plus qu'à y remettre, ainsi que dans K, la valeur $u = \mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2}$.

37. On réussira encore l'intégration si l'on définit le mouvement circulaire de cette manière très large, à savoir : que sa vitesse

angulaire soit le produit du cosinus de la moitié de l'azimut par *une fonction rationnelle quelconque* de la tangente de cette moitié

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos\frac{\theta}{2}\cdot \mathrm{F}\left(\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right).$$

Il vient en effet

$$dt = \frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}\cdot \mathrm{F}\left(\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2du}{\mathrm{F}(u)\sqrt{1+u^2}},$$

d'où, en multipliant par la fonction caractéristique (20) et intégrant

$$(22) \qquad \frac{\mathrm{V}_n}{2} = \int \frac{\mathrm{K}^{\frac{n}{2}}}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{F}(u)}\,du,$$

expression rationnelle sauf un seul radical $\sqrt{\mathrm{K}}$, puisque n est supposé impair.

38. Cette catégorie de problèmes comprend notamment l'hypothèse

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos^{2k+1}\frac{\theta}{2},$$

dans laquelle k représente un nombre entier positif ou négatif. On peut écrire en effet

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}}\right)^k.$$

Nous en déduisons comme équation du mouvement

$$t = \int \cos^{-(2k+1)}\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

c'est-à-dire, lorsque $2k+1$ est positif, le développement suivant pour l'expression du temps en fonction de l'azimut :

$$\frac{t}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2k}\left[\cos^{-2k}\frac{\theta}{2} + \frac{2k-1}{2k-2}\cos^{-2k+2}\frac{\theta}{2} + \frac{(2k-1)(2k-3)}{(2k-2)(2k-4)}\cos^{-2k+4}\frac{\theta}{2} + \cdots\right]$$

$$\cdots + \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\cdot\cdot\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdot\cdot\cdot\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\operatorname{Log\,tang}\frac{\theta+\pi}{4},$$

et s'il est négatif

$$\frac{t}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2k+1}\left[\cos^{2k}\frac{\theta}{2} + \frac{2k}{2k-1}\cos^{2k-2}\frac{\theta}{2} + \frac{2k(2k-2)}{(2k-1)(2k-3)}\cos^{2k-4}\frac{\theta}{2} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{2k(2k-2)\cdot\cdot\cdot\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{(2k-1)(2k-3)\cdot\cdot\cdot\cdot 5\cdot 3\cdot 1}\right].$$

Comme d'ailleurs

$$F\left(\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}}\right)^k = \frac{1}{(1+n^2)^k},$$

il vient, en substituant dans la formule (21)

$$\frac{V_n}{2} = \int \frac{K^{\frac{n}{2}}}{(1+n^2)^{\frac{2k+n+1}{2}}}\,dn,$$

expression rationnelle sauf un seul radical $\sqrt{K}$, puisque n est impair.

Imposons-nous par exemple la condition que l'exposant $2k+1$ de l'équation différentielle soit égal, sauf le signe, à l'ordre n du potentiel

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\cos^n\frac{\theta}{2}},$$

il viendra simplement

$$\frac{V_n}{2} = \int K^{\frac{n}{2}}\,dn.$$

39. L'hypothèse Newtonienne $n = -1$ nous ramènerait au problème précédent, avec un simple changement d'origine.

Si nous adoptons au contraire l'action constante

$$n = 1, \quad 2k + 1 = -1,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}, \quad t = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

nous aurons comme potentiel

$$\frac{V_1}{2} = \int \sqrt{K}\, du = \int \sqrt{(H + 2\xi)\, u^2 - 4\eta n + (H - 2\xi)}\, du.$$

Il suffirait donc à cet égard de substituer la valeur de nos divers symboles dans la formule générale

$$\int \sqrt{Au^2 + Bu + C}\, du = \frac{B\sqrt{Au} + (B + 4Au)\sqrt{Au^2 + Bu + C}}{8A}$$
$$+ \frac{B(4AC - B^2)}{16A\sqrt{A}\,(B + 2Au + 2\sqrt{A}\sqrt{Au^2 + Bu + C})}$$
$$+ \frac{4AC - B^2}{8A\sqrt{A}} \operatorname{Log}\left(B + 2Au + 2\sqrt{A}\sqrt{Au^2 + Bu + C}\right).$$

§ 7

POTENTIEL DE L'ÉNERGIE

40. J'ai montré, dans les divers mémoires que j'ai eu occasion de citer (nº 34), que l'on peut généraliser considérablement l'application de la Géométrie des masses au temps de parcours, et l'étendre *à n'importe quel élément de la dynamique* autre que la durée.

Envisageons par exemple l'*énergie recueillie ou perdue en cours de route*, et cherchons-en le potentiel.

La formule générale (2) reste la même, sauf que le facteur dt y doit être remplacé par l'énergie acquise vdv.

$$V = \int \varphi(r) v dv. \tag{23}$$

Attachons-nous, comme au n° 10, au mouvement *libre* effectué suivant la loi des aires sur une trajectoire quelconque (7), en adoptant spécialement pour le genre d'action qui définira le potentiel, précisément la force centrale capable de réaliser ce mode de mouvement. Nous en connaissons la valeur (8). Supposons-la exprimée en fonction de r seul, sous la forme $F(r)$, en faisant disparaître θ d'après l'équation de la trajectoire. La fonction caractéristique sera $\int F(r)dr$. Mais l'élément du travail vdv est lui-même égal à $F(r)dr$, et par conséquent à $d\varphi$. Le potentiel de l'énergie (23) sera donc $\int \varphi d\varphi$ ou $\frac{\varphi^2}{2}$, et l'on peut écrire (9)

$$8V = \left[f^2(\theta) + f'^2(\theta)\right]^2.$$

Sa détermination se trouve ainsi *effectuée une fois pour toutes quelle que soit la trajectoire.*

Si nous désignons par f_1 la *fonction inverse* de f, nous pouvons également écrire en fonction de la distance

$$8V = \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{f_1'^2\left(\frac{1}{r}\right)}\right]^2. \tag{24}$$

41. Je reprendrai à cet égard l'exemple des spirales algébriques (4) afin de tracer complètement sur un cas particulier la marche des opérations

$$r = \theta^k, \quad f(\theta) = \theta^{-k}, \quad f_1(\theta) = \theta^{-\frac{1}{k}},$$

$$f_1'(\theta) = -\frac{1}{k}\theta^{-\frac{1}{k}-1}, \quad \frac{1}{f_1'(\theta)} = -k\theta^{\frac{1}{k}+1},$$

$$\frac{1}{f_1'\left(\frac{1}{r}\right)} = -kr^{-\left(\frac{1}{k}+1\right)}.$$

et par conséquent

$$8V = \frac{1}{r^4}\left[1 + \frac{k^2}{r^{\frac{2}{k}}}\right]^2.$$

On a de même pour la spirale logarithmique (6)

$$\frac{8V}{1+A^2}=\frac{1}{r^4},$$

et pour les spirales sinusoïdes (5) d'ordre quelconque k

$$8V=\frac{1}{r^{4(k+1)}}.$$

On obtient par exemple r^4 pour l'hyperbole équilatère rapportée à son centre ($k=-2$), avec une force proportionnelle à la distance ; $\frac{1}{r^2}$ pour la parabole au foyer $\left(k=-\frac{1}{2}\right)$, et la loi de gravitation ; $\frac{1}{r^8}$ pour le cercle passant au pôle ($k=1$), et une action inversement proportionnelle à r^5.

42. Nous nous proposerons maintenant le problème inverse, en cherchant à déterminer *a priori* une courbe (7) capable d'un *potentiel d'énergie* (¹) de forme donnée

$$8V=\Phi(r).$$

Nous poserons à cet effet, d'après la formule (24)

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{f'^2\left(\frac{1}{r}\right)}=\sqrt{\Phi(r)},$$

d'où l'on tire

$$f_1'\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{r}{\sqrt{r^2\sqrt{\Phi(r)}-1}}.$$

Représentons $\frac{1}{r}$ par Υ

$$f_1'(\Upsilon)=\frac{1}{\Upsilon\sqrt{\frac{1}{\Upsilon^2}\sqrt{\Phi\left(\frac{1}{\Upsilon}\right)}-1}},\quad f_1(\Upsilon)=\int\frac{d\Upsilon}{\sqrt{\sqrt{\Phi\left(\frac{1}{\Upsilon}\right)}-\Upsilon^2}},$$

(¹) Énoncé qu'il ne faut pas confondre avec la recherche classique de la courbe capable d'un *potentiel ordinaire* de forme déterminée, ou, en d'autres

Lorsque l'intégration sera effectuée, il suffira d'écrire

$$\theta = f_1(\gamma), \quad \gamma = f(\theta) = \frac{1}{r},$$

pour obtenir entre r et θ l'équation demandée.

43. Cherchons par exemple une trajectoire telle que son potentiel d'énergie soit proportionnel à une puissance quelconque p de la distance.

Nous poserons à cet effet

$$\Phi(r) = r^p, \quad \sqrt{\Phi\left(\frac{1}{\gamma}\right)} = \gamma^{-\frac{p}{2}},$$

$$f_1(\gamma) = \int \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^{-\frac{p}{2}} - \gamma^2}} = \int \frac{\gamma^{\frac{p}{4}}\, d\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^{\frac{p}{2}+2}}}.$$

Changeons de variable en prenant

$$\epsilon = \gamma^{\frac{p+4}{4}}, \quad \gamma = \epsilon^{\frac{4}{p+4}}, \quad d\gamma = \frac{4}{p+4}\,\epsilon^{-\frac{p}{p+4}}\, d\epsilon,$$

$$f_1(\epsilon) = \frac{4}{p+4}\int \frac{d\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{4}{p+4}\,\text{arc cos}\,\epsilon$$

$$= \frac{4}{p+4}\,\text{arc cos}\left(\gamma^{\frac{p+4}{4}}\right) = \frac{4}{p+4}\,\text{arc cos}\left(r^{-\frac{p+4}{4}}\right),$$

d'où, en égalant à θ d'après la règle précédente

$$r^{\frac{p+4}{4}} \cos \frac{p+4}{4}\,\theta = 1,$$

c'est-à-dire une spirale sinusoïde d'ordre $-\frac{p+4}{4}$.

Nous dresserons à cet égard ce tableau de quelques cas particuliers.

---

termes, d'être parcourue librement sous l'empire d'une force centrale donnée. Les deux questions sont absolument différentes.

ACTION DÉFINISSANT LE POTENTIEL D'ÉNERGIE	ORDRE DE LA SPIRALE SINUSOÏDE	SPIRALE SINUSOÏDE	FORCE CAPABLE DE LA FAIRE DÉCRIRE LIBREMENT	POTENTIEL DE CETTE FORCE OU TRAVAIL MOTEUR
p	$-\frac{p+4}{4}=n$		$-(2n+3)$ $=\frac{p-2}{2}$	$\frac{p-2}{2}+1$ $=\frac{p}{2}$
+ 4	— 2	Hyperbole	+ 1	+ 2
— 2	$-\frac{1}{2}$	Parabole	— 2	— 1
— 6	$+\frac{1}{2}$	Cardioïde	— 4	— 3
— 8	+ 1	Cercle	— 5	— 4
— 12	+ 2	Lemniscate	— 7	— 6

§ 8

POTENTIEL GÉNÉRAL DE L'ÉNERGIE

44. Après le potentiel de l'énergie spécial à l'origine, étudions son potentiel général. Je commence par formuler la question dans toute son étendue.

Soit F(r) la force centrale qui commande effectivement le mouvement sur une trajectoire imposée à l'avance. L'élément de l'énergie sera F(r)dr; car la force de liaison qui maintient le mobile sur cette courbe, et qui, suivant l'usage, est supposée purement normale, n'opère pas de travail pour son propre compte.

Soit d'autre part $\varphi'(\delta)$ l'action, toute différente en général, qui nous sert à définir le potentiel en fonction de la distance δ du mobile au centre arbitraire, de coordonnées (a, α),

$$\delta = \sqrt{r^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha) + a^2}.$$

Le potentiel général de l'énergie sera dans ces conditions

$$V = \int \varphi(\delta)\,F(r)\,dr. \tag{26}$$

Supposons, pour fixer les idées, que la force motrice ait pour expression r^n, et l'action potentielle δ^p ; par conséquent, sa fonction caractéristique δ^{p+1}. Il nous viendra l'expression

$$V = \int \left[r^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha) + a^2\right]^{\frac{p+1}{2}} r^n\,dr,$$

dans laquelle on remplacera θ en fonction de r d'après l'équation de la courbe sur laquelle est assujetti le corps.

45. Admettons par exemple que cette ligne soit une conique rapportée à son foyer

$$r = \frac{1}{1 + e\cos\theta},$$

$$\cos\theta = \frac{1 - r}{er}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{(e^2 - 1)r^2 + er - 1}}{er}.$$

Pourvu que n soit un entier, de signe quelconque, et p un nombre arbitraire impair et positif, on se trouve ramené à une fonction rationnelle de r, sauf un radical carré portant sur un trinôme du second degré.

46. Mais quittons cette généralité, et plaçons-nous maintenant dans ces conditions plus précises :

Je suppose un mobile parcourant *librement suivant la loi des aires* la trajectoire [illegible]

$$r = \frac{1}{f(\theta)}, \quad \frac{1}{r} = f(\theta). \quad \theta = f_1\left(\frac{1}{r}\right),$$

en désignant comme ci-dessus (n° 40) par f_1 la fonction inverse de f. Ce ne pourra être que sous l'empire de la force bien déterminée qui a pour valeur (8)

$$F(r) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{r} + f''(\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{r} + f''\left[f_1\left(\frac{1}{r}\right)\right]\right\}.$$

D'autre part j'adopterai, puisque notre choix reste indépendant pour définir le potentiel, justement cette même loi d'action F(δ). La fonction caractéristique sera dans ces conditions

$$\varphi(\delta) = \int \frac{d\delta}{\delta^2}\left\{\frac{1}{\delta} + f''\left[f_1\left(\frac{1}{\delta}\right)\right]\right\},$$

et le potentiel général de l'énergie deviendra (26)

$$V = \int \varphi\left[\sqrt{r^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha) + a^2}\right] \cdot F(r)dr$$

$$= \int \varphi\left\{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\left[\alpha - f_1\left(\frac{1}{r}\right)\right]}\right\} \cdot F(r)dr.$$

47. Faisons l'application de cette formule à l'hyperbole équilatère rapportée à son centre

$$r^2\cos 2\theta = 1, \quad f(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}, \quad f_1\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}\,\text{arc cos}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$f'(\theta) = -\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad f''(\theta) = -\frac{1 + \cos^2 2\theta}{\cos^{\frac{3}{2}} 2\theta} = -\frac{1 + r^4}{r}.$$

Il s'ensuit

$$F(r) = r, \quad \varphi(\delta) = \int \delta d\delta = \frac{\delta^2}{2}. \tag{27}$$

Le potentiel sera donc

$$2V = \int \delta^2 \cdot rdr = \int\left\{r^2 + a^2 - 2ar\cos\left[\alpha - \frac{1}{2}\,\text{arc cos}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]\right\}rdr$$

$$= \int r^3dr + a^2\int rdr$$

$$-2a\cos\alpha\int r^2\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]dr$$

$$-2a\sin\alpha\int r^2\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]dr.$$

Mais on a identiquement

$$\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{r^2}}{2}}=\frac{\sqrt{r^2+1}}{r\sqrt{2}},$$

$$\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{r^2}}{2}}=\frac{\sqrt{r^2-1}}{r\sqrt{2}},$$

et par conséquent

$$\int r^2\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]dr=\frac{1}{\sqrt{2}}\int r\sqrt{r^2+1}\,dr$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(r^2+1\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\int r^2\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]dr=\frac{1}{\sqrt{2}}\int r\sqrt{r^2-1}\,dr$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(r^2-1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

De là l'expression du potentiel général de l'énergie

$$24\mathrm{V}=3r^4+6a^2r^2-4\sqrt{2}\,a\cos\alpha\,(r^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$-4\sqrt{2}\,a\sin\alpha\,(r^2-1)^{\frac{3}{2}}.$$

ou encore

$$24\mathrm{V}=\frac{3}{\cos^2 2\theta}+\frac{6a^2}{\cos 2\theta}$$

$$-4\sqrt{2}\,a\cos\alpha\left(\frac{1}{\cos 2\theta}+1\right)^{\frac{3}{2}}-4\sqrt{2}\,a\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos 2\theta}-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{6a^2}{\cos 2\theta}-\frac{16a}{\cos^{\frac{3}{2}} 2\theta}\left[\cos\alpha\cos^3\theta+\sin\alpha\sin^3\theta\right]+\frac{3}{\cos^2 2\theta}.$$

Telle est l'intégrale indéfinie. Si nous faisons partir les arcs du sommet de l'hyperbole, en intégrant à partir de zéro, il nous faut retrancher la valeur relative à cette limite

$$6a^2 - 16a\cos\alpha + 3,$$

ce qui donne définitivement

$$24V = \frac{12\sin^2\theta}{\cos 2\theta}a^2 - \frac{16a}{\cos^{\frac{3}{2}} 2\theta}\left[(\cos^3\theta - 1)\cos\alpha + \sin^3\theta\sin\alpha\right] + 3\,\text{tang}^2\, 2\theta.$$

48. Nous retrouvons encore comme lignes de niveau des cercles, et nous pouvions nous y attendre (nº 28), puisque nous venons de reconnaître (27) que la force centrale est ici proportionnelle à la distance.

Cherchons d'après cela le lieu géométrique formé par les centres de ces cercles, lorsque le mobile décrit l'hyperbole. Leurs coordonnées (b, β) sont

$$b = \frac{2}{3\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad \text{tang}\,\beta = \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta - 1}.$$

La première donne

$$\cos 2\theta = \frac{4}{9b^2},$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{9b^2 - 4}}{3\sqrt{2}}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{9b^2 + 4}}{3\sqrt{2}},$$

et il vient dès lors

$$\text{tang}\,\beta = \frac{(9b^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}{(9b^2 - 4)^{\frac{3}{2}} - 1}.$$

Telle est l'équation du lieu cherché. Nous pouvons l'écrire de cette manière plus symétrique

$$(9b^2 - 4)^{\frac{3}{2}}\sin\beta - (9b^2 + 4)^{\frac{3}{2}}\cos\beta = \sin\beta.$$

Elle est également susceptible de cette forme rationnelle

$$(2^{10}3^6b^4 + 2^8 + 1)\sin^4\beta + [2^{10}3^6b^4 + 2^5 3^3(2^7 + 1)b^2 + 2^7]\sin^2\beta + (2^4 3^3 b^2 + 2^6)^2 = 0,$$

ou en effectuant

$$(746\,496\,b^4 + 257)\sin^4\beta + [746\,496\,b^4 + 111\,456\,b^2 + 128]\sin^2\beta + (432\,b^2 + 64)^2 = 0,$$

équation résoluble à la fois par rapport à b ou à $\sin\beta$.

§ 9

POTENTIEL DE LA FORCE CENTRIPÈTE

49. La répartition de l'énergie acquise vdv sur l'élément ds de la trajectoire attribue à cette courbe, comme densité en chacun de ses points, $\frac{vdv}{ds}$ c'est-à-dire $\frac{dv}{dt}$, ou la force tangentielle.

Par analogie, imaginons maintenant une densité représentée par la force centripète $\frac{v^2}{\rho}$. L'élément matériel qu'elle affectera dès lors à l'arc parcouru ds, sera $\frac{v^2}{\rho}\,ds$ ou $v^2 d\omega$, en représentant comme ci-dessus par ω l'angle de contingence. Il sera dès lors naturel, pour procéder à la recherche du *potentiel de la force centripète,* de revenir à l'emploi des coordonnées intrinsèques, en reprenant nos notations du n° 22,

$$t = f(s), \quad dt = f'(s)ds,$$

$$v = \frac{1}{f'(s)} = f'\frac{1}{[\psi(\omega)]}, \quad v^2 d\omega = \frac{d\omega}{f'^2\,[\psi(\omega)]}.$$

On aura ainsi pour ce potentiel, supposé d'ordre n et spécial à l'origine

$$V_n = \int_{\omega_0}^{\omega} \left\{ \left[\int_0^{\omega} \psi'(\omega)\sin\omega d\omega \right]^2 + \left[\int_{\omega_0}^{\omega} \psi'(\omega)\cos\omega d\omega \right]^2 \right\}^{\frac{n}{2}} \frac{d\omega}{f^{2'}\,[\psi(\omega)]}.$$

50. Je ne présenterai pour cette formule générale qu'une seule application, relative à la développante de cercle d'ordre quelconque k, laquelle a pour équation naturelle

$$s = \omega^{k+1}.$$

Nous supposerons en même temps, comme loi de mouvement, que l'espace parcouru soit proportionnel à une puissance arbitraire du temps

$$s = t^p, \quad v = pt^{p-1} = ps^{\frac{p-1}{p}} = p\omega^{\frac{(p-1)(k+1)}{p}}.$$

Le potentiel d'ordre quelconque n deviendra par là

$$\frac{V_n}{p^2} = \int_{\omega_0}^{\omega} r^n \omega^{\frac{2(p-1)(k+1)}{p}} d\omega.$$

Pour l'évaluation du rayon vecteur qui joint le mobile au point de rebroussement pris comme origine, nous introduirons les abréviations suivantes représentant ces deux séries limitées

$$P = \omega^k - k(k-1)\,\omega^{k-2} + k(k-1)(k-2)(k-3)\,\omega^{k-4} + \cdots$$

$$Q = k\omega^{k-1} - k(k-1)(k-2)\,\omega^{k-3} + \cdots$$

Il vient ainsi

$$\int_0^{\omega} \omega^k \sin \omega d\omega = Q \sin \omega - P \cos \omega + P_0,$$

$$\int_0^{\omega} \omega^k \cos \omega d\omega = P \sin \omega + Q \cos \omega - Q_0,$$

si l'on désigne par P_0, Q_0 les termes constants qui terminent les suites P et Q. Il n'en existe d'ailleurs jamais qu'un seul, qui se trouve placé, suivant la parité de k, dans l'un ou l'autre développement.

La valeur de r^2 devient dès lors

$$r^2 = P^2 + Q^2 + P_0^2 + Q_0^2 - 2(PQ_0 - QP_0)\sin \omega$$
$$- 2(PP_0 + QQ_0)\cos \omega.$$

Elle ne renferme que des puissances entières et positives de ω, soit isolées, soit multipliées par $\sin\omega$ ou $\cos\omega$. Si donc n est pair et positif, il suffira, pour que l'intégration puisse complètement s'effectüer, que l'exposant

$$\frac{2(p-1)(k+1)}{p}$$

soit de son côté un nombre entier et positif.

§ 10

POTENTIEL DE LA FORCE TOTALE

51. Nous adopterons enfin comme densité la force totale. Cet élément nous présente à la vérité deux aspects distincts : son intensité l, et son inclinaison λ sur la normale, à laquelle nous substituerons de préférence l'emploi de $\operatorname{tang}\lambda$. De là deux sortes nouvelles de potentiels.

Comme loi de mouvement, je m'attacherai d'abord à la rotation uniforme de la tangente

$$\omega = t, \quad dt = d\omega,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\omega} = \rho,$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \rho, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d\rho}{d\omega} = \rho',$$

en appelant ρ' le rayon de courbure de la développée de la trajectoire. Il s'ensuit pour les deux densités

$$l = \sqrt{\rho^2 + \rho^{2\prime}}, \quad \operatorname{tang}\lambda = \frac{\rho'}{\rho}.$$

En les multipliant par ds (c'est-à-dire $\rho d\omega$) et par r^n, nous obtiendrons les potentiels correspondants

$$V_n = \int r^n \rho \sqrt{\rho^2 + \rho^{2\prime}}\, d\omega, \quad W_n = \int r^n \rho' d\omega.$$

52. Prenons comme premier exemple la spirale logarithmique,

en appelant α l'angle constant de sa normale avec le rayon vecteur. On connaît son équation naturelle

$$\rho = e^{\omega \operatorname{tang} \alpha}, \quad \rho' = \operatorname{tang} \alpha e^{\omega \operatorname{tang} \alpha},$$

$$l = \frac{e^{\omega}}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{tang} \lambda = \operatorname{tang} \alpha, \quad \lambda = \alpha.$$

La densité est donc constante pour le second potentiel W. Il sort dès lors de notre sujet d'études pour rentrer dans la pure géométrie, où nous ne le suivrons pas.

Quant au premier, il devient

$$V_n \cos \alpha = \int_{-\infty}^{\omega} r^n e^{2\omega \operatorname{tang} \alpha} d\omega.$$

On sait que le rayon vecteur de cette spirale a pour valeur

$$r = \rho \cos \alpha = e^{\operatorname{tang} \omega} \cos \alpha.$$

Il vient donc

$$V_n \cos^{1-n} \alpha = \int_{-\infty}^{\omega} e^{(n+2)\omega \operatorname{tang} \alpha} d\omega = \frac{e^{(n+2)\omega \operatorname{tang} \alpha}}{(n+2) \operatorname{tang} \alpha},$$

$$(n+2) \frac{\sin \alpha}{\cos^n \alpha} V_n = \rho^{n+2}.$$

53. Je considérerai comme second exemple le *pendule cycloïdal*. La trajectoire est une cycloïde renversée, que nous rapportons à son sommet

$$s = \sin \omega, \quad \rho = \cos \omega, \quad \rho' = - \sin \omega,$$

et la loi de mouvement l'isochronisme, avec lequel (17) nous avons $\left(\text{en prenant pour simplifier } T = \frac{\pi}{2}\right)$

$$dt = - d\omega.$$

La tangente tourne donc uniformément, et nous sommes bien dans les conditions voulues.

Il vient alors

$$l = 1, \quad \operatorname{tang} \lambda = -\operatorname{tang} \omega, \quad \lambda = -\omega.$$

C'est actuellement la première densité qui est devenue constante, et son potentiel V qui rentre dans la géométrie ordinaire.

Le second a comme expression

$$-W_n = \int_{\omega_0}^{\omega} r^n \sin \omega \, d\omega.$$

Pour la détermination de r, il nous vient

$$x = \int_0^{\omega} \rho d\omega \cdot \cos \omega = \int_0^{\omega} \cos^2 \omega \, d\omega = \frac{2\omega + \sin 2\omega}{4},$$

$$y = \int_0^{\omega} \rho d\omega \cdot \sin \omega = \int_0^{\omega} \sin \omega \cos \omega \, d\omega = \frac{\sin^2 \omega}{2},$$

et par conséquent

$$-2^{2n} W_n = \int_{\omega_0}^{\omega} \sin \omega \Big[(2\omega + \sin 2\omega)^2 + 4 \sin^4 \omega \Big]^{\frac{n}{2}} d\omega,$$

intégration qu'il sera possible d'effectuer toutes les fois que n sera pair et positif.

54. On peut se demander s'il existe des trajectoires pour lesquelles les recherches de V et W rentrent l'une dans l'autre ; ces deux potentiels devenant alors égaux, ou plus généralement proportionnels.

Nous poserons à cet effet, avec une constante m

$$l = m \operatorname{tang} \lambda,$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = m^2 \frac{\rho'^2}{\rho^2}, \quad \rho'^2 = \frac{\rho^4}{m^2 - \rho^2},$$

(28) $$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{\rho^2}{\sqrt{m^2 - \rho^2}}, \quad d\omega = \frac{\sqrt{m^2 - \rho^2}}{\rho^2},$$

$$\omega = \int \frac{\sqrt{m^2 - \rho^2}}{\rho} d\rho,$$

et en effectuant

$$\omega = \text{arc cos}\,\frac{\rho}{m} - \sqrt{\frac{m^2}{\rho^2} - 1}.$$

Telles sont les trajectoires en question.

Si nous faisons

$$\frac{\rho}{m} = \cos\mu,$$

cette équation prend la forme très simple

$$\omega = \mu - \text{tang}\,\mu.$$

Elle donne en outre (28)

$$d\rho = -\,m\sin\mu d\mu, \quad d\omega = -\,\text{tang}^2\,\mu d\mu,$$

et par conséquent

$$-\frac{x}{m} = \int \rho\cos\omega\, d\omega = \int \frac{\sin^2\mu}{\cos\mu}\cos(\mu - \text{tang}\,\mu)\, d\mu,$$

$$-\frac{y}{m} = \int \rho\sin\omega\, d\omega = \int \frac{\sin^2\mu}{\cos\mu}\sin(\mu - \text{tang}\,\mu)\, d\mu.$$

Malheureusement ces intégrations échappent aux méthodes connues, et nous ne pouvons formuler explicitement l'expression commune des deux potentiels $V = mW$.

55. La force totale nous présente encore un troisième élément, en outre de son intensité l et de son inclinaison λ, à savoir son moment L relatif à l'origine. Nous pouvons encore l'adopter comme densité, et rattacher ainsi à cette force un troisième potentiel U.

Le moment de la résultante l est égal à la somme de ceux de ses composantes ρ et ρ', dont les bras de levier sont parallèles à la tangente et à la normale, inclinées elles-mêmes sous l'angle ω sur celles de l'origine. Il vient donc

$$\begin{aligned} L &= \rho\,(x\cos\omega + y\sin\omega) + \rho'\,(x\sin\omega - y\cos\omega) \\ &= x\,(\rho\cos\omega + \rho'\sin\omega) + y\,(\rho\sin\omega - \rho'\cos\omega). \end{aligned}$$

On obtient par conséquent U en multipliant cette densité par ds et par r^n

$$U_n = \int L\rho\,(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}\, d\omega.$$

56. Si l'on suppose l'ordre n pair et positif, l'intégration pourra toujours s'effectuer avec la forme d'équation extrêmement générale qui exprime s ou ρ par la somme d'un nombre arbitraire de termes, composés chacun du produit d'un coefficient constant par une exponentielle quelconque, et des puissances entières et positives (¹) de l'angle de contingence et de divers sinus et cosinus qui en dépendent.

En effet, d'après les méthodes classiques, la différentiation destinée à faire connaître ρ', aussi bien que les multiplications ou élévations aux puissances, et les intégrations par parties, conserveront jusqu'au bout le même type, en en variant les éléments, jusqu'à sa réduction de proche en proche à des formes immédiatement intégrables.

57. Nous traiterons maintenant la question dans toute sa généralité, avec une loi de mouvement quelconque, et non plus la rotation uniforme de la tangente, à laquelle nous nous étions d'abord limités.

Rapportons à cet effet le mouvement à trois axes rectangulaires. La force totale aura pour composantes

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

Les formules classiques font connaître son moment pour un axe quelconque mené par l'origine sous des angles donnés, en fonction des trois moments relatifs aux axes coordonnés. Il nous suffit donc d'évaluer ces derniers ; et nous pouvons même, puisque leurs expressions sont semblables, nous borner ici à celui qui est pris par rapport à l'axe Oz

$$L = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Cette densité doit être multipliée par l'arc infinitésimal

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

(¹) Et même certaines puissances négatives, que je ne m'arrête pas à spécifier.

et par la n^e puissance du rayon vecteur :

$$r^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}},$$

pour former l'expression du potentiel correspondant

$$U_n = \int \left(x\frac{d^2y}{dt^2}\right) - y\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}$$
$$\times \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt.$$

58. Considérons comme exemple un mobile dont les coordonnées varient proportionnellement à des puissances du temps en progression arithmétique

$$x = at^p, \quad y = bt^{p+q}, \quad z = ct^{p+2q}.$$

On en déduit, pour les projections de la trajectoire, ces trois courbes paraboliques

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{p+q}} = \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{p+2q}}.$$

Il vient d'autre part

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \Big[(p+q)(p+q-1) - p(p-1)\Big]abt^{2p+q-1}$$
$$\times \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$
$$= t^{p-1}\sqrt{p^2a^2 + (p+q)^2b^2t^{2q} + (p+2q)^2c^2t^{4q}},$$
$$r = t^p\sqrt{a^2 + b^2t^{2q} + c^2t^{4q}}.$$

Si donc nous introduisons la variable auxiliaire

$$w = t^{2q}, \quad t = w^{\frac{1}{2q}}, \quad dt = \frac{1}{2q}\, w^{\frac{1}{2q}-1}\, dw,$$

nous aurons

$$\frac{U_n}{(2p+q-1)ab} = \int w^{\frac{(n+3)p-q-2}{2q}}(a^2 + b^2w + c^2w^2)^{\frac{n}{2}}$$
$$\times \sqrt{p^2a^2 + (p+q)^2b^2w + (p+2q)^2c^2w^2}.$$

Il suffira par conséquent, lorsque l'ordre n sera pair, positif ou négatif, que le rapport

$$\frac{(n+3)p-q-2}{2q},$$

soit lui-même égal à un nombre entier N, de valeur et de signe quelconques, pour que la fonction devienne rationnelle, sauf un seul radical carré portant sur un trinôme du second degré.

Si par exemple on déduit de cette condition la valeur de p en fonction de N et q, celle de ce dernier paramètre restera complètement arbitraire (¹).

§ 11

POTENTIEL PLAN

59. Je passe maintenant à un ordre d'idées un peu différent.

Nous imaginerons que le mobile qui, en raison de son mouvement, imprime lui-même en chaque point de sa trajectoire une densité Δ, réglée d'après un élément arbitrairement choisi dans la dynamique générale, au lieu de déposer sur l'arc ds de cette courbe la masse correspondante Δds, la dissémine uniformément dans un plan relié à cet arc suivant une loi déterminée, de telle sorte que la masse D par unité de superficie varie de l'un à l'autre de ces plans proportionnellement à Δds.

Nous chercherons, par rapport à un point quelconque (ξ, η, ζ) le potentiel général du système matériel ainsi constitué.

(¹) En multipliant et divisant tout à la fois l'expression à intégrer par le radical, on le fait passer en dénominateur. Elle se décompose alors, si n est positif, en plusieurs autres de la forme

$$\int \frac{w^k\,dw}{\sqrt{Aw^2+Bw+C}}.$$

Or j'ai eu l'occasion, dans une autre recherche (Haton de la Goupillière, *Thèse d'astronomie*, 1857, Paris, Mallet-Bachelier, p. 19), d'évaluer explicitement cette intégrale, quel que soit le signe de l'entier k. Mais je juge inutile de transcrire ici ce résultat.

Commençons par évaluer l'action qu'exerce sur ce point l'un des plans ainsi matérialisés. Soit δ sa distance MP au point attiré M, r la longueur PN qui sépare le pied P de la perpendiculaire d'un point N quelconque du plan. En quadrillant ce dernier, à partir de P, par un système de rayons vecteurs et de cercles concentriques, nous circonscrirons autour de N une aire infinitésimale de masse $\mathrm{D}rd\theta dr$. Sa force attractive, dirigée suivant MN, s'obtiendra en multipliant par $(r^2+\delta^2)^{\frac{p}{2}}$, si l'action élémentaire procède suivant la puissance p de la distance, et nous en obtiendrons la composante normale au plan en multipliant de nouveau par $\frac{\delta}{\sqrt{r^2+\delta^2}}$. Enfin la résultante, de direction MP, pour un disque circulaire de rayon égal à un multiple m de δ, s'évaluera en intégrant de 0 à 2π pour θ, et de 0 à $m\delta$ pour r

$$2\pi\mathrm{D}\delta \int_0^{m\delta} r\left(r^2+\delta^2\right)^{\frac{p-1}{2}} dr$$

$$= \pi\mathrm{D}\delta^{p+2} \int_0^{m} \left[\left(\frac{r}{\delta}\right)^2+1\right]^{\frac{p-1}{2}} \cdot 2\left(\frac{r}{\delta}\right) d\left(\frac{r}{\delta}\right)$$

$$= \pi\mathrm{D}\delta^{p+1} \int_0^{m^2+1} \alpha^{\frac{p-1}{2}}\, d\alpha = \frac{2\pi\left(m^2+1\right)^{\frac{p+1}{2}}}{p+1} \cdot \mathrm{D}\delta^{p+2}.$$

On voit d'après cela que, pour deux disques pris, avec la même valeur de m, dans des plans de densité et d'éloignement différents, les résultantes seront dans le rapport de ces densités et des puissances $p+2$ des distances. Telle est la loi que nous étendrons par la pensée à des disques dépassant toute mesure.

Le potentiel ainsi défini aura dès lors pour fonction caractéristique δ^{p+3} (1). Nous nous rappellerons donc que tout *potentiel*

---

(1) Nous devons toutefois exclure l'hypothèse $p = -3$, pour laquelle la dernière intégration donnerait Log δ.

plan d'ordre n correspond à une action élémentaire du degré $n-3$.

60. Je suppose que l'équation du plan mobile

$$aX + bY + cZ = h,$$

soit mise *sous sa forme trigonométrique*, c'est-à-dire que a, b, c représentent expressément ses cosinus-directeurs, et h sa distance à l'origine.

Dans ces conditions, sa distance au point arbitraire (ξ, η, ζ) a pour valeur

$$\delta = a\xi + b\eta + c\zeta - h.$$

La masse D par unité de superficie étant d'ailleurs, pour chaque plan, proportionnelle à Δds, nous pouvons prendre comme expression du potentiel plan d'ordre n

$$V_n = \int \Delta ds\,(a\xi + b\eta + c\zeta - h)^n.$$

61. Supposons comme première application générale que le plan entraîné par le mobile reste normal à la trajectoire. Il aura pour équation

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0,$$

ou sous la forme trigonométrique

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} - r\frac{dr}{ds} = 0,$$

si nous conservons la notation

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Il vient donc pour le potentiel plan d'ordre n

$$V_n = \int \Delta ds\left(\xi\frac{dx}{ds} + \eta\frac{dy}{ds} + \zeta\frac{dz}{ds} - r\frac{dr}{ds}\right)^n,$$

c'est-à-dire, en remplaçant ds par $v dt$

$$V_n = \int \Delta v^{1-n}\left(\xi\frac{dx}{dt} + \eta\frac{dy}{dt} + \zeta\frac{dz}{dt} - r\frac{dr}{dt}\right)^n dt.$$

Il ne restera plus qu'à remplacer d'après les équations du mouvement x, y, z, ainsi que Δ et v, en fonction de t, et à intégrer.

Lorsque l'ordre n est entier et positif, l'expression peut se développer d'après la formule de Newton suivant les divers produits de la forme $\xi^\alpha \eta^\beta \zeta^\gamma$. Si on égale le potentiel à une constante, on voit que cette équation des surfaces de niveau sera du n^e degré, avec diverses intégrales définies (fonctions de x, y, z, ou de t) comme coefficients des dites puissances.

62. Pour appliquer ces vues à un élément de la dynamique générale différent de ceux que nous avons employés jusqu'ici, je supposerai la densité Δ proportionnelle à une puissance m de la vitesse (¹). Le potentiel du plan normal deviendra dans ces conditions

$$\mathrm{V}_n = \int v^{m-n+1} \left(\xi \frac{dx}{dt} + \eta \frac{dy}{dt} + \zeta \frac{dz}{dt} - r \frac{dr}{dt}\right)^n dt.$$

Dans le cas où l'on adopterait la valeur spéciale

$$m = n - 1 = p + 2,$$

il resterait plus simplement

$$\mathrm{V}_n = \int \left(\xi \frac{dx}{dt} + \eta \frac{dy}{dt} + \zeta \frac{dz}{dt} - r \frac{dr}{dt}\right)^n dt.$$

63. Reprenons à cet égard l'exemple du n° 58, mais avec une entière généralité, sans aucune restriction pour les exposants

$$x = at^\alpha, \quad y = bt^\beta, \quad z = ct^\gamma.$$

Il s'ensuit la trajectoire

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

(¹) Si par exemple $m = -1$, nous retrouvons le temps de parcours. Avec $m = 1$, on obtient l'élément vds qui forme l'objet du théorème de la moindre action. Pour $m = 2$, la densité varie en raison de la force vive *actuelle* ; ce qu'il ne faut pas confondre avec le potentiel de l'énergie *successivement acquise* (§§ 7 et 8) pour lequel la densité est, non pas v^2, mais $\frac{dr}{dt}$ (n° 49).

et comme potentiel de la puissance $n-1$ de la vitesse

$$V_n = \int \frac{dt}{t^n} \Big(\alpha a \xi t^{\alpha} + \beta b \eta t^{\beta} + \gamma c \zeta t^{\gamma}$$
$$- \alpha a^2 t^{2\alpha} - \beta b^2 t^{2\beta} - \gamma c^2 t^{2\gamma} \Big)^n .$$

Admettons par exemple la loi de gravitation ($p=-2$, $n=1$), on aura explicitement

$$2V_1 = 2a\xi t^{\alpha} + 2b\eta t^{\beta} + 2c\zeta t^{\gamma} - a^2 t^{2\alpha} - b^2 t^{2\beta} - c^2 t^{2\gamma},$$

ou encore

$$2V_1 = 2(x\xi + y\eta + z\zeta) - r^2.$$

64. Passons à une seconde application générale, en substituant au plan normal le plan osculateur.

Si l'on fait pour abréger

$$A = \frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2},$$
$$B = \frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2},$$
$$C = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2},$$
$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

il vient comme équation trigonométrique de ce plan

$$\frac{A}{D}(X-x) + \frac{B}{D}(Y-y) + \frac{C}{D}(Z-z) = 0,$$

et pour son potentiel général, quelle que soit la loi de densité

$$V_n = \int \frac{\Delta ds}{D^n}\Big[A\xi + B\eta + C\zeta - \big(Ax + By + Cz\big)\Big]^n .$$

65. Considérons par exemple le mouvement d'un point qui s'élève en hélice proportionnellement à une puissance quelconque du temps.

Il aura pour équations

$$x = a\sin\left(t^k\right), \quad y = a\cos\left(t^k\right), \quad z = bt^k .$$

On trouve en effectuant tous les calculs

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(t^k\right),\quad \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(t^k\right),$$

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

et par suite

$$\frac{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}{a^n\;b^n}\mathrm{V}_n=\int\Delta\mathrm{T}^n ds,$$

si l'on emploie l'abréviation suivante

$$\mathrm{T}=\left(\frac{\xi}{a}-1\right)\cos\left(t^k\right)-\left(\frac{\eta}{a}-1\right)\sin\left(t^k\right)-\left(\frac{\zeta}{b}-t^k\right).$$

Nous avons d'ailleurs pour l'arc élémentaire

$$ds=k\sqrt{a^2+b^2}\,t^{k-1}\,dt.$$

Comme loi de densité, nous adopterons une puissance quelconque du temps, que nous pouvons toujours prendre sous la forme

$$\Delta=t^{qk}.$$

Il viendra dans ces conditions

$$\frac{(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}}}{ka^n\;b^n}\mathrm{V}_n=\int\mathrm{T}^n t^{(q+1)k-1}dt.$$

Introduisons la variable auxiliaire

$$\upsilon=t^k,\quad t=\upsilon^{\frac{1}{k}},\quad dt=\frac{1}{k}\upsilon^{\frac{1}{k}-1}d\upsilon.$$

Il reste alors

$$\frac{(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}}}{a^n b^n}\mathrm{V}_n=\int\upsilon^q\left[\left(\frac{\xi}{a}-1\right)\cos\upsilon\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\eta}{a}-1\right)\sin\upsilon-\upsilon+\frac{\zeta}{b}\right]^n d\upsilon,$$

expression qui pourra toujours s'intégrer lorsque n et q seront des nombres entiers et positifs.

Supposons par exemple $n = q = 1$, il viendra en intégrant à partir de l'origine du temps

$$\frac{V_1}{ab} = \left(\frac{\xi}{a} - 1\right)\left(\upsilon \sin \upsilon + \cos \upsilon - 1\right)$$
$$+ \left(\frac{\eta}{a} - 1\right)\left(\upsilon \cos \upsilon - \sin \upsilon\right) + \frac{\zeta}{b}\upsilon - \frac{\upsilon^2}{2},$$

ou encore

$$abV_1 = b(\xi - a)(xz + by - ab)$$
$$+ b(\eta - a)(yz - bx) + a^2\zeta z - \frac{a^2z^2}{2}.$$

66. Envisageons en troisième lieu le plan qui est mené par le mobile perpendiculairement à son rayon vecteur. Il a pour équation trigonométrique

$$(X - x)\frac{x}{r} + (Y - y)\frac{y}{r} + (Z - z)\frac{z}{r} = 0.$$

L'expression de la distance devient donc

$$\delta = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r} - r,$$

et celle du potentiel

$$V_n = \int \frac{\Delta ds}{r^n}\left(x\xi + y\eta + z\zeta - r^2\right)^n.$$

J'adopterai la densité $\Delta = \frac{1}{v}$, afin de revenir au temps de parcours.

Supposons également que le mouvement s'effectue sur une sphère ($r = 1$), et passons aux coordonnées géographiques (θ, λ). Il viendra dans ces conditions

$$(29)\quad V_n = \int \left(\xi \sin \lambda \cos \theta + \eta \sin \lambda \sin \theta + \zeta \cos \lambda - 1\right)^n dt,$$

expression que l'on intégrera après avoir remplacé λ et θ en fonction de t d'après les équations du mouvement.

67. Je prendrai comme exemple le déplacement sphérique dans lequel la longitude et la colatitude varient proportionnellement au temps

$$\theta = at, \quad \lambda = mat,$$

il en résulte comme équation de la trajectoire

$$\theta = m\lambda,$$

c'est-à-dire la courbe appelée *clelia* par Guido-Grandi (¹). Un cas particulier ($m = 4$) avait été déjà envisagé dans l'antiquité par Pappus (²). On en rencontre un autre ($m = 1$) dans la célèbre courbe de Viviani (³). L'intégration (29) pourra s'effectuer, quel que soit m, pour toute valeur entière et positive de n.

Nous adopterons par exemple la loi de gravitation ($n = 1$, $p = -2$), en préparant la différentielle de la manière suivante :

$$2V_1 = \int dt \left\{ \xi \Big[\sin(a+b)t + \sin(a-b)t \Big] \right.$$
$$\left. + \eta \Big[\cos(a-b)t - \cos(a+b)t \Big] + \zeta \cos at - 1 \right\}.$$

Il vient alors en intégrant à partir de l'origine du temps

$$2(b^2 - a^2)V_1 = \xi(a \cos at \cos bt + b \sin at \sin bt - a)$$
$$+ \eta(a \cos at \sin bt - b \sin at \cos bt) + (b^2 - a^2)\left(\frac{\zeta}{a} \sin at - t\right),$$

ou encore (⁴)

$$2(b^2 - a^2)V_1 = \xi(a \cos\lambda \cos\theta + b \sin\lambda \sin\theta - a)$$
$$+ \eta(a \cos\lambda \sin\theta - b \sin\lambda \cos\theta) + \frac{\zeta \sin\lambda - \lambda}{a}.$$

(¹) Dans ses *Flores geometrici* (Gomes Teixeira, *Tratado de las curvas especiales notables*, pp. 521, 528, 531).

(²) *Collections mathématiques*, livre IV, proposition 30.

(³) Acta Eruditorum, 1692.

(⁴) Cette formule ne saurait s'appliquer à la courbe de Viviani ; mais il est aisé de traiter ce cas directement.

§ 12

POTENTIEL RECTILIGNE

68. Nous supposerons, pour terminer cette étude, qu'au lieu de disséminer la masse Δds dans un plan qu'il transporte avec lui, le mobile la répartisse à chaque instant sur une droite liée à l'arc ds d'une manière déterminée ; par exemple sa tangente, sa normale principale, sa binormale, son rayon vecteur, etc. Dans ces conditions, au lieu de la courbe matérielle qui perpétue, par sa loi de densité, l'image du mouvement après qu'il est accompli, il nous reste, comme témoin du phénomène évanoui, une surface réglée à génératrices homogènes, mais variables, qui accusent par leurs masses spécifiques les circonstances de ce mouvement.

Commençons par mettre en évidence la loi de l'attraction exercée par une semblable droite sur un point M placé à la distance $\delta = \mathrm{MP}$. Si $\mathrm{PN} = x$ désigne le segment qui sépare le pied P de la perpendiculaire d'un élément dx, de masse $\mathrm{D}dx$, et si l'action élémentaire s'exerce suivant la puissance q de la distance de deux points qui se sollicitent mutuellement, l'attraction s'obtiendra en multipliant $\mathrm{D}dx$ par $(x^2+\delta^2)^{\frac{q}{2}}$; sa composante normale, en multipliant par $\frac{\delta}{\sqrt{x^2+\delta^2}}$; et enfin la résultante, en doublant l'intégrale prise entre zéro et $m\delta$, pour embrasser l'ensemble de deux segments égaux s'étendant d'un côté et de l'autre de la perpendiculaire. Il vient ainsi

$$2\mathrm{D}\delta\int_0^{m\delta}(x^2+\delta^2)^{\frac{q-1}{2}}\,dx = 2\mathrm{D}\delta^{q+1}\int_0^{m}\left[\left(\frac{x}{\delta}\right)^2+1\right]^{\frac{q-1}{2}}d\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

$$= 2\mathrm{D}\delta^{q+1}\int_0^{m}\left(\alpha^2+1\right)^{\frac{q-1}{2}}d\alpha.$$

Pour deux droites matérielles, prises avec la même valeur de m, mais des densités D et des éloignements δ différents, les attractions seront donc proportionnelles à ces densités et à la puissance

$q+1$ des distances respectives. Telle est la loi que nous étendrons par la pensée à des segments dépassant toute mesure.

La fonction caractéristique du *potentiel rectiligne* ainsi défini sera dès lors δ^{q+2}; et nous devrons nous rappeler qu'un tel potentiel d'ordre n correspond à une loi d'action élémentaire du degré $n-2$. Il faut toutefois exclure le cas $q=-2$, qui s'intègre par logarithme. Il comprend notamment le remarquable *potentiel cylindrique* introduit par Lamé (1).

69. Nous représenterons la droite mobile par les équations

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}, \tag{30}$$

pour lesquelles il sera expressément entendu que a, b, c désignent ses cosinus-directeurs :

$$a^2+b^2+c^2=1.$$

Commençons par chercher sa distance δ au point arbitraire (ξ, η, ζ). A cet effet, nous conduisons par ce dernier un plan normal à cette ligne

$$a(X-\xi)+b(Y-\eta)+c(Z-\zeta)=0.$$

Les inconnues X, Y, Z que déterminent ces trois relations sont les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée sur la droite ; et sa longueur sera

$$\delta^2=(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2.$$

L'élimination fournit à cet effet les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
X-\xi &= ab(\eta-y)+ac(\zeta-z)-(b^2+c^2)(\xi-x),\\
Y-\eta &= bc(\zeta-z)+ba(\xi-x)-(c^2+a^2)(\eta-y),\\
Z-\zeta &= ca(\xi-x)+cb(\eta-y)-(a^2+b^2)(\zeta-z).
\end{aligned}$$

---

(1) Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, 1859, p. 171. — Haton de la Goupillière, *Nouvelle théorie générale des lignes isothermes et du potentiel cylindrique* (Journal de l'École polytechnique, XXXVIIIe cahier. — Haton de la Goupillière, *Sur les potentiels de deux grilles parcourues par des courants de même sens ou de sens opposés* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 14 février 1859. — Haton de la Goupillière, *Transformation propre à conserver le caractère du potentiel cylindrique* (Centenaire de la Société philomathique de France, in-4°, p. 27).

et pour la distance

$$\begin{aligned}\delta^2 = (b^2+c^2)(\xi-x)^2 + (c^2+a^2)(\eta-y)^2 + (a^2+b^2)(\zeta-z)^2 \\ - 2ab(\xi-x)(\eta-y) - 2bc(\eta-y)(\zeta-z) - 2ca(\zeta-z)(\xi-x),\end{aligned}$$

d'où la formule générale du potentiel rectiligne

$$\mathrm{V}_n = \int \Delta\delta^n\, ds.$$

Lorsque n et q seront entiers et pairs, l'équation des surfaces de niveau sera du degré n en ξ, η, ζ.

70. Comme application générale, je supposerai que la droite qui accompagne le mobile soit son rayon vecteur. C'est alors un cône à génératrices homogènes de densités variables qui subsistera comme témoin du mouvement après son accomplissement.

Pour exprimer que la droite (30) passe à l'origine, nous annulons les coordonnées courantes, ce qui donne

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = r.$$

Le potentiel se simplifie alors de la manière suivante

$$(31)\quad \mathrm{V}_n = \int \frac{\Delta ds}{r^n} \begin{bmatrix} \xi^2(y^2+z^2) + \eta^2(z^2+x^2) + \zeta^2(x^2+y^2) \\ -2\xi\eta xy - 2\eta\zeta yz - 2\zeta\xi zx \end{bmatrix}^{\frac{n^2}{2}}.$$

Si nous supposons l'action constante ($q = 0$, $n = 2$), les surfaces de niveau seront des ellipsoïdes qui ont leur centre à l'origine. Les carrés et les doubles produits de ξ, η, ζ, ont pour coefficients diverses intégrales définies, fonctions de leurs limites x, y, z, t.

En chaque situation du mobile, l'équation en S fera connaître, en fonction de ces limites, les axes de symétrie. On pourra également déterminer celles de ces positions pour lesquelles les axes de coordonnées auxquels se trouve rapporté le mouvement, deviendront eux-mêmes les axes principaux, par la disparition des doubles rectangles.

71. Considérons d'autre part comme droite mobile la tangente de la trajectoire.

Ses équations ont pour coefficients trigonométriques

$$a = \frac{1}{v}\frac{dx}{dt}, \quad b = \frac{1}{v}\frac{dy}{dt}, \quad c = \frac{1}{v}\frac{dz}{dt}.$$

Si donc on emploie l'abréviation suivante

$$\begin{aligned} H = (\xi - x)^2\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + (\eta - y)^2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \\ + (\zeta - z)^2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] \\ - 2(\xi - x)(\eta - y)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} - 2(\eta - y)(\zeta - z)\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} \\ -(\zeta - z)(\xi - x)\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt}, \end{aligned}$$

il vient

$$\delta^2 = \frac{H}{v^2}, \quad V_n = \int \Delta H^{\frac{n}{2}} v^{1-n}\, dt.$$

On aura en particulier comme potentiel rectiligne du temps de parcours $\left(\Delta = \frac{1}{v}\right)$:

$$V_n = \int \frac{H^{\frac{n}{2}}}{v^n}\, dt.$$

72. Je prendrai comme exemple un mobile dont les mouvements angulaires en longitude et en latitude s'effectuent uniformément sur une sphère, avec concordance des deux révolutions

$$\lambda = at, \quad \theta = at.$$

La trajectoire sera une courbe de Viviani

$$\lambda = \theta,$$

pour laquelle on a

$$x = \sin\theta\cos\theta, \quad y = \sin^2\theta, \quad z = \cos\theta,$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos 2\theta, \quad \frac{dy}{dt} = \sin 2\theta, \quad \frac{dz}{dt} = -\sin\theta,$$

$$\nu^2 = 1 + \sin^2\theta.$$

Si donc n est pair, l'intégration portera sur une fonction rationnelle de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, et l'on pourra l'effectuer en prenant comme variable auxiliaire $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$.

L'ÉQUATION DE FREDHOLM
ET LES PROBLÈMES
DE DIRICHLET ET DE NEUMANN

par **ROBERT D'ADHÉMAR**

CHAPITRE I — INTRODUCTION

Le but de ce Mémoire est d'exposer les éléments de la théorie des *Équations Intégrales* et quelques applications fondamentales à la *Physique mathématique*.

Soit l'équation de Laplace, dans l'espace :

$$(1)\qquad \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u = 0$$

ou, dans le plan :

$$(2)\qquad \delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0.$$

Le problème capital qui se pose ici n'est point le *Problème de Cauchy :* « détermination d'une solution par ses valeurs et celles des dérivées premières données sur un arc de courbe ouvert ou sur une portion de surface ouverte » — mais bien l'un des problèmes suivants :

Soit une surface fermée, ou une courbe fermée C ; soit D_i le domaine intérieur et D_e le domaine extérieur.

Appelons *harmonique* une fonction qui satisfait à l'équation (1) ou (2) et qui a des dérivées premières continues et des dérivées secondes continues.

Problème de Dirichlet intérieur : trouver une fonction harmonique dans D_i et prenant des valeurs données sur C.

Problème de Dirichlet extérieur : trouver une fonction harmonique dans D_e et *nulle à l'infini*, prenant des valeurs données sur C.

Problèmes de Neumann : mêmes questions, la donnée sur C étant non plus la fonction mais sa dérivée normale.

Je n'insiste pas sur la signification physique de ces problèmes et chacun sait que l'équation (2) est fondamentale dans la *Théorie des Fonctions* de Cauchy et dans la théorie des *Fonctions algébriques*, au point de vue de Riemann.

Rappelons seulement en deux mots l'historique de ces questions.

La possibilité du premier problème résultait pour Gauss, Dirichlet, Riemann, de ce qu'ils admettaient qu'un *minimum* d'une fonction est toujours effectivement *atteint*. C'était une vue géniale que d'affirmer cette possibilité, que nous appelons aujourd'hui « le principe de Dirichlet ». Mais on sait que Weierstrass a remis en question bien des postulats de l'ancien calcul des variations. En particulier il a montré l'insuffisance du raisonnement de Riemann.

L'on a alors cherché d'autres preuves du principe de Dirichlet. Récemment, d'ailleurs, M. Hilbert a repris avec rigueur l'ancien point de vue du minimum, que l'on pouvait craindre définitivement proscrit (1).

Nous avons donc là, aujourd'hui, une première méthode pour l'établissement du principe de Dirichlet, « la méthode des variations ».

Une seconde méthode est celle du « balayage » de M. Henri Poincaré, où l'on part d'une fonction non harmonique, pour arriver à une fonction harmonique après une infinité de remplacements d'une masse intérieure à une sphère par une masse répartie sur le bord. Le contour C n'est point ici nécessairement *convexe*.

L'on doit également des résultats de haute importance à M. Schwarz : méthode alternée et représentation conforme — mais la représentation conforme n'a pas son analogue dans l'espace. La méthode alternée fait passer du cas d'un contour *convexe* au cas d'un contour formé de contours partiels convexes.

---

(1) Travaux de MM. Hilbert, Lebesgue, Fubini, Beppo-Levi...

Très belle est encore la méthode de « la moyenne arithmétique » de M. Karl Neumann, relative aux contours *convexes.* M. Poincaré l'a reprise et perfectionnée, en des mémoires de capitale importance.

Et, à cette occasion, il a institué une théorie générale des « fonctions fondamentales » — fonctions dont les plus simples sont les polynômes de Laplace (déduits des X*n* de Legendre) et les produits de Lamé. Chacune de ces fonctions est harmonique et il en faut former une série convenable (comme dans la théorie des séries trigonométriques) pour que la solution prenne la valeur donnée sur C (¹).

Rappelons que W. Thomson (depuis : lord Kelvin) a ramené, par l'*inversion*, le problème extérieur au problème intérieur, — avec une différence notable, s'entend, entre les équations (1) et (2).

L'on sait aussi que, pour des *cas particuliers* assez simples, l'on peut résoudre le problème de Dirichlet par la « fonction de Green » — mais, en général, former cette fonction c'est résoudre le problème de Dirichlet. Il n'y a pas là une méthode essentiellement nouvelle. Franz Neumann, le premier, a étendu la notion de fonction de Green au *deuxième problème aux limites*, celui où l'on donne la dérivée normale. La méthode de Carl Neumann, pour le problème de Dirichlet, permet de passer du premier problème à ce deuxième problème (²).

Double raison de l'appeler « le problème de Neumann ».

Nous avons actuellement la « fonction de Neumann », la « fonction de M. F. Klein »... Chacun sait le rôle, dans l'Analyse, de l' « intégrale de Poisson », du « théorème de M. Harnack »... Mais nous n'avons pas la compétence et l'érudition voulues pour faire un historique. Allons droit à notre but.

Au potentiel de simple couche ou *potentiel simple* V, il faut adjoindre la notion de *potentiel double*, ou potentiel de double

---

(¹) Voir : Em. Picard, *Traité d'Analyse*. t. I, II et Henri Poincaré, *Le Potentiel newtonien*. Heine, *Kugelfunktionen*.

(²) J. Hadamard, *Leçon sur la propagation des Ondes*. Hermann, 1903.

couche W, notion introduite naturellement par la Théorie du Magnétisme (Gauss).

V, W et leurs dérivées normales satisfont à des relations très simples que nous donnons en détail.

Dès 1900, M. Fredholm [1] observe alors que les deux Problèmes de Dirichlet, comme ceux de Neumann, se ramènent à l'*équation intégrale* qui porte son nom :

$$\text{(F)} \qquad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 K(x,y)\,\varphi(y)dy = \psi(x)$$

ψ est donné : ce sera W_i dans le Problème de Dirichlet intérieur, etc.

K est *donné* : c'est le *noyau.*

L'inconnue est φ — (LA DENSITÉ).

Les problèmes *extérieur* et *intérieur* correspondent au changement de signe du paramètre λ.

L'équation (F), d'après M. Fredholm, se résout ainsi : l'on sait former deux fonctions entières en λ, $D(\lambda)$ et $\Delta(\lambda, x, y)$, d'où :

$$\varphi(x) = \psi(x) - \frac{\lambda \int_0^1 \Delta \times \psi(y)dy}{D}.$$

Ceci suppose $D(\lambda) \neq 0$. (Dorénavant nous écrirons constamment $\int$ au lieu de $\int_0^1$). Supposons $D(\lambda_0) = 0$. L'on sait former des fonctions entières en λ, Δ_1, Δ_2, ... Δ_n, ... telles que, si l'on a :

$$\Delta_1(\lambda_0) = \Delta_2(\lambda_0) = \ldots = \Delta_{q-1}(\lambda_0) = 0.$$

λ_0 est racine de $D(\lambda)$ d'ordre supérieur ou égal à q. Alors l'équation homogène

$$(\text{F}_\text{H}) \qquad \varphi(x) + \lambda_0 \int K(x, y)\,\varphi(y)dy = 0$$

---

(1) Les résultats principaux sont exposés dans mon livre : *Exercices et leçons d'Analyse*, Gauthier-Villars.

à q *solutions linéairement indépendantes* et l'équation (F) a une solution (donc une infinité) si *q conditions* portant sur ψ sont remplies.

La solution de (F) *est méromorphe en* λ *et* $\left(F_H\right)$ *n'a des solutions* (non nulles) *qu'en un point* λ_0 *racine de* $D(\lambda)$.

Cela étant établi, la discussion des Problèmes de Dirichlet et Neumann sera faite, d'après M. J. Plemelj. Les propriétés capitales des potentiels serviront à nous renseigner sur les racines λ_0 et nous conclurons :

Problèmes de *Dirichlet* (intérieur) et de *Neumann* (extérieur) : *possibles* du moins lorsque le contour C est bien régulier.

Problème de *Neumann* (intérieur) : *possible* seulement *si le flux total donné est nul.*

Problème de *Dirichlet* (extérieur) : dans le plan, il y a *une condition* de possibilité ; dans l'espace, il y a aussi une condition pour que la solution soit donnée par une *double couche*, mais l'*addition d'une simple couche* élimine *la condition*.

Après que nous connaissons, par les belles séries de Fredholm, la *forme générale* des solutions, il faut, bien entendu, revenir aux *propriétés particulières* des fonctions V et W mises en jeu, pour être renseigné sur les racines λ_0, que l'on ne pourrait pas obtenir directement.

Il faut bien noter que la méthode des Équations intégrales s'étend à d'autres *Équations aux dérivées partielles*, aux *Équations différentielles* et à de nombreux Problèmes fondamentaux de la *Physique* (théorie de la chaleur, élasticité, etc...).

Comme on le sait, la théorie des Équations intégrales a été abordée, à un point de vue tout nouveau, par M. Hilbert et M. E. Schmidt.

A cause de l'intérêt et de l'importance de ces problèmes, tout nouveaux dans la Science, nous indiquons ici quelques-uns des théorèmes d'Hilbert-Schmidt sur les Équations à noyau SYMÉTRIQUE. Soit l'équation homogène à noyau symétrique

$$\varphi(x) = \lambda \int K(x, y)\, \varphi(y) dy$$

K étant donné, il y a *au moins une* fonction (caractéristique) φ_0 et un nombre correspondant λ_0.

Les nombres λ_k sont tous réels.

Les fonctions φ_k sont orthogonales.

Enfin, si la série

$$\sum \varphi_k(x)\,\varphi_k(y)\,\frac{1}{\lambda_k}$$

est *convergente* (λ_k correspond à φ_k et les λ_k sont rangés par ordre de grandeur) — *elle représente le noyau* K.

Puis l'on obtient la représentation, à l'aide des φ_k, d'une fonction :

$$g(s) = \int K(s, t)p(t)dt$$

et un théorème capital, déduit, par M. Hilbert, de la théorie des *formes quadratiques :*

$$\int\int K(s, t)q(s)p(t)dsdt = \sum \frac{1}{\lambda_k} \int q(s)\varphi_k(s)ds \int p(t)\varphi_k(t)dt.$$

Ceci permet alors de donner une forme nouvelle à la solution d'une équation (F) à noyau symétrique, à l'aide des φ_k.

Ces théorèmes s'étendent, dans une certaine mesure seulement, aux noyaux NON SYMÉTRIQUES ; mais il ne sera pas question de ces extensions qui nous entraîneraient trop loin.

Nous terminons, pour le cas d'une Équation de Fredholm à noyau quelconque, par l'exposé d'une nouvelle résolution due à M. E. Schmidt.

Il est à peine nécessaire d'observer que les travaux de MM. Hilbert et Schmidt, donnant des *développements de fonctions arbitraires,* ont une importance capitale dans la *Physique mathématique.*

CHAPITRE II

Quelques théorèmes sur les potentiels et les fonctions harmoniques

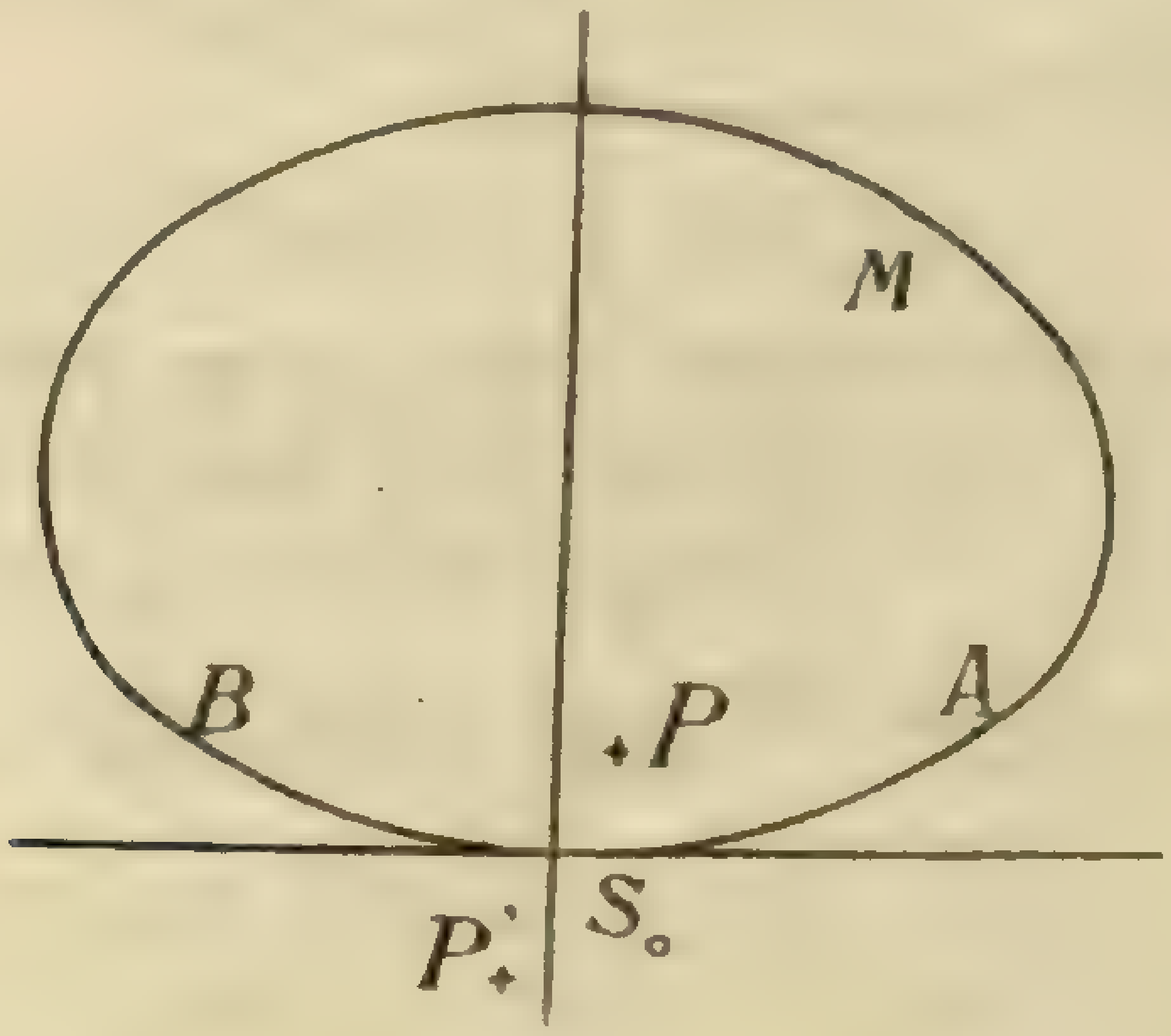
Nous résumons ce qui est strictement nécessaire pour l'étude de l'Équation de Laplace.

THÉORIE DU POTENTIEL

1. *Potentiel logarithmique de simple couche.* — Soit une courbe fermée, plane, sans singularités, et dont le *rayon de courbure* est *dérivable.*

Soit r_{ps} la distance d'un point quelconque p à un point de la courbe fixé par la valeur s de l'arc.

Soit $\mu(s)$ une fonction *dérivable* (densité) attachée à la courbe C.



Le potentiel est défini par l'intégrale prise tout le long de C :

$$(1) \qquad V_p = \int_C \mu(s) \log \frac{1}{r_{ps}} ds.$$

Dans l'espace on prend $\frac{1}{r}$ au lieu du *logarithme.*

Il est à remarquer que $\log \frac{1}{r}$ *dans le plan,* et $\frac{1}{r}$ *dans l'espace,* sont *les seules solutions en* r de l'Équation de Laplace. Nous retrouverons ceci dans le Problème de Dirichlet *extérieur*, qui présente une différence notable pour les cas du *plan* et de l'*espace*.

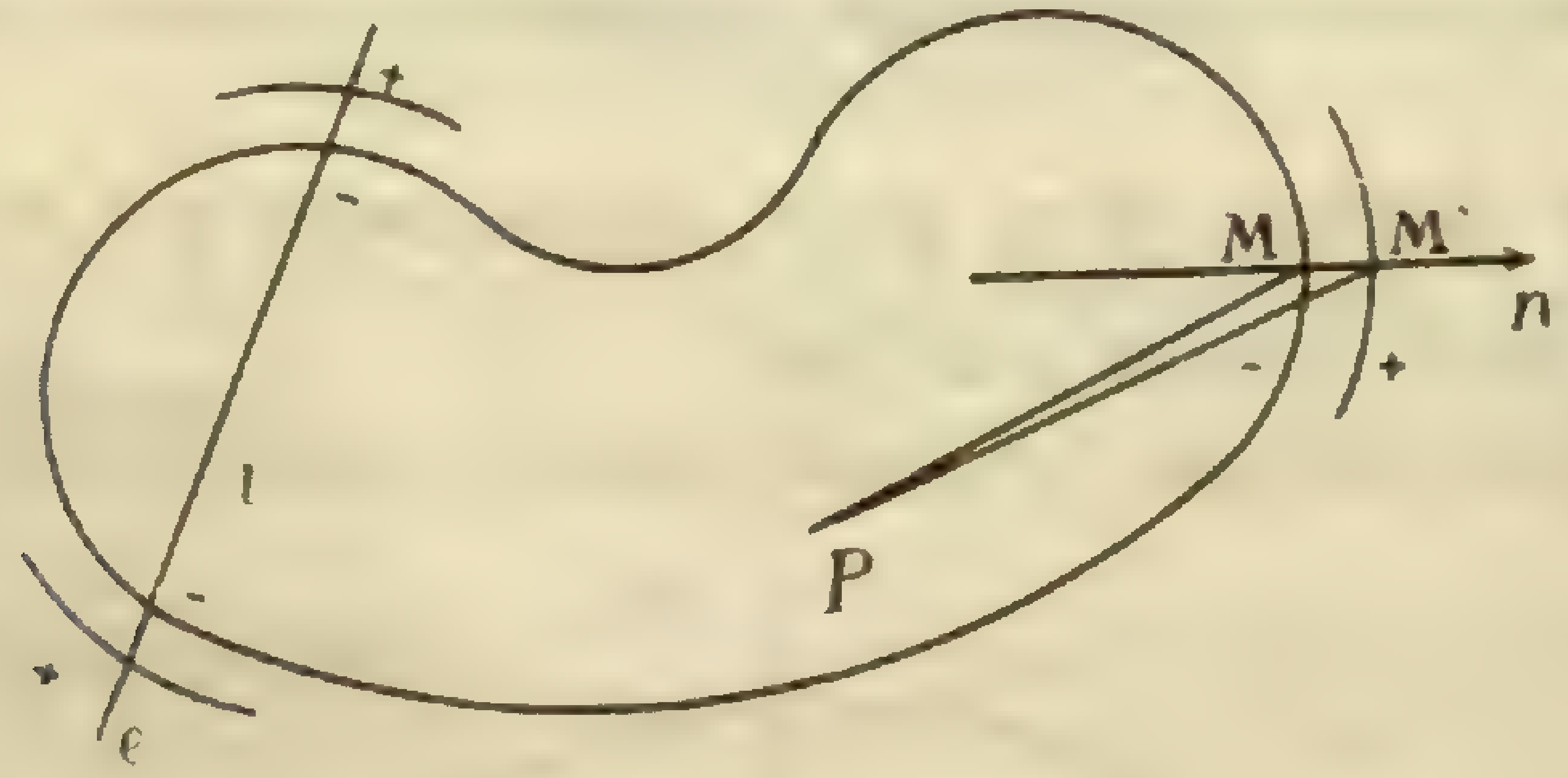
Nous avons, sur le *potentiel simple*, deux propositions immédiates :

1° *Si le point p vient sur la courbe,* en s_0, *le potentiel existe encore ;*

2° *Le potentiel est continu quand on traverse la courbe.*

Ces théorèmes classiques s'établissent facilement.

2. *Potentiel logarithmique de double couche.* — Soit un contour C, régulier. Au point M, nous avons une masse -1, au point voisin M′, sur la normale *extérieure*, une masse $+1$.



L'ensemble des deux masses crée, en un point P, un potentiel égal à

$$U = \log \frac{1}{PM'} - \log \frac{1}{PM}, \tag{1}$$

or, l'on a :

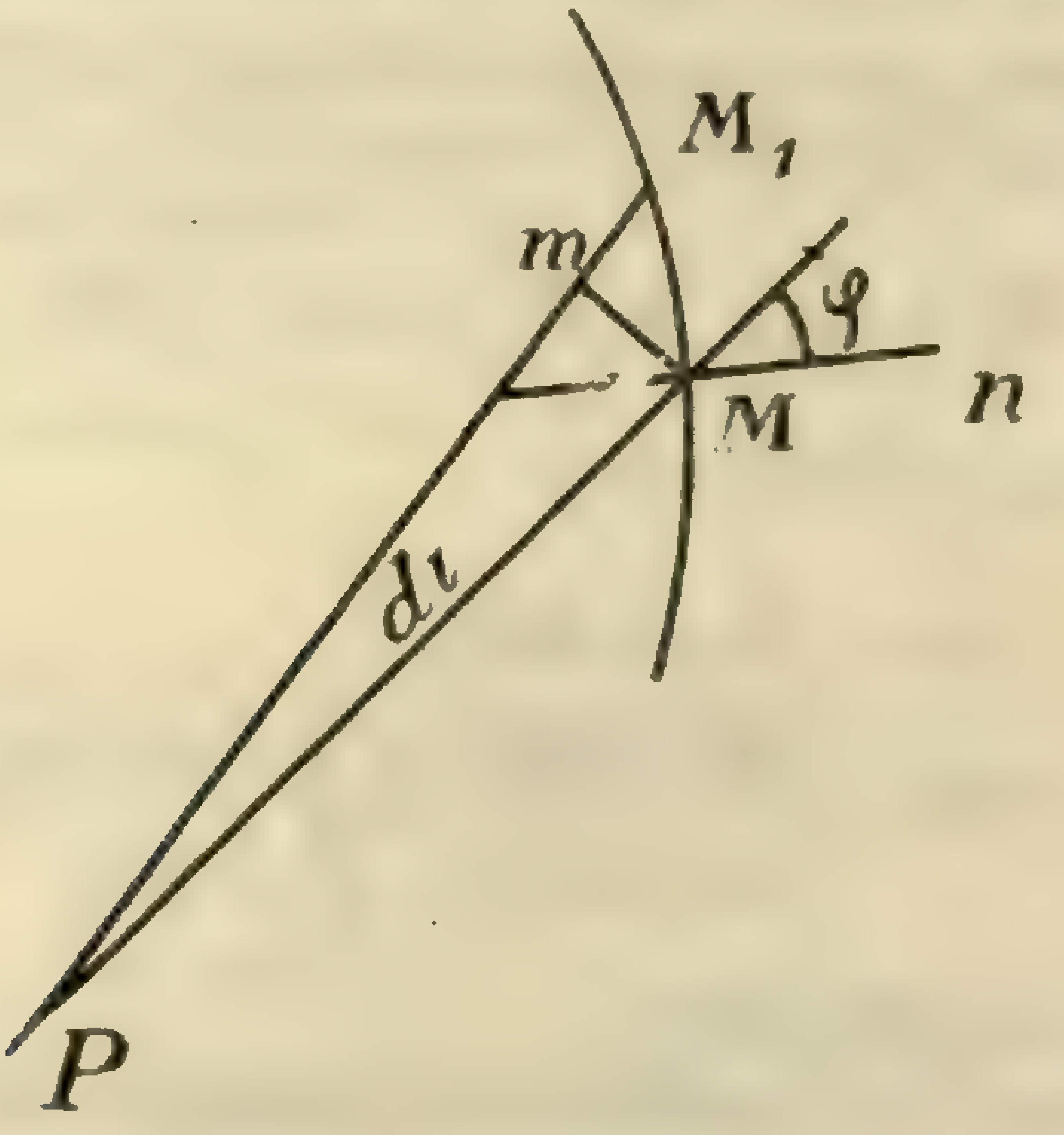
$$\frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} \cos(n, r), \tag{2}$$

l'angle étant celui de la direction PM avec la direction n, *normale extérieure,* soit φ.

Ceci nous amène à définir ainsi le potentiel de double couche de densité ν :

$$W_p = \int_C \nu(s) \frac{\cos \varphi}{r_{ps}} ds. \tag{3}$$

Traçons l'arc de cercle Mm de centre P et de rayon PM, d'où



$$\frac{\cos\varphi}{r_{ps}} = d\omega_{ps},$$

ω étant l'angle au centre en P ; d'où

$$W_p = \int_C \nu(s)\, d\omega_{ps}, \tag{4}$$

$d\omega_{ps}$ étant *positif* quand le rayon PM rencontre *d'abord* la couche *négative*, négatif dans le cas contraire.

Remarquons, d'abord que $\frac{d}{dn}\log\frac{1}{r}$ est HARMONIQUE comme $\log\frac{1}{r}$, ensuite que la *normale* MM′ devenant *infiniment petite*, le potentiel double serait infiniment petit si l'on ne faisait croître μ, pour compenser.

Dans l'espace, $d\omega$ sera un *angle solide* et, au lieu de $\frac{\cos\varphi}{r}$, on aura $\frac{\cos\varphi}{r^2}$. (Dans les formules suivantes, on remplacerait donc 2π par 4π).

3. *Théorèmes généraux.* — 1° *Lorsque la densité est constante et égale* à 1 : *en tout point i,* intérieur au contour, *le potentiel double est égal à* 2π ; *en tout point* s_0, sur le contour, *le potentiel double est égal à* π ; *il est nul en tout point e* extérieur.

Cela résulte de (4).

2° *Soient* W_0, W_i, W_c *les potentiels doubles en un point* s_0, sur C, *où la densité est* ν_0, *en un point intérieur*, infiniment voisin, *et en un point extérieur*, infiniment voisin ; *on a* (1)

$$W_i - 2\pi\nu_0 = W_0 - \pi\nu_0 = W_c. \tag{5}$$

On peut écrire ce résultat ainsi :

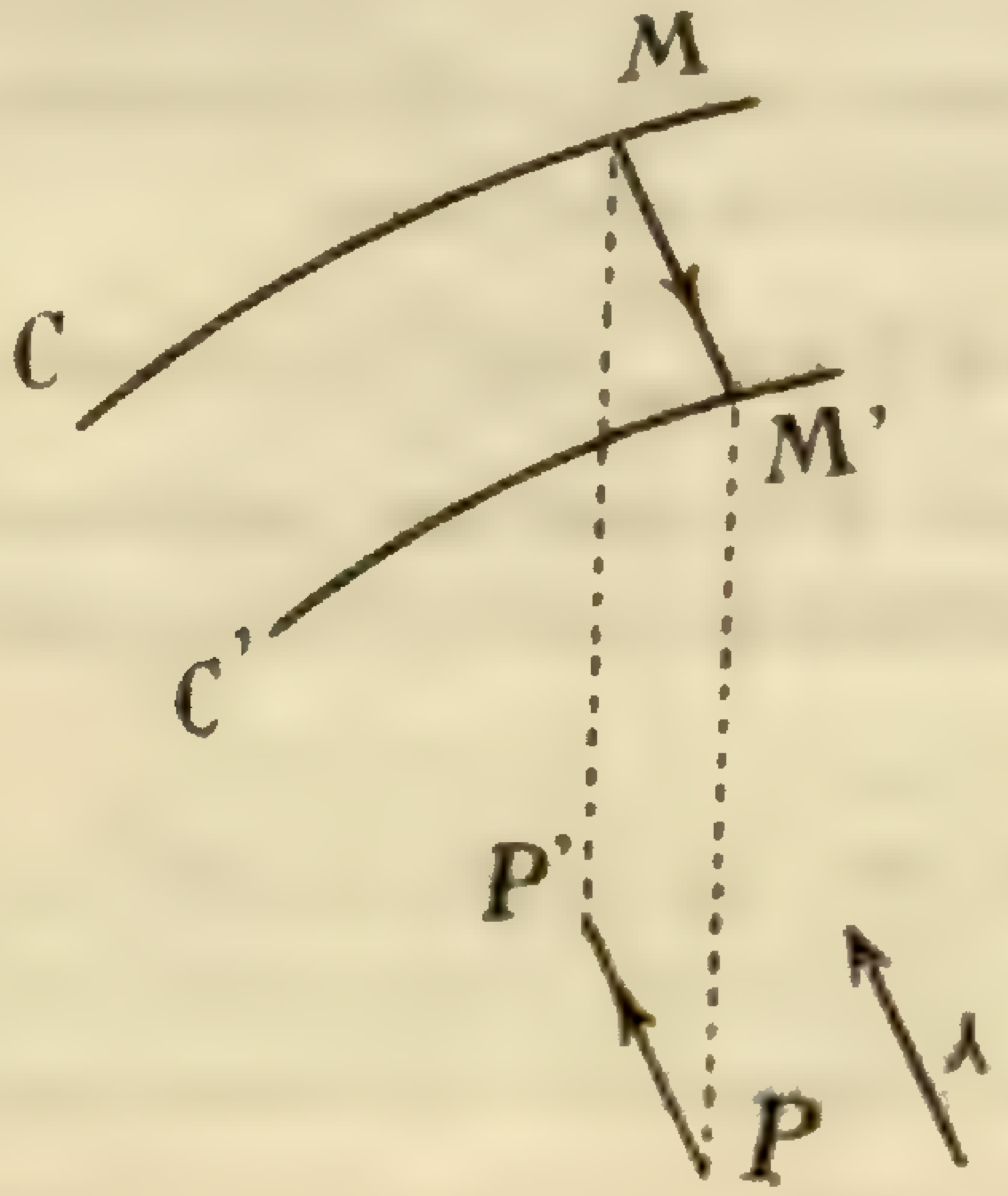
$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & W_i - W_c = 2\pi\nu_0, \\ & W_0 = \frac{W_i + W_e}{2} = \int \nu \frac{\cos\varphi}{r_{s_0 s}}\, ds. \end{aligned} \right.$$

Revenons à la *simple couche*.

4. *Dérivée normale du potentiel de simple couche.* — Soient un contour C et une direction λ. Si P vient en P′, effectuant un déplacement $d\lambda$, nous avons une variation de potentiel

$$dV_p = \int_C \mu \left(\log \frac{1}{r_{p's}} - \log \frac{1}{r_{ps}} \right) ds.$$

Au contraire, laissons P *fixe* et donnons à la courbe C *la transla-*



tion — $d\lambda$, nous avons la même variation, puisque $\overline{PM'} = \overline{P'M}$, d'où

---

(1) H. Poincaré, *Le potentiel Newtonien*.

$$(7)\quad \frac{dV_p}{d\lambda} = -\int_C \mu \left[\cos(s,\lambda)\frac{d}{ds}\log\frac{1}{r_{ps}} + \cos(n_i\lambda)\frac{d}{dn_i}\log\frac{1}{r_{ps}}\right] ds.$$

Supposons $\mu(s)$ dérivable et intégrons par parties. La partie intégrée est nulle et il reste

$$+\int_C \rho \log\frac{1}{r_{ps}}\, ds - \int_C \nu \frac{d}{dn_i}\log\frac{1}{r_{ps}}\, ds,$$

en posant

$$\nu = \mu\cos(n_i, \lambda),$$

$$\rho = \frac{d}{ds}[\mu\cos(s, \lambda)].$$

Quand c'est utile, nous représentons par n_s la normale INTÉRIEURE, au point s, à l'aire d'intégration. La 1^re^ intégrale est un potentiel *simple*, la 2^e^ est un potentiel *double*.

Soit λ la direction de la normale INTÉRIEURE au point s_0, où la densité est μ_0. En ce point l'on a $\nu_0 = \mu_0$. Soient deux points infiniment voisins, l'un intérieur, l'autre extérieur, et cherchons les valeurs de

$$\frac{dV_i}{d\lambda} \pm \frac{dV_e}{d\lambda}.$$

5. *Différence des dérivées normales.* — Le potentiel simple est continu et le potentiel double a une variation $2\pi\mu_0$:

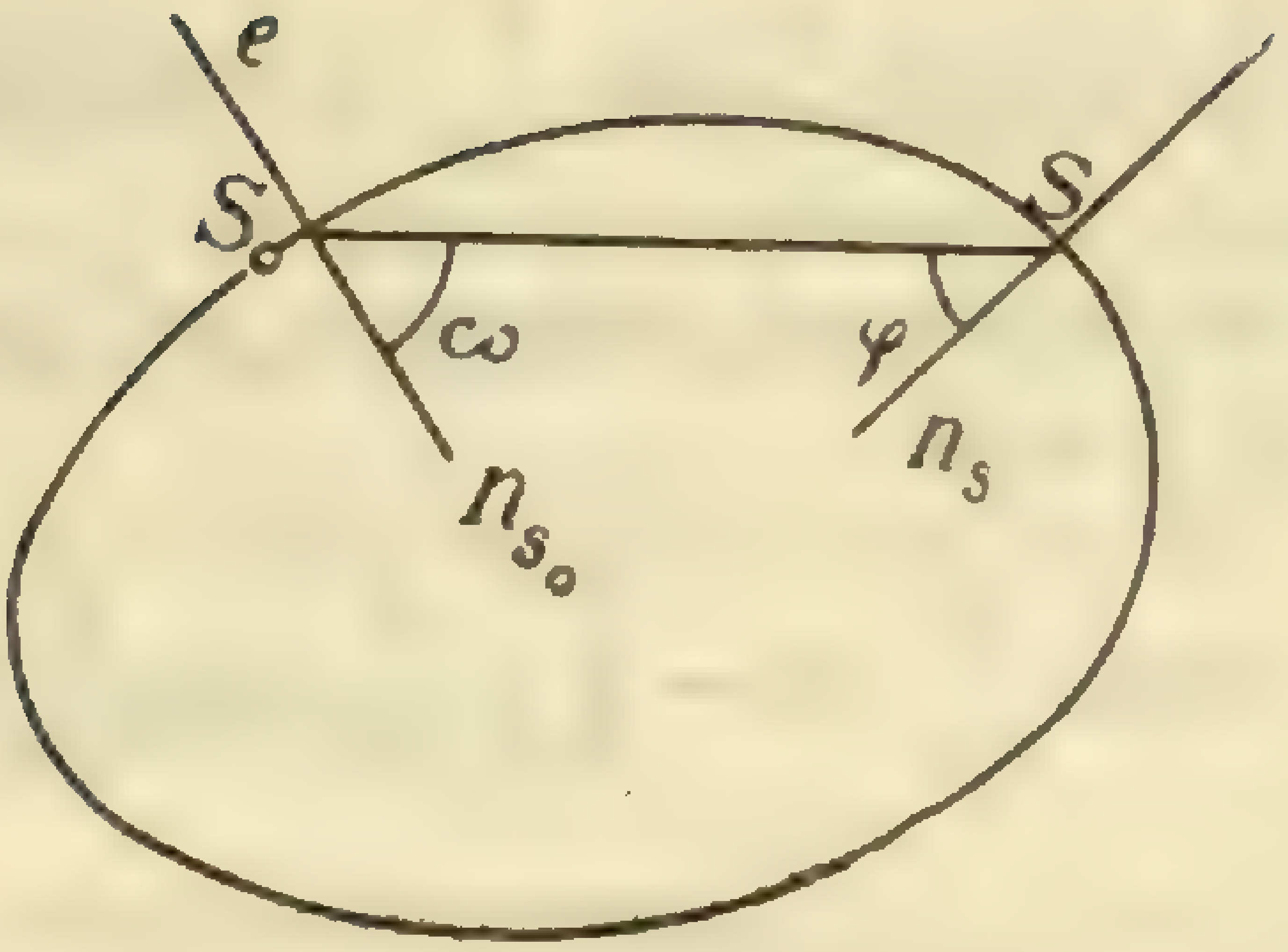
$$\frac{dV_i}{dn_{s_0}} - \frac{dV_e}{dn_{s_0}} = -2\pi\mu_0.$$

6. *Somme des dérivées normales.* — Comme l'on a

$$W_0 = \frac{W_i + W_e}{2}$$

nous écrivons de suite :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dV_i}{dn_{s_0}} + \frac{dV_e}{dn_{s_0}}\right) = \int -\mu\cos(s, n_{s_0})\frac{d}{ds}\log\frac{1}{r_{s_0s}}\, ds$$
$$+\int -\mu\cos(n_s, n_{s_0})\frac{d}{dn_s}\log\frac{1}{r_{s_0s}}\, ds$$



Et d'après la formule

$$\frac{d}{d\lambda}\log\frac{1}{r} = \frac{-1}{r}\cos(r, \lambda)$$

ceci donne

$$\int \mu \frac{\cos\omega}{r_{s_0s}}\, ds$$

ω est l'angle de r_{s_0s} avec n_{s_0} comme φ est l'angle de r_{ss_0} avec n_s.

Nous avons donc (¹) :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dV_e}{dn} - \frac{dV_i}{dn}\right) = \pi\mu_0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dV_e}{dn} + \frac{dV_i}{dn}\right) = \int \mu \frac{\cos\omega}{r}\, ds,$$

i et e sont deux points *infiniment voisins* de s_0, sur la normale et r est la distance du point s au point s_0.

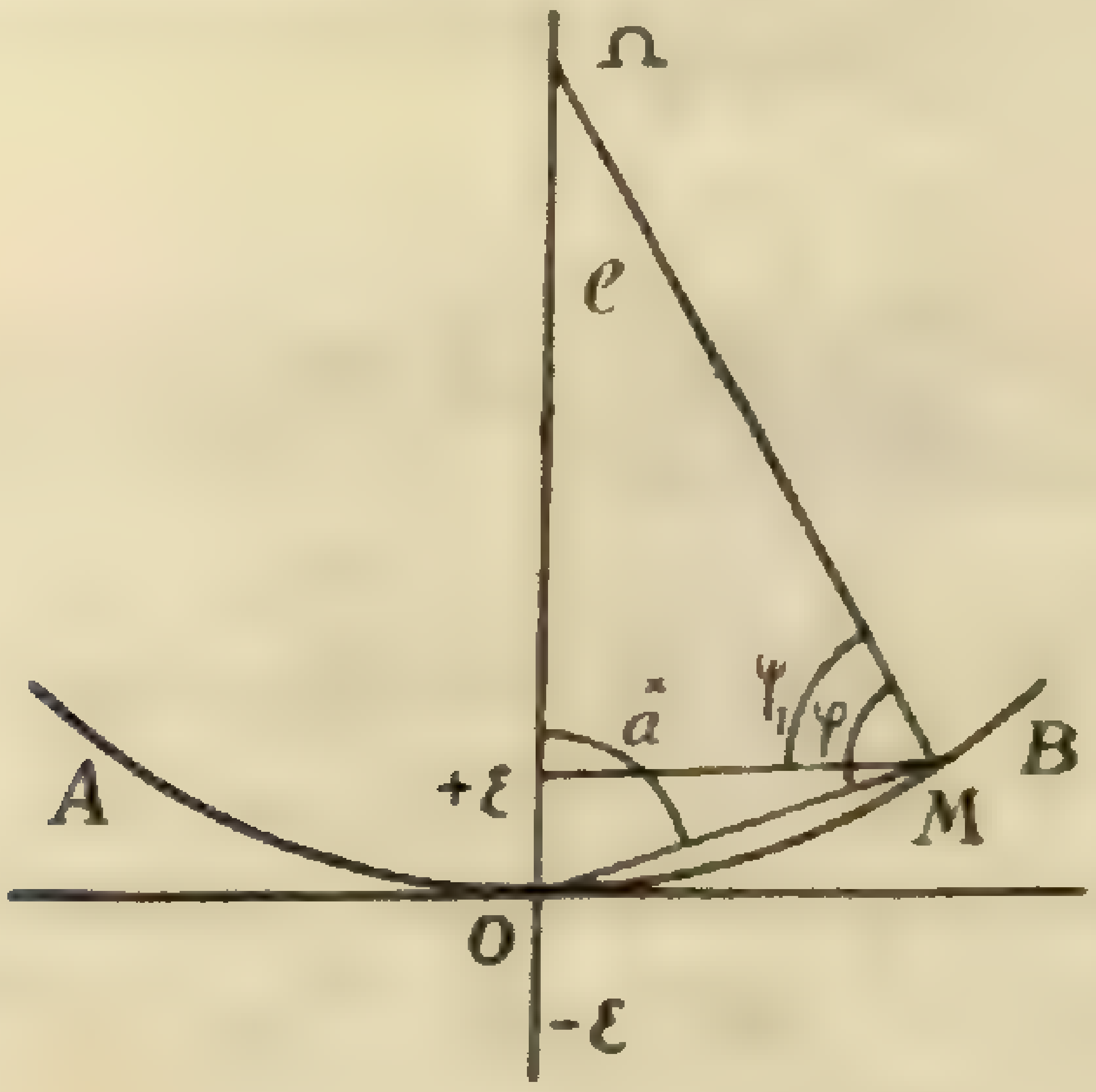
7. *Dérivée normale du potentiel de double couche.* — L'on dit que la dérivée normale du potentiel double est CONTINUE. Cela veut dire qu'en deux points $+\epsilon$ et $-\epsilon$, situés sur la normale, la différence des dérivées normales est infiniment petite avec ϵ. Prenons le cas du plan. Soit d'abord un partage de la courbe frontière tel que OA et OB soient, par exemple, de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$. Nous n'avons alors qu'à étudier la différence relative à l'arc AOB. Soient

---

(¹) J. Plemelj, *Monatshefte für Math. u. Physik*, t. XV, t. XVIII ; Em. Picard, ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1906.

$$\overline{\mathrm{OM}} = r, \quad +\overline{\epsilon \mathrm{M}} = r_1,$$

φ et φ_1 les angles correspondants. Les normales en O et en M se rencontrent en Ω, formant un angle e.



e étant infiniment petit avec ϵ, nous avons, R étant le rayon de courbure en O,

$$\frac{r}{2} \smile \mathrm{R} \cos \varphi, \quad a - \varphi \smile 0$$

$$ds \smile dr$$

$$\mathrm{W}'_{+\epsilon} = \int_{\mathrm{AOis}} \mu \frac{\cos \varphi_1}{r_1} ds = \int \mu \frac{u}{v} ds$$

$$u = r \cos \varphi + \epsilon \cos e$$

$$v = r^2 + \epsilon^2 - 2r\epsilon \cos a$$

$$\frac{d}{d\epsilon} \frac{u}{v} = \frac{-2\epsilon r \cos \varphi - \epsilon^2 \cos e + r^2 \cos e + 2r^2 \cos \varphi \cos a}{v^2}$$

soit

$$r^2 + \epsilon^2 = p$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{2r\epsilon \cos a}{p}\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{p^2} \left[1 + 2 \frac{2r\epsilon \cos a}{p} + 3 (\ldots)^2 + 4 (\ldots)^3 \ldots\right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} \frac{u}{v} \smile \frac{1}{p^2} \left[1 + 2 \frac{\epsilon r^2}{p\mathrm{R}} + 3 \left(\frac{\epsilon r^2}{p\mathrm{R}}\right)^2 + \ldots\right] \times$$

$$\times \left[r^2 - \epsilon^2 - \epsilon \frac{r^2}{\mathrm{R}} + \frac{r^4}{2\mathrm{R}^2}\right] = \alpha.$$

Donc :

$$\frac{d}{d\epsilon} W'_{+\epsilon} \longrightarrow \int_{AOB} \mu\alpha dr.$$

Nous cherchons la valeur de

$$\frac{d}{d\epsilon}\left(W'_{+\epsilon} - W'_{-\epsilon}\right)$$

Il suffit donc de prendre, dans α, les termes en ϵ, soit :

$$\frac{1}{p^2}\left(r^2 + \frac{r^4}{2R^2}\right)\frac{2\epsilon r^2}{pR} - \frac{1}{p^2}\frac{\epsilon r^2}{R} = \beta.$$

Or l'on a bien :

$$\int_0^{\sqrt{\epsilon}} \beta dr \textit{ nul } \text{avec } \epsilon.$$

Le résultat est facile à vérifier.

$$\lim_{\epsilon=0}\left(\frac{dW'_{+\epsilon}}{d\epsilon} - \frac{dW'_{-\epsilon}}{d\epsilon}\right) = 0.$$

Et il en est de même quand on remplace W' potentiel de l'arc AOB par W potentiel total (¹), le reste de la courbe donne *zéro*, puisque OA et OB sont de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$.

(¹) Voir une autre démonstration dans mes *Exercices et leçons*, Gauthier-Villars, empruntée au *Cours* de M. Darboux, en 1907. — Nous ne nous préoccupons pas ici de prendre le *minimum* d'hypothèses, mais seulement de donner une vue rapide des faits principaux.

FORMULES DE GREEN. THÉORÈMES DE GAUSS. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HARMONIQUES

8. *Formule de Riemann, dans le plan.* — Soit C un contour simple, coupé en deux points par une parallèle aux axes, (C) l'aire renfermée :

$$\int\int_{(C)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_C P\,dx, \qquad \int\int_{(C)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_C Q\,dy,$$

$$\int\int_{(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy.$$

9. *Formules de Green :*

$$\int_3 \left(\frac{\partial P}{dx} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \int_2 P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

(intégrale de volume) (intégrale suivant le bord extérieur de la frontière)

Posons maintenant :

$$J = \int_3 \mathrm{S}\, \frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial x}\,dx\,dy\,dz,$$

Δ indique $\mathrm{S}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ symbole de Laplace, la formule précédente donne :

$$J = \int_2 U\,\mathrm{S}\,\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n, x)\,d\sigma - \int_3 U\,\Delta V\,dx\,dy\,dz,$$

$d\sigma$ est l'élément de surface de la frontière du volume, n la normale *extérieure*.

$$\int_3 (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dx\,dy\,dz = \int_2 \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\sigma,$$

$\left(\frac{d}{dn}\right.$ = dérivée normale extérieure ; $\left.d\tau = dx\,dy\,dz.\right)$

10. Soit $U = V$, J devient alors :

$$J' = \int \mathrm{S} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau > 0.$$

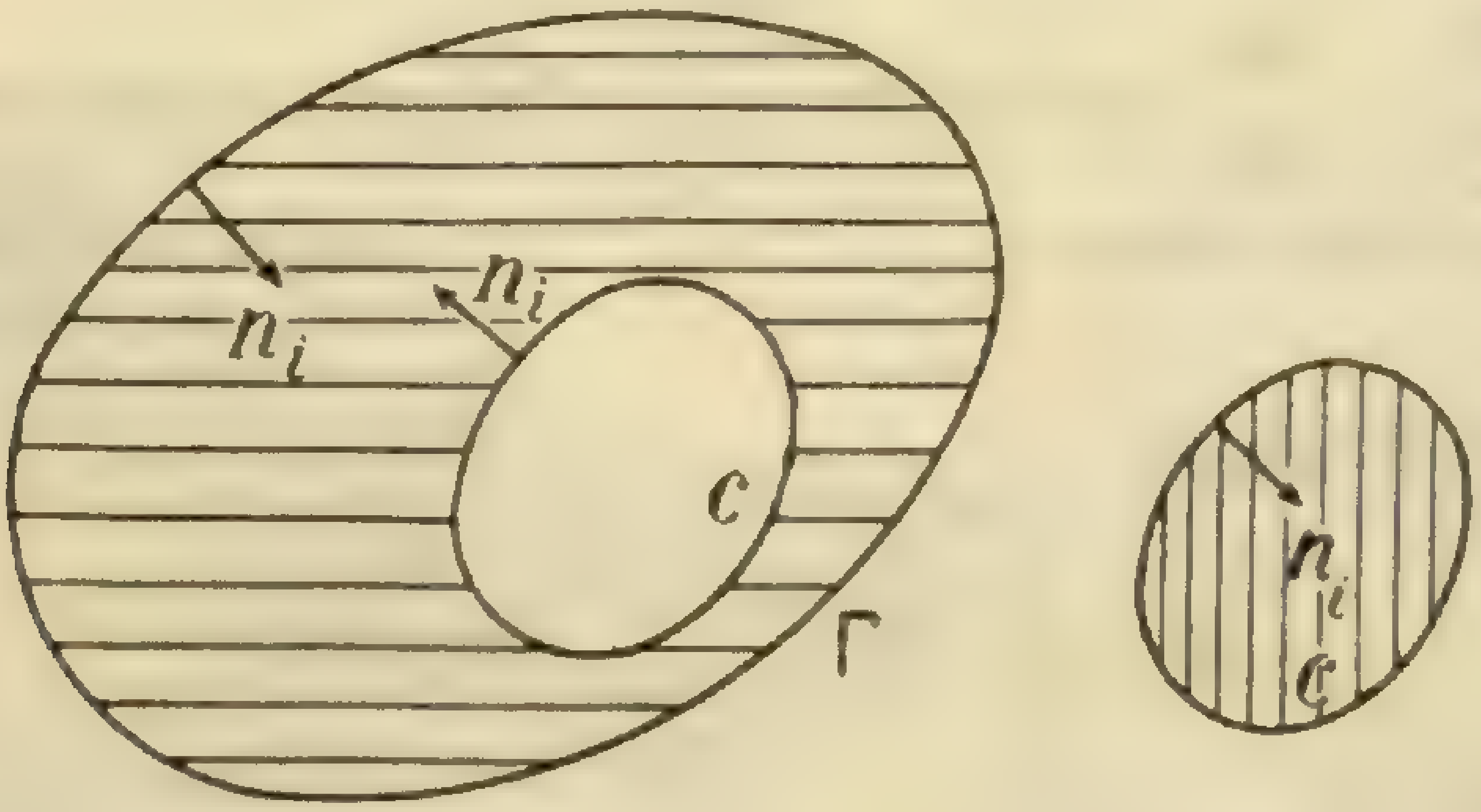
Si U (x, y, z) a des dérivées 1^{es} et 2^{es} et si l'on a $\Delta V = 0$, l'on dit que U est HARMONIQUE et l'on a alors ces *inégalités capitales* (H. Poincaré, *Le potentiel newtonien*) :

$$\int_2 U \frac{dU}{dn_e} d\sigma = J' > 0$$

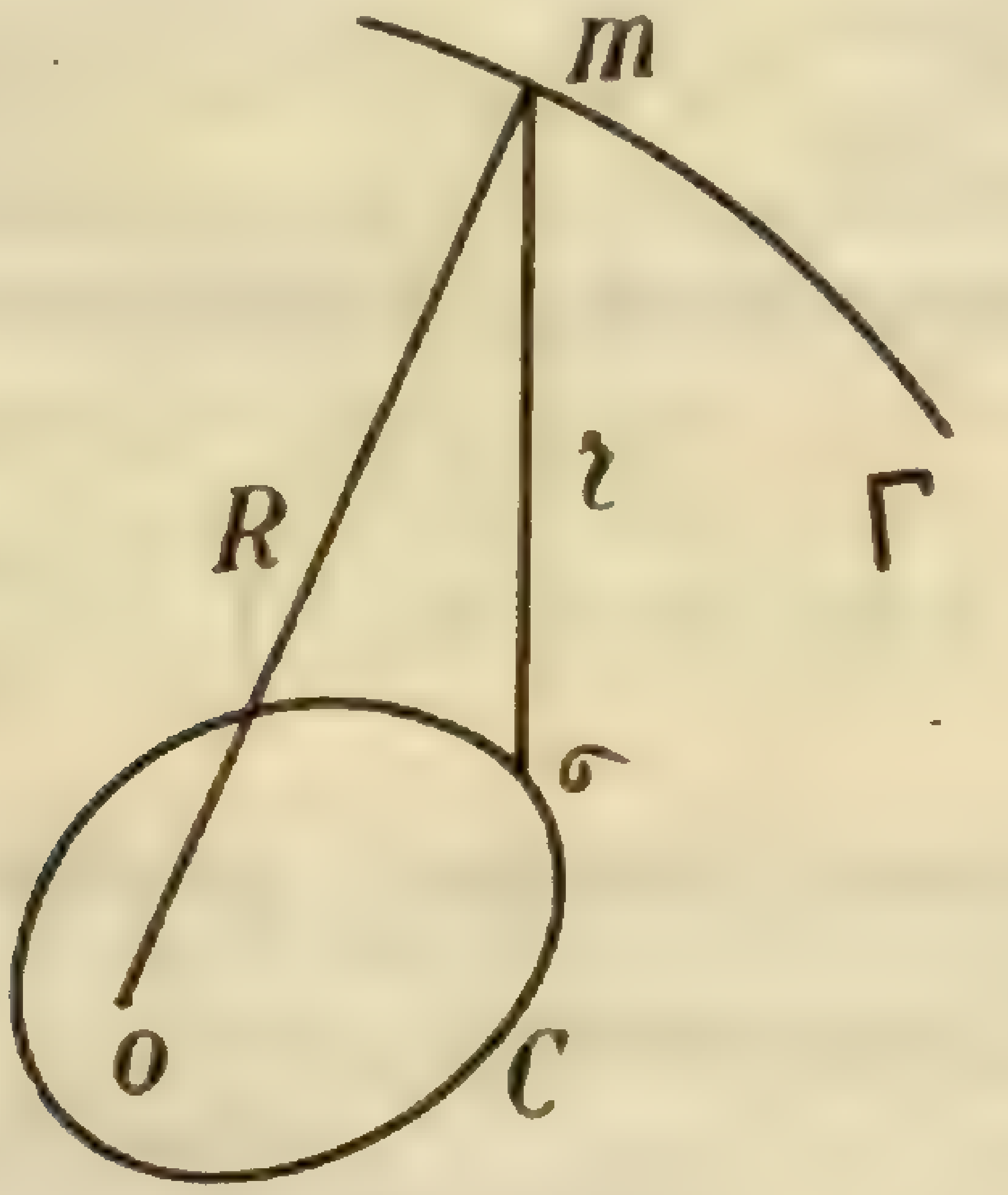
$$\int_2 U \frac{dU}{dn_i} d\sigma < 0.$$

Ceci est valable dans le plan, $d\tau$ devenant l'élément d'*aire* $dxdy$ et $d\sigma$ devenant l'élément de *longueur* de la frontière.

Nous supposons le domaine connexe, le sens de la normale INTÉRIEURE étant représenté dans les figures ci-dessous, comme on le sait :



11. Étudions maintenant les potentiels *à l'infini*.



Soient un contour C et un point extérieur m ; r étant la distance de m au point σ sur C.

Ceci est dans le *plan*. Soit le *potentiel simple* :

$$V_m = \int_C \mu(\sigma) \log \frac{1}{r}\, d\sigma.$$

Que devient V_m si le point m est situé sur un cercle Γ de rayon R très grand ? Nous avons :

$$V_m = \log \frac{1}{R} \int \mu\, d\sigma + \int \mu \log \frac{R}{r}\, d\sigma$$

$$V_\infty = M \log \frac{1}{R},$$

ayant posé $M = \int \mu\, d\sigma$ *(masse totale)*. De même, cherchons ce que devient $\frac{dV_m}{dn}$; n étant la normale intérieure de Γ. Nous avons aussitôt, K étant fini et ϵ tendant vers *zéro* avec $\frac{1}{R}$:

$$\frac{dV_\infty}{dn} = \frac{M}{R} + \epsilon \frac{K}{R}.$$

Notre conclusion sera que l'intégrale :

$$(R = \infty), \int_\Gamma \frac{dV_m}{dn}\, ds$$

ne sera nulle que si la masse totale est nulle. Si $M = 0$, on aura aussi :

$$(R = \infty), \int_\Gamma V_m \frac{dV_m}{dn}\, ds = 0.$$

Passons au cas de l'*espace*. C est une surface, Γ est une sphère et soit

$$V_m = \int_2 \mu(\sigma) \frac{1}{r}\, d\sigma.$$

Ici

$$V_\infty = \frac{M}{R}.\quad \frac{dV_\infty}{dn} = \frac{M}{R^2} + \epsilon \frac{K}{R^2}$$

L'intégrale :

$$(\mathrm{R}=\infty)\int_{\Gamma}\frac{d\mathrm{V}}{dn}\,ds$$

n'est nulle que si M = 0.

Sur Γ l'élément d'aire contient R^2, de sorte que, quel que soit M, l'on a :

$$(\mathrm{R}=\infty),\int_{\Gamma}\mathrm{V}_m\frac{d\mathrm{V}_m}{dn}\,ds=0.$$

Revenons au plan, avec le *potentiel double :*

$$\mathrm{W}_m=\int_{\mathrm{C}}\nu(\sigma)\frac{\cos\varphi}{r}\,d\sigma.$$

L'on a, de suite, les K étant des nombres assignables :

$$|\mathrm{W}_\infty|<\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}},\ \left|\frac{d\mathrm{W}_\infty}{dn}\right|<\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{R}^2}$$

$$(\mathrm{R}=\infty),\int_{\Gamma}\mathrm{W}\frac{d\mathrm{W}}{dn}\,ds=0.$$

Dans l'espace, la fonction analogue sera

$$\mathrm{W}_m=\int_{2}\nu\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma$$

$$|\mathrm{W}_\infty|<\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}^2},\ \left|\frac{d\mathrm{W}_\infty}{dn}\right|<\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{R}^3}$$

$$(\mathrm{R}=\infty)\int_{\Gamma}\mathrm{W}\frac{d\mathrm{W}}{dn}\,ds=0.$$

12. Donc la fonction V est *harmonique dans tout le plan, régulière à l'infini si la* MASSE TOTALE *est nulle,* et, dans ces conditions : pour R = ∞

$$\int_{\Gamma}\mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dn}\,ds=0.$$

Dans l'espace, mêmes propriétés, sans aucune condition touchant la masse totale. La fonction W est *harmonique dans tout le plan, ou dans tout l'espace, sauf sur le contour* C. Elle est, *sans condi-*

tions, régulière à l'infini et l'on a, dans le plan ou dans l'espace : pour $R = \infty$

$$\int_\Gamma W \frac{dW}{dn}\, ds = 0.$$

Nous avons, en plus, trouvé ceci :

$$\left.\begin{aligned}
W_i &= \pi\nu_0 + \int_C \nu \frac{\cos\varphi}{r}\, d\sigma \\
W_e &= -\pi\nu_0 + \int \nu \frac{\cos\varphi}{r}\, d\sigma \\
\frac{dV_e}{dn_i} &= \pi\mu_0 + \int \mu \frac{\cos\omega}{r}\, d\sigma \\
\frac{dV_i}{dn_i} &= -\pi\mu_0 + \int \mu \frac{\cos\omega}{r}\, d\sigma
\end{aligned}\right\} \text{dans le PLAN}$$

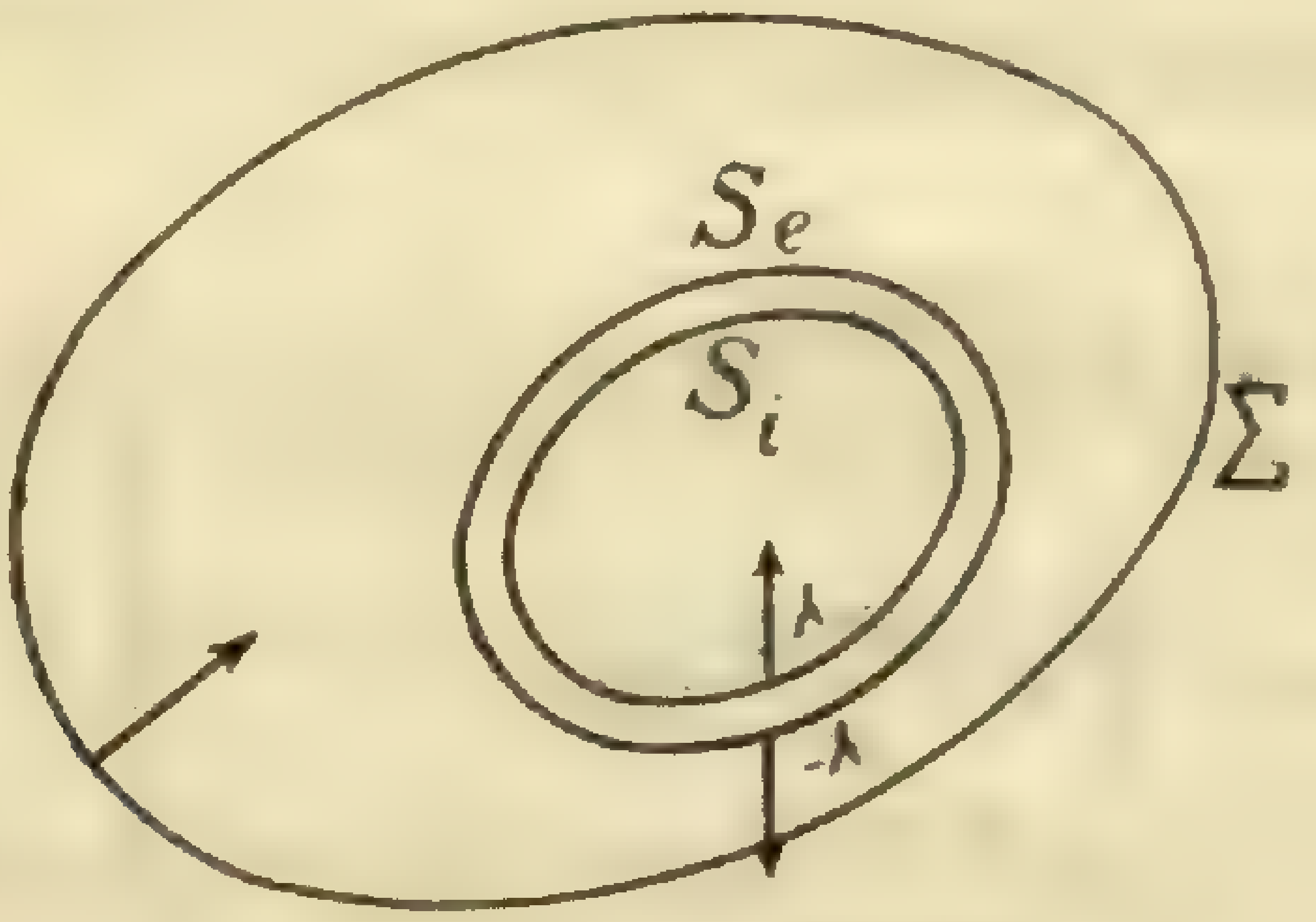
$$\left.\begin{aligned}
W_i &= 2\pi\nu_0 + \int \nu \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma \\
W_e &= -2\pi\nu_0 + \int \nu \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma \\
\frac{dV_e}{dn_i} &= 2\pi\mu_0 + \int \mu \frac{\cos\omega}{r^2}\, d\sigma \\
\frac{dV_i}{dn_i} &= -2\pi\mu_0 + \int \mu \frac{\cos\omega}{r^2}\, d\sigma
\end{aligned}\right\} \text{dans l'ESPACE}$$

$$\left.\begin{aligned}
&V_i = V_e \text{ sur le contour} \\
&\frac{dW_i}{dn_i} = \frac{dW_e}{dn_i} \text{ sur le contour} \\
&W_0 = \frac{W_i + W_e}{2}.
\end{aligned}\right\} \text{PLAN OU ESPACE}$$

13. De la formule de Green l'on déduit aisément des théorèmes — équivalents à ceux de Cauchy, dans la Théorie des Fonctions — et, en particulier, un théorème de Gauss.

Soit Σ une surface fermée contenant des masses attirantes, soit V *le potentiel correspondant* et soit U une *fonction harmonique*.

Supposons ces masses portées par une surface S, soit $\mu(\sigma)$ la densité au point σ.



Nous représentons sur la figure les bords intérieurs et extérieurs de S et le sens de la *normale intérieure* au point de vue de l'intégration. On a, de suite :

$$\int_{S_i} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\sigma = 0$$

$$\int_{S_e + \Sigma} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Faisons la somme, en remarquant que n est de *sens contraires*, sur S_i et sur S_e et que

$$\frac{dV_e}{dn_i} - \frac{dV_i}{dn_i} = 4\pi\, \mu(\sigma).$$

Il vient :

$$\int_{\Sigma} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\sigma = 4\pi \sum mU,$$

m étant la masse élémentaire de $d\sigma$. Soit $U = 1$, M la *masse totale* sur S, nous avons le *théorème de Gauss :*

$$\int_{\Sigma} \frac{dV}{dn} d\sigma = 4\pi M.$$

Dans le plan, il faudrait remplacer 4π *par* 2π. Nous retombons sur ce fait que certaines intégrales sont nulles, quel que soit le contour Σ, si la masse totale renfermée dedans est nulle.

14. U et V étant harmoniques, nous avons :

$$\int \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\sigma = 0 \ (n = \text{normale } \textit{intérieure}).$$

Soit $V = 1$, nous obtenons :

$$\int \frac{dU}{dn} d\sigma = 0 \ (\textit{flux total}).$$

15. Soit $V = \log \frac{1}{r}$, et (a, b) un point intérieur au contour C, dans le plan :

$$2\pi\, U(a, b) = \int_C \left(U \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} - \log \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} \right) d\sigma.$$

Dans l'espace, il faudrait remplacer 2π *par* 4π *et* $\log \frac{1}{r}$ *par* $\frac{1}{r}$.

D'où la définition de la *fonction de Green* et des *fonctions de F. Neumann et de F. Klein* (¹).

D'où l'*unicité* de la solution, etc...

CHAPITRE III

L'équation de Fredholm

La solution de cette équation intégrale a été obtenue par M. Fredholm par une géniale extension de la méthode de Cauchy-Lipschitz. Mais il n'a point publié sa recherche sous cette forme, à laquelle, au contraire, M. Hilbert s'est systématiquement attaché. Il faut noter que les découvertes de M. H. Poincaré (*Circolo di Palermo*, 1894) ont dû guider M. Fredholm à l'origine de son travail, si vite devenu *classique*.

(¹) J. Hadamard, *Leçons sur les Ondes*. Hermann, 1903.

1. Soit l'équation

$$(\mathrm{F}) \qquad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s)\, \varphi(s)\, ds = \psi(x),$$

$\psi(x)$ *est donnée et l'on cherche l'expression de* $\varphi(x)$ *en regardant la quadrature comme limite de somme ;* f est aussi donné et s'appelle *noyau*.

On peut écrire :

$$\int_0^1 f(x, s)\, \varphi(s)\, ds = \lim_{n=\infty} \sum_{p=1}^{p=n} f\left(x, \frac{p}{n}\right) \varphi\left(\frac{p}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

L'équation (1) étant ainsi transformée, en regardant n comme *fini*, d'abord, écrivons que cette équation transformée est vérifiée pour les valeurs

$$x = x \quad x = \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n} \quad \ldots, \quad \frac{n}{n}.$$

D'où $(n + 1)$ équations aux $(n + 1)$ inconnues

$$\varphi(x), \quad \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \quad \ldots, \quad \varphi\left(\frac{n}{n}\right).$$

Nous posons :

$$\varphi\left(\frac{p}{n}\right) = \varphi_p, \quad \psi\left(\frac{p}{n}\right) = b_p, \quad \frac{\lambda}{n} = h,$$

$$f\left(x, \frac{p}{n}\right) = a_{xp}, \quad f\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) = a_{pq}.$$

Le système s'écrit alors :

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(x) + h(a_{x1}\, \varphi_1 + a_{x2}\varphi_2 + \ldots + a_{xn}\, \varphi_n) = \psi(x), \\ \varphi_i \quad + h(a_{i1}\, \varphi_1 + a_{i2} + \ldots + a_{in}\, \varphi_n) = b_i \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou bien encore :

$$0 = \begin{vmatrix} 1 + ha_{11} & ha_{12} & \ldots & ha_{1n} & b_1 \\ ha_{21} & 1 + ha_{22} & \ldots & ha_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ ha_{n1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & 1 + ha_{nn} & b_n \\ ha_{x1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & ha_{xn} & \psi(x) - \varphi(x) \end{vmatrix}$$

D'où

$$\psi(x) - \varphi(x) = \frac{-A_n}{B_n}.$$

2. Étudions ces déterminants A_n et B_n :

Pour simplifier l'exposition, prenons $n = 4$,

$$A = \begin{vmatrix} 1 + ha_{11} & ha_{12} & ha_{13} & ha_{14} \\ ha_{21} & 1 + ha_{22} & ha_{23} & ha_{24} \\ ha_{31} & ha_{32} & 1 + ha_{33} & ha_{34} \\ ha_{41} & ha_{42} & ha_{43} & 1 + ha_{44} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} & & & b_1 \\ & \text{(idem)} & & b_2 \\ & & & b_3 \\ hc_1 & hc_2 & hc_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Lorsque n devient *infini*, ces déterminants donnent des séries, *fonctions entières* de λ.

C'est l'essence de la découverte de M. Fredholm.

Le déterminant A, par définition même, est une somme de déterminants obtenus en groupant quatre colonnes partielles *dans leur ordre.*

La constante est $+1$.

Un terme en h^2 est donné par

$$h^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Remarquons que si nous prenons *tous* les déterminants analogues, nous en prenons deux fois trop, car nous supposerions que nous avons à prendre d'abord la colonne 1 avec la colonne 2, puis la colonne 2 mise la première, avec la colonne 1 écrite ensuite, etc.

Si donc le symbole $\sum$ représente une sommation relative à tous les groupes d'indices ij, nous écrivons le coefficient de h^2

$$\frac{1}{2} \sum \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix}$$

De même, nous aurons pour le coefficient de h^3

$$\frac{1}{3}\sum\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Tout ceci subsiste quel que soit l'ordre du déterminant. $\sum$ pourrait aussi bien être une sommation avec indices non différents entre eux, dans un même système, le déterminant correspondant étant *nul*.

Procédons de même pour B. Il n'y a pas de constante, un terme en h sera :

$$h\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Un terme en h^2 sera :

$$h^2\left|\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hdashline c_1 & c_2 & 0 \end{array}\right|$$

Le mineur bordé indique les éléments auxquels s'appliquera la sommation, avec la même remarque que l'on doit diviser par 2 pour h^2, etc.

3. Nous pouvons maintenant écrire A_n et B_n et faire tendre n vers l'infini. Nos séries convergeront, d'après ce théorème de M. Hadamard (¹). Soit un déterminant :

$$\Delta = \| a_{ik} \|$$

soit :

$$S_i = \sum_k a_{ik}^2$$

(¹) Voir, par exemple, mes *Exercices et leçons d'analyse* où toute cette théorie est exposée en détail.

L'on a :

$$\Delta^2 \leq \prod S_i$$

(le symbole $\prod$ indique le produit).

L'on emploiera alors la formule de Stirling

$$\underline{|x} = \sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, x^{x+\frac{1}{2}} (1 + \epsilon_x)$$

$$\epsilon_x \to 0 \quad \text{lorsque} \quad x \to \infty.$$

4. Nous avons donc, puisque $h = \frac{\lambda}{n}$:

$$B_n = 1 + \frac{\lambda}{1} \sum f\left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$$+ \frac{\lambda^2}{\underline{|2}} \sum \begin{vmatrix} f\left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n}\right) & f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \\ f\left(\frac{j}{n}, \frac{i}{n}\right) & f\left(\frac{j}{n}, \frac{j}{n}\right) \end{vmatrix} \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Lorsque n devient infini, *chaque somme* a une limite, qui est une intégrale, la première

$$\int_0^1 f(x_1, x_1)\, dx_1,$$

la seconde

$$\int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} f(x_1, x_1) & f(x_1, x_2) \\ f(x_2, x_1) & f(x_2, x_2) \end{vmatrix} dx_1\, dx_2.$$

Etc.

D'où une série en λ qui *converge*, nous écrirons :

$$\lim_{n=\infty} B_n = D(\lambda).$$

Étudions le numérateur. A_n est une somme de termes de la forme

$$\sum h^p \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\alpha_1} & \dots & a_{\alpha_1\alpha_p} & b_{\alpha_1} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{\alpha_p\alpha_1} & \dots & a_{\alpha_p\alpha_p} & b_{\alpha_p} \\ a_{x\alpha_1} & \dots & a_{x\alpha_p} & 0 \end{vmatrix}$$

On peut passer à la limite, pour $n = \infty$, pour *chaque somme :* nous obtenons des intégrales multiples. Nous représenterons $f(x_p, x_q)$ par

$$(x_p x_q)$$

et

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots\dots\dots \int_0^1 dx_p$$

par

$$\underset{1\,2\,3\dots p}{\mathrm{S}}$$

Le terme de rang p, dans *lim* A_n sera

$$u_p = \frac{\lambda_p}{p!} \underset{1\,2\,3\dots p}{\mathrm{S}} \begin{vmatrix} (x_1x_1) & \dots & (x_1x_p) & \psi(x_1) \\ (x_2x_1) & \dots & (x_2x_p) & \psi(x_2) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ (x_px_1) & \dots & (x_px_p) & \psi(x_p) \\ (xx_1) & \dots & (xx_p) & 0 \end{vmatrix}$$

Une remarque capitale est la suivante :

Développons le déterminant par rapport à la dernière colonne et intégrons, *nous obtenons p termes* identiques. Admettons ceci.

Faisons remonter la dernière ligne au premier rang

$$u_p = -p \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \psi(s)\, ds$$

$$\times \underset{2\,3\,4\dots p}{\mathrm{S}} \begin{vmatrix} (xs) & (xx_2) & \dots & (xx_p) \\ (x_2s) & (x_2x_2) & \dots & (x_2x_p) \\ (x_3s) & (x_3x_2) & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ (x_ps) & (x_px_2) & \dots & (x_px_p) \end{vmatrix}$$

On peut enfin remplacer

$$(x_2 x_3 \ldots x_p)$$

par

$$(x_1 x_2 \ldots x_{p-1}).$$

D'où le terme général :

$$-\lambda \int_0^1 \psi(s)\, ds \frac{\lambda^{p-1}}{(p-1)\,!}$$

$$\times \underset{1,\,2,\,\ldots,\,(p-1)}{\mathrm{S}} \begin{vmatrix} (xs) & (xx_1) & \ldots & (xx_{p-1}) \\ (x_1 s) & (x_1 x_1) & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (x_2 s) & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (x_{p-1} s) & (x_{p-1} x_1) & \ldots & (x_{p-1} x_{p-1}) \end{vmatrix}$$

Nous écrirons donc :

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{A}_n = -\lambda \int_0^1 \Delta(\lambda, x, s)\, \psi(s)\, ds,$$

et nous aurons

$$\varphi(x) = \psi(x) - \frac{\lambda \int_0^1 \Delta(\lambda, x, s)\, \psi(s)\, ds}{\mathrm{D}(\lambda)}.$$

Telle est la *solution*.

5. *Théorèmes fondamentaux de M. Fredholm.*

Nous posons, d'après ce qui précède,

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \ldots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f(x_n, y_1) & \ldots\ldots\ldots & \ldots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \underset{1,2,3\ldots,n}{S} f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}.$$

$$D_1\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = f(\xi, \eta) + \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} \underset{1,2,3,\ldots,n}{S} f\begin{pmatrix} \xi, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \eta, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}.$$

Développant le terme général de D_1, nous avons n termes identiques, et un autre :

$$f(\xi, \eta) \frac{\lambda^n}{n} \underset{1,2,\ldots,n}{S} f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

$$-n \frac{\lambda^n}{\underline{|n}} \int_0^1 f(\xi, \tau)\, d\tau \underset{1,2,\ldots,(n-1)}{S} f\begin{pmatrix} \tau, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ \eta, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

D'où la formule :

$$(F_1) \qquad D_1\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = D \times f(\xi, \eta) - \lambda \int_0^1 f(\xi, \tau)\, D_1\begin{pmatrix} \tau \\ \eta \end{pmatrix} d\tau.$$

En développant le déterminant par rapport aux éléments de la première colonne, au lieu de la première ligne, nous avons la formule équivalente

$$(F_2) \qquad D_1\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = D \times f(\xi, \eta) - \lambda \int_0^1 f(\tau, \eta)\, D_1\begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix} d\tau.$$

La comparaison donne :

$$(F_3) \qquad 0 = \int_0^1 \left[f(\xi, \tau)\, D_1\begin{pmatrix} \tau \\ \eta \end{pmatrix} - f(\tau, \eta)\, D_1\begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix} \right] d\tau.$$

Ceci permet de *vérifier* la solution obtenue, par *itération*.

$$(1) \qquad \varphi(x) = \psi(x) - \lambda \int_0^1 \frac{D_1\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}}{D} \psi(s)\, ds.$$

$D_1\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ est la fonction désignée précédemment par $\Delta(\lambda, x, s)$.

Nous avons supposé $D \pm 0$. C'était *essentiel*.

6. Soit λ_0 une racine de la fonction entière D. M. Fredholm a obtenu la forme de la dérivée $\dfrac{d^n D}{d\lambda^n}$ en introduisant de nouvelles séries.

$$D_n\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\end{pmatrix}$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{\lambda^p}{p} \underset{1, 2, \ldots, p}{S} f\begin{pmatrix}\xi_1, \ldots, \xi_n, x_1, \ldots, x_p \\ \eta_1, \ldots, \eta_n, x_1, \ldots, x_p\end{pmatrix}.$$

On a, de suite,

$$\frac{d^n D}{d\lambda^n} = \underset{1, 2, \ldots, n}{S} D_n\begin{pmatrix}x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n\end{pmatrix}.$$

Développant le déterminant du terme général, dans D_n, suivant la première ligne, et intégrant, avec les mêmes remarques, M. Fredholm obtient :

$$(\Phi_1)\left\{\begin{aligned} & D_n\begin{pmatrix}\xi_1, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} + \lambda \int_0^1 f(\xi_1, \tau) D_n\begin{pmatrix}\tau, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} d\tau \\ & \qquad = f(\xi_1, \eta_1) D_{n-1}\begin{pmatrix}\xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_2, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} \\ & \qquad\qquad - f(\xi_1, \eta_2) D_n\begin{pmatrix}\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_3, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} \\ & \qquad + (-1)^{n-1} f(\xi_1, \eta_n) D_{n-1}\begin{pmatrix}\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}\right.$$

Intégrant encore, en développant le déterminant suivant les termes de la première *colonne*, on a, de même,

$$(\Phi_2)\quad \left\{\begin{aligned} & D_n\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\\ \eta_1, \eta_1, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} + \lambda\int_0^1 f(\tau, \eta_1)\, D_n\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\\ \tau, \eta_2, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} d\tau \\ & \qquad = f(\xi_1, \eta_1)\, D_{n-1}\begin{pmatrix}\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n\\ \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} \\ & \qquad\qquad - f(\xi_2, \eta_1)\, D_{n-1}\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_n\\ \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} \\ & \qquad\qquad\qquad + \ldots - \ldots, \end{aligned}\right.$$

ou bien, avec une notation nouvelle,

$$(\Phi_3)\quad \left\{\begin{aligned} & D_{n+1}\begin{pmatrix}x, \xi_1, \ldots, \xi_n\\ y, \eta_1, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} + \lambda\int_0^1 f(\tau, y)\, D_{n+1}\begin{pmatrix}x, \xi_1, \ldots, \xi_n\\ \tau, \eta_1, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} d\tau \\ & \qquad = f(x, y)\, D_n\begin{pmatrix}\xi_1, \ldots, \xi_n\\ \eta_1, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} \\ & \qquad\qquad - f(\xi_1, y)\, D_n\begin{pmatrix}x, \xi_2, \ldots, \xi_n\\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\end{pmatrix} \\ & \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \qquad + (-1)^n f(\xi_n, y)\, D_n\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}\, x\\ \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, \eta_n\end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Si $D(\lambda_0) = 0$, si pour $\lambda = \lambda_0$, les fonctions D_p s'annulent, p étant $1, 2, 3, \ldots (n - 1)$.

M. Fredholm prouve :

1° Que l'équation intégrale homogène :

$$\varphi(x) + \lambda_0\int_0^1 f(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0 \tag{3}$$

a n solutions linéairement indépendantes ;

2° Que l'équation donnée

$$\varphi(x) + \lambda_0\int_0^1 f(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0, \tag{4}$$

est résoluble, si n conditions sont remplies.

Soit donc (¹) :

$$D^0 \equiv 0 \equiv D_1^0 \equiv \dots \equiv D_{n-1}^0.$$

Introduisons, pour la symétrie, la *constante* Δ^0 :

$$D_n^0 \begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \end{pmatrix} \equiv \Delta^0.$$

L'équation (3) a n solutions que nous représentons par L_1, L_2, ..., L_n.

$$\left\{ \begin{aligned} L_1(x) &= \frac{1}{\Delta^0} D_n^0 \begin{pmatrix} x, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n \end{pmatrix} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_n(x) &= \frac{1}{\Delta^0} (-1)^{n-1} D_n^0 \begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, x \\ \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}, \eta_n \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Ces solutions sont *linéairement indépendantes.*

7. *Conditions relatives à un pôle λ_0 de la solution primitive.* — (4) peut avoir une solution, si n conditions sont remplies. (3) étant résolu, nous avons donc une *infinité* de solutions, pour (4), s'il y en a une.

Écrivons les équations

$$\text{(III)} \qquad g(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x, y)\, g(y)\, dy = 0.$$

$$\text{(III}_1\text{)} \qquad h(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(y, x)\, h(y)\, dy = 0.$$

Les D_p sont les mêmes, donc on a les mêmes pôles λ_0, donc même nombre de solutions ; soient L celles de (III) et M celles de (III$_1$).

(¹) Dans ces conditions, λ_0 est racine de D, d'ordre $> n$, d'après l'expression de $\frac{d^p}{d\lambda^p}$ D.

L'on doit avoir :

$$0 = a_i \equiv \int_0^1 \mathrm{M}_i(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Ce sont les CONDITIONS.

8. *Si elles sont remplies, on a la solution*

$$(5) \qquad \varphi(x) = \psi(x) + \lambda_0 \int_0^1 g(x,\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau,$$

D^0_{n+1} et Δ^0 ont été définis, et l'on a :

$$g(x, y) = -\frac{1}{\Delta^0}\,\mathrm{D}^0_{n+1}\begin{pmatrix} x, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y, \eta_1, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}.$$

On le vérifie assez facilement.

Notons que toutes nos fonctions D sont *entières* en λ.

Donc la solution est méromorphe en λ, *et pour que l'équation* homogène *ait une solution non nulle, il faut que* λ *soit racine de* $\mathrm{D}(\lambda)$.

Pour une racine λ_0, *si des conditions sont remplies, l'équation* (F) ***est résoluble.***

Tel est le résumé élémentaire du célèbre Mémoire de M. Fredholm.

Appliquons ceci aux Problèmes de Dirichlet et de Neumann, puis nous reviendrons à cette belle Théorie.

CHAPITRE IV

Les Problèmes de Dirichlet et de Neumann. — Nouveaux Problèmes

Nous allons appliquer les résultats de M. Fredholm à nos quatre problèmes. Nous retrouvons les conditions connues pour deux de ces problèmes. La discussion détaillée est faite d'après les beaux travaux de M. J. Plemelj (¹).

(¹) MONATSHEFTE FÜR MATH. U. PHYSIK, t. XV, t. XVIII.

Puis nous indiquons (¹) comment l'on retrouve la méthode de Carl Neumann (²), et quelques problèmes beaucoup plus généraux.

1° *Discussion du Problème de Dirichlet.*

Soit le problème *intérieur*, dans l'espace, $W_i(s)$ est donné, nous avons :

$$(1) \qquad \nu(s) - \frac{\lambda}{2\pi} \int \nu(\sigma) \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma = \frac{W_i}{2\pi}; \quad \lambda = -1.$$

Pour le problème *extérieur*, même équation, avec $\lambda = +1$.

En général, si λ_0 est une *racine* de $D(\lambda)$, et pour ces valeurs seulement, l'équation homogène a une solution non nulle. Or, pour $\lambda = +1$, nous avons la solution $\nu =$ constante. Donc ce point est une racine.

1. D'abord nous allons voir que toutes les racines sont *réelles*.

En effet, l'équation homogène :

$$(2) \qquad f_s - \lambda_0 \int \frac{1}{2\pi} f_\sigma \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma = 0$$

équivaut, d'après les formules fondamentales à :

$$(3) \qquad W_i - W_e = \lambda_0 (W_i + W_e)$$

f étant la densité de la double couche. Supposons

$$\lambda_0 = a + ib,$$

d'où :

$$W = A + iB.$$

Portons dans (3) en remarquant que l'on a sur la surface C :

$$(4) \qquad \frac{dW_i}{dn} = \frac{dW_e}{dn}$$

D'où les équations, en séparant le réel et le complexe :

(¹) Nachrichten zu Göttingen, 1902, Mémoire de M. Kellog.

(²) *Œuvres* de Carl Neumann, Leipzig, Teubner. Mémoire de M. Poincaré.

$$(5) \qquad A_i(1-a) - A_e(1+a) + b(B_i + B_e) = 0$$

$$(6) \qquad B_i(1-a) - B_e(1+a) - b(A_i + A_e) = 0$$

Intégrons sur C, après avoir multiplié successivement par $\frac{dA_i}{dn}$ et $\frac{dB_i}{dn}$, tenons compte de (4) et des équations (¹) :

$$\int \left(B_i \frac{dA_i}{dn} - A_i \frac{dB_i}{dn} \right) d\sigma = 0, \quad \int \left(B_e \frac{dA_e}{dn} - A_e \frac{dB_e}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Ajoutons et retranchons, il vient :

$$(7) \qquad \int \left(A_i \frac{dA_i}{dn} + B_i \frac{dB_i}{dn} + A_e \frac{dA_e}{dn} + B_e \frac{dB_e}{dn} \right) d\sigma = 0$$

$$(8) \qquad (1-a) \int \left(A_i \frac{dA_i}{dn} + B_i \frac{dB_i}{dn} \right) d\sigma$$

$$= (1+a) \int \left(A_e \frac{dA_e}{dn} + B_e \frac{dB_e}{dn} \right) d\sigma.$$

Donc chaque membre est nul, dans (8). Les deux termes de chaque membre ont d'ailleurs même signe, d'où :

$$\int A_i \frac{dA_i}{dn} d\sigma = 0$$

et trois égalités semblables. Donc, d'après la formule de Green (Chap. II, n° 9) :

$$\left\{ \begin{aligned} A_i &= \text{const} \\ A_e &= \text{const} \\ B_i &= \text{const} \\ B_e &= \text{const} \end{aligned} \right.$$

Comme A_e et B_e sont nuls à l'infini, l'on a $A_e = B_e = 0$.

(¹) Le signe $\int$ désigne constamment que l'intégration est étendue au *contour C, courbe ou surface, portant la donnée*. Remarquer, en effet, que l'*intégrale sur un contour Γ, à l'infini, s'annule.*

Alors (3) devient

$$W_i = \lambda_0 W_i$$

$$W_i = 0.$$

Donc $$A_i = B_i = 0.$$

Ayant $W_i = W_e = 0$, nous savons que la densité f est aussi identiquement nulle.

2. Donc λ_0 est *réel*. De plus, son *module* est supérieur ou égal à *un*.

Nous écrivons, en effet, l'équation (3) sous la forme :

$$\int (W_i - W_e) \frac{dW}{dn} d\sigma = \lambda_0 \int (W_i + W_e) \frac{dW}{dn} d\sigma$$

$$\lambda_0 = \frac{\int W_i \frac{dW_i}{dn} d\sigma - \int W_e \frac{dW_e}{dn} d\sigma}{\int W_i \frac{dW_i}{dn} d\sigma + \int W_e \frac{dW_e}{dn} d\sigma}$$

Or, d'après les formules fondamentales du Chap. II (n° 10), l'intégrale sur le bord *intérieur* est négative et sur le bord *extérieur* elle est positive, d'où :

$$\lambda_0 = - \frac{P^2 + Q^2}{P^2 - Q^2}$$

L'on ne peut avoir $P = Q = 0$, car il en résulterait :

$$W_e = \text{const} = 0$$

$$W_i = \text{const}.$$

D'après (3) $W_i = 0$, l'on aurait donc $f = 0$.

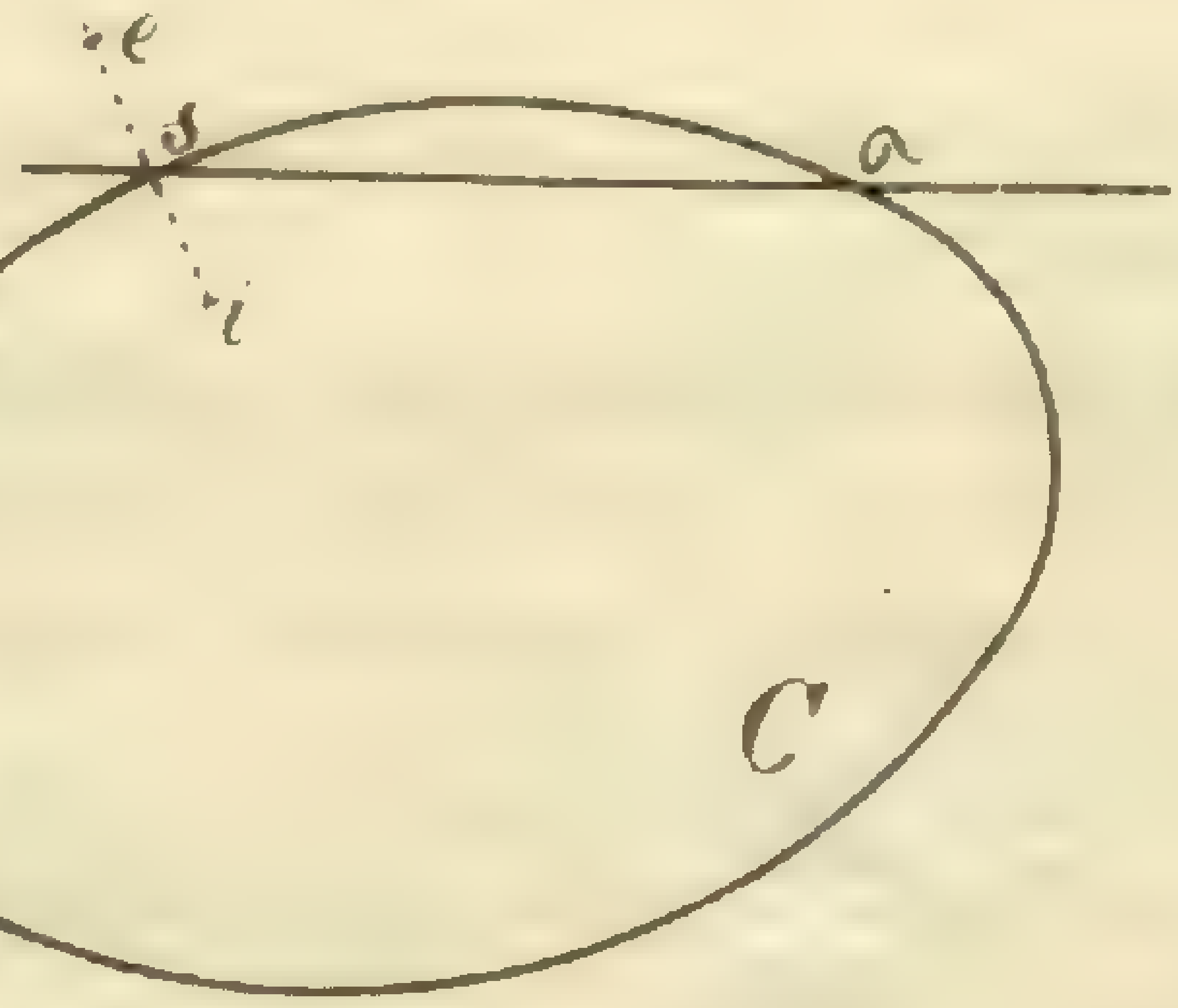
D'après cette remarque, il est clair que l'on a :

$$|\lambda_0| \geq 1.$$

3. Montrons maintenant que le point $\lambda = -1$ n'est pas un pôle, c'est-à-dire que le problème de Dirichlet, INTÉRIEUR, comporte une solution, sans condition.

Sinon, nous aurions une densité *non nulle* avec $W_i = 0$ *dans le domaine intérieur*. Donc, *sur le bord intérieur :*

$$\frac{dW_i}{dn} = 0$$



et, à cause de la continuité l'on aurait aussi *sur le bord extérieur :*

$$\frac{dW_e}{dn} = 0$$

d'où :

$$\int W_e \frac{dW_e}{dn} \, d\sigma = 0.$$

Alors W_e serait *constant* dans tout l'espace extérieur, donc *nul*. Ceci contredit l'hypothèse d'une densité non nulle.

4. Il n'y a pas de pôle *multiple* (Voir la section suivante).

5. *Problème extérieur, dans l'espace*. D'après ce qui précède, pour pouvoir obtenir ν il y a *une condition*. Soit T la solution, qui existe, de :

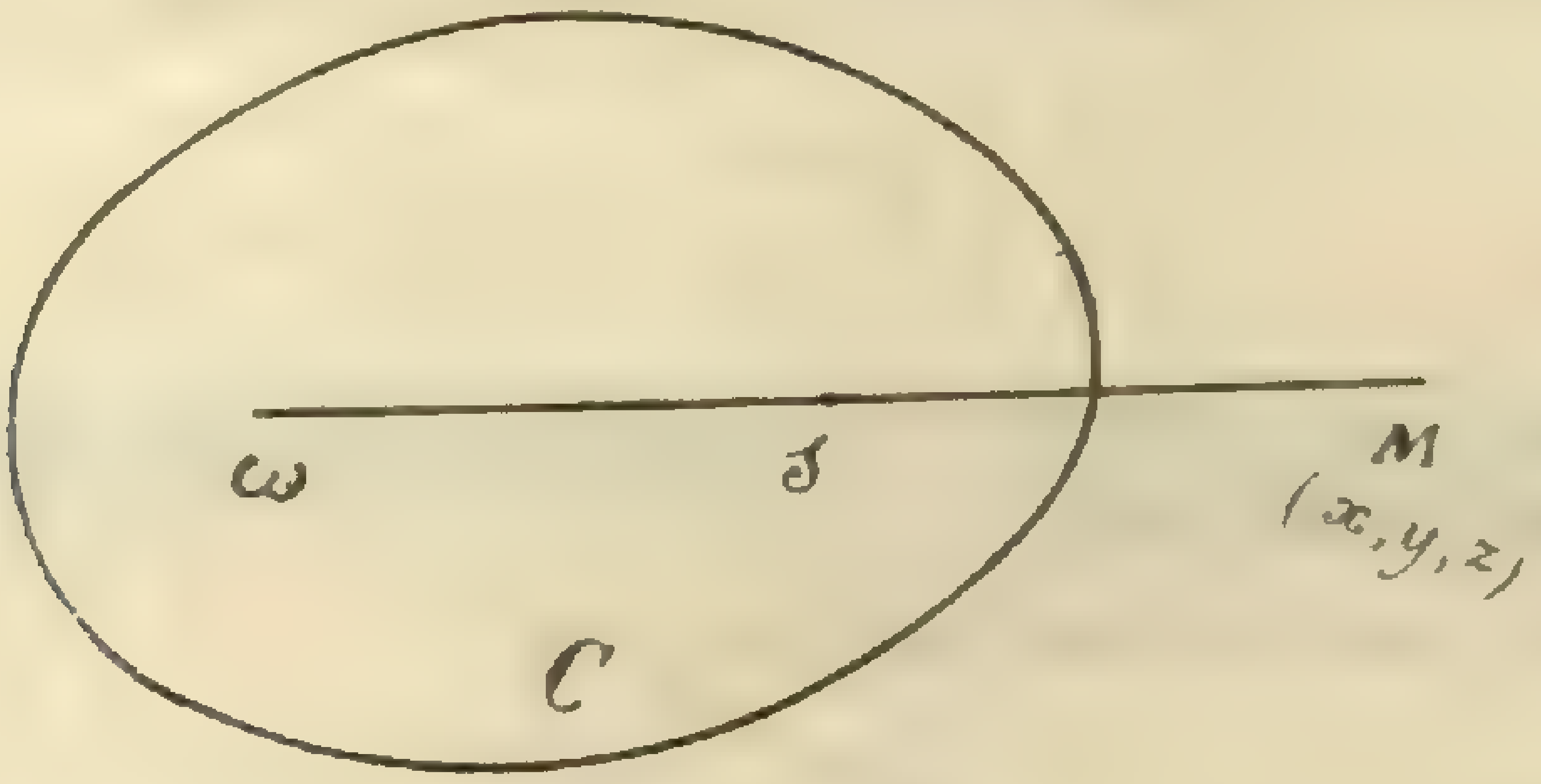
$$T_s - \frac{1}{2\pi} \int T\sigma \frac{\cos \omega}{r^2} \, d\sigma = 0.$$

Soit W_s^e la fonction donnée, la condition est :

$$\Gamma = \int W_s^e \, T_s \, ds = 0.$$

Supposons-la *non remplie :* $\Gamma \neq 0$. Alors nous pouvons nous tirer d'embarras par l'adjonction d'une simple couche.

Soit un point ω, intérieur à C, soit $\omega M = r$. Or $\frac{1}{r}$ est un potentiel de simple couche qui prend sur C la valeur Φ_s.



Considérons Φ_s comme la valeur extérieure sur C d'une double couche, $\Phi_s = U_s^e$ et soit γ la constante correspondante,

$$\gamma = \int \Phi_s T_s \, ds$$

soit m une constante définie ainsi :

$$\Gamma + m\gamma = 0.$$

La solution de notre problème sera formée de la *double couche* correspondant à la donnée :

$$U_s^e + m\Phi_s$$

avec la *simple couche* prenant sur C la valeur $-m\Phi_s$: $-\frac{m}{r}$.

Et ceci n'est pas *illusoire,* car la double couche correspondant à Φ_s devant être, *à l'infini,* de la forme $\frac{1}{r^2}$ ne saurait être identiquement égale à $\frac{1}{r}$ (H. Poincaré, *Le Potentiel*, p. 308).

6. Problème extérieur, dans le plan.

Ici, il y a une condition, et rien ne permet de l'éliminer car $\log \frac{1}{r}$ est infini à l'infini et c'est la seule solution, en r, de l'équation de Laplace.

L'on doit donc avoir :

$$\int W_s^e T_s \, ds = 0$$

T_s étant *la* solution, qui existe bien, de l'équation

$$T_s - \frac{1}{\pi} \int T\sigma \frac{\cos \omega}{r} \, d\sigma = 0.$$

La fonction T_s a d'ailleurs une signification physique (H. Poincaré, *Le Potentiel*, p. 310).

Donnons-nous sur le *bord intérieur* de C

$$\frac{dV_i}{dn_i} = 0$$

c'est-à-dire, prenons, *dans l'aire* C,

$$V_i = \text{constante}$$

la formule :

$$\frac{dV_e}{dn} - \frac{dV_i}{dn} = 2\pi\mu'$$

donnera ici :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{dV_e}{dn} = \mu'.$$

Nous voyons que T n'est autre chose que la densité μ', dans ce problème (voir la section suivante).

2° *Discussion du Problème de Neumann.*

Nous sommes dans le plan, on donne

$$\frac{dV_e}{dn_e} \text{ ou } \frac{dV_i}{dn_i},$$

l'équation est :

$$(1) \qquad \mu(s) + \frac{\lambda}{\pi} \int \mu(\sigma) \frac{\cos \omega}{r} \, d\sigma = \psi(s).$$

Pour $\lambda = -1$ c'est le problème *intérieur* et pour $\lambda = +1$ c'est le problème *extérieur*. Pour $\lambda = -1$, l'équation homogène (2) a la solution $\mu = \text{constante}$. Nous retrouvons la condition de possibilité du problème intérieur.

L'étude de cette équation est analogue à l'étude précédente. Il faut étudier l'équation homogène (2) déduite de (1).

1. D'abord les pôles sont *réels*, car soit un pôle $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, soit le potentiel simple correspondant $V = U + iT$. Nous devrions obtenir une densité non nulle telle que l'on ait :

$$\frac{dV_e}{dn} - \frac{dV_i}{dn} + \lambda_0 \left(\frac{dV_e}{dn} + \frac{dV_i}{dn} \right) = 0. \tag{3}$$

D'abord, intégrons la fonction du premier membre sur C : comme l'on a :

$$\int \frac{dV_i}{dn}\, d\sigma = 0 \tag{4}$$

nous en déduisons, ou bien $\lambda_0 = 1$ (réel), ou bien :

$$\int \frac{dV_e}{dn}\, d\sigma = 0. \tag{5}$$

Or, (4) et (5) donnent de suite :

$$\int \mu(\sigma)\, d\sigma = 0, \textit{ masse totale nulle}. \tag{6}$$

Portons maintenant, dans (3) nos expressions complexes. Il vient, comme précédemment, en multipliant par U et T,

$$0 = \beta \left[\int \left(U \frac{dU_e}{dn} + T \frac{dT_e}{dn} + U \frac{dU_i}{dn} + T \frac{dT_i}{dn} \right) d\sigma \right] \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (1 + \alpha) \int \left(U \frac{dU_e}{dn} + T \frac{dT_e}{dn} \right) d\sigma \\ & = (1 - \alpha) \int \left(U \frac{dU_i}{dn} + T \frac{dT_i}{dn} \right) d\sigma. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Alors, ou bien $\beta = 0$, λ est *réel*, ou bien le facteur de β est nul, donc les facteurs de $(1 + \alpha)$ et $(1 - \alpha)$ seront nuls, dans l'équation (8). Reportons-nous aux formules relatives au signe. (Chap. II. nº 10), nous avons enfin :

$$\int U_e \frac{dU_e}{dn}\, d\sigma = \int U_i \frac{dU_i}{dn}\, d\sigma = \int T_e \frac{dT_e}{dn}\, d\sigma = \int T_i \frac{dT_i}{dn}\, d\sigma = 0.$$

A cause de (6), U et T seraient constants dans tout l'espace ; ceci exige $\mu = 0$.

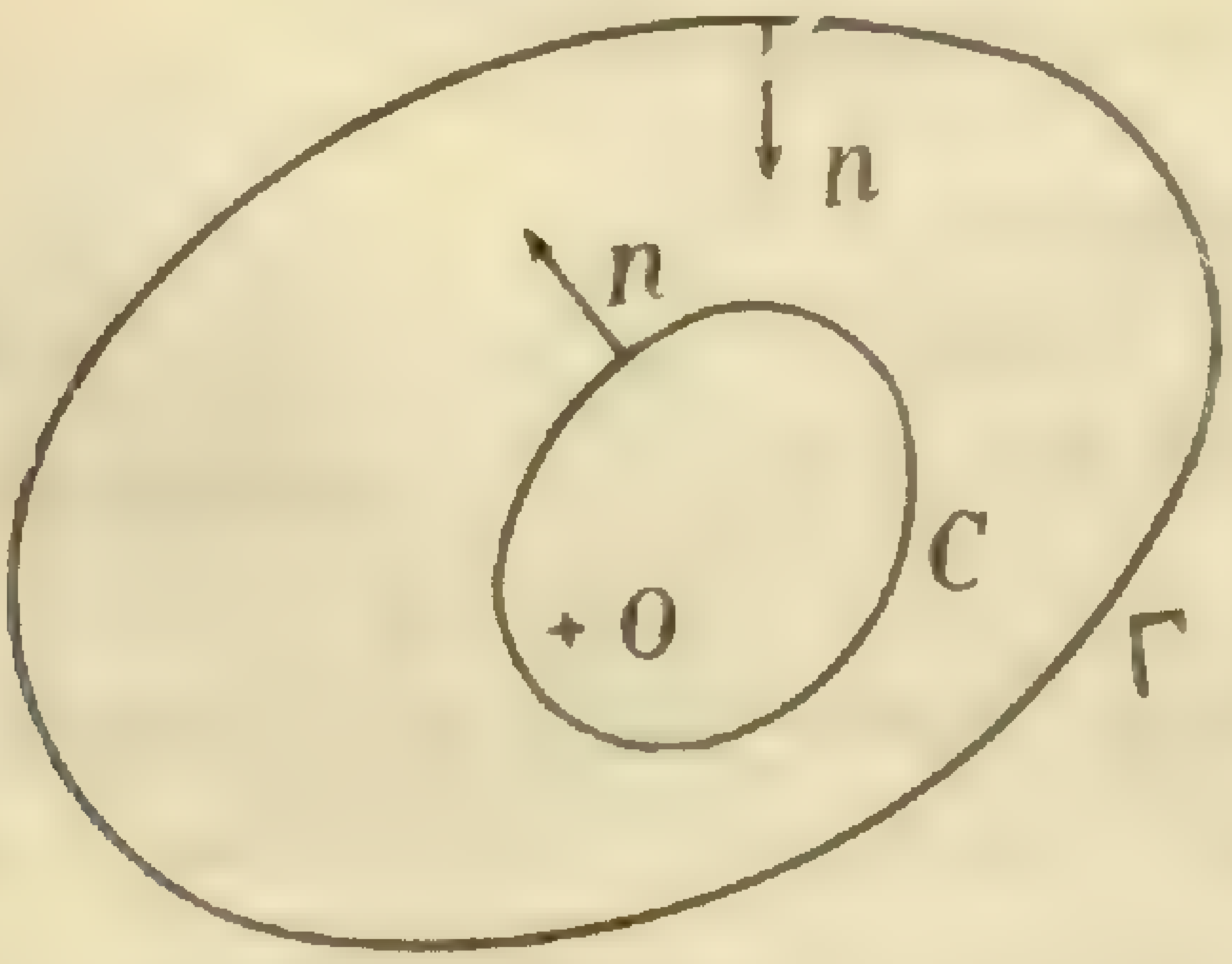
2. Donc λ_0 est réel. Ensuite, son module est supérieur ou égal à *un*. Car (3) donne de suite :

$$(1+\lambda_0)\int V_i \frac{dV_i}{dn} d\sigma + (\lambda_0 - 1)\int V_e \frac{dV_e}{dn} d\sigma = 0. \tag{9}$$

Nous rappelons que n est la normale INTÉRIEURE de C. Dans ces conditions, la formule relative au signe que nous venons de citer, donne, dans le domaine intérieur :

$$\int V_i \frac{dV_i}{dn_i} d\sigma < 0.$$

Dans le domaine extérieur, entre l'aire C et le cercle Γ, l'intégrale étant nulle sur Γ (à l'infini), nous avons :



$$\int_C V_e \frac{dV_e}{dn_e} d\sigma < 0$$

(9) a donc la forme : $(N < 0, \quad P > 0)$.

$$(1+\lambda_0) N + (\lambda_0 - 1) P = 0.$$

Soit

$$N = -Q, \quad \lambda_0 = \frac{P+Q}{P-Q}.$$

Donc $|\lambda_0| > 1$, car l'on ne peut avoir $P = Q = 0$ (raisonnement déjà fait).

3. Nous savons que le point $\lambda_0 = -1$ est une racine de D ; l'on démontre encore que le point $\lambda_1 = +1$ n'est pas racine. Donc, ici, le problème EXTÉRIEUR est toujours possible.

Si, en effet, le point $+1$ était une racine, nous aurions une densité μ non nulle avec

$$\frac{dV_e}{dn} = 0, \text{ sur le bord.}$$

Alors

$$\int V_e \frac{dV_e}{dn} d\sigma = 0 ;$$

V_e serait constant dans tout le domaine extérieur à C, donc *nul*, puisque $V_\infty = 0$, d'après (6). Alors V_i serait *nul* dans le domaine intérieur, d'où $\mu \equiv 0$. C'est la contradiction cherchée.

4. Montrons enfin que les racines sont *simples*. Portons pour cela, dans l'équation donnée :

$$\mu_s + \lambda \int F(s, \sigma)\, \mu_\sigma\, d\sigma = \psi_s \tag{1}$$

une solution méromorphe en λ :

$$\mu_s = \frac{A_s}{(\lambda_0 - \lambda)^n} + \frac{B_s}{(\lambda_0 - \lambda)^{n-1}} + \dots \tag{10}$$

Écrivons : $\lambda = \lambda_0 - (\lambda_0 - \lambda)$ et identifions :

$$A_s + \lambda_0 \int F A_\sigma\, d\sigma = 0 \tag{11}$$

$$B_s + \lambda_0 \int F B_\sigma\, d\sigma = \int F A_\sigma\, d\sigma. \tag{12}$$

Regardons A_s et B_s comme des *densités* μ, correspondant aux potentiels simples V et T. Les équations (11), (12) peuvent alors être remplacées par :

$$\frac{dV_e}{dn} - \frac{dV_i}{dn} + \lambda_0 \left(\frac{dV_e}{dn} + \frac{dV_i}{dn} \right) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{dT_e}{dn} - \frac{dT_i}{dn} + \lambda_0 \left(\frac{dT_e}{dn} + \frac{dT_i}{dn} \right) = \frac{dV_e}{dn} + \frac{dV_i}{dn} \tag{14}$$

Intégrons, après avoir multiplié la 1re par T et la 2e par V, il vient :

$$\int \left(V \frac{dV_e}{dn} + V \frac{dV_i}{dn} \right) d\sigma = 0$$

$$\int \left(V \frac{dV_e}{dn} - V \frac{dV_i}{dn} \right) d\sigma = 0$$

c'est-à-dire :

$$\int V \frac{dV_e}{dn} \, d\sigma = \int V \frac{dV_i}{dn} \, d\sigma = 0.$$

Donc, *dans tout l'espace :*

$$V_e = V_i \equiv 0 \text{ et } A \equiv 0.$$

Ceci supposait $\lambda_0 + 1 \neq 0.$

Si $\lambda_0 + 1 = 0$, c'est encore plus rapide, car (13) et (14) deviennent :

$$\frac{dV_i}{dn} = 0, \quad \frac{dV_e}{dn} = -2 \frac{dT_i}{dn}.$$

Alors on a

$$\int \frac{dV_i}{dn} \, d\sigma = 0, \quad \int \frac{dV_e}{dn} \, d\sigma = 0.$$

Donc $V_e \equiv \text{const} = 0.$

Alors $V_i \equiv$ const et V_i est nul sur le bord, donc $V_i \equiv 0$, donc $A \equiv 0$.

On démontre de la même façon que les racines λ_0 sont simples, pour l'équation du problème de Dirichlet.

3° *La méthode de la Moyenne Arithmétique.*

M. Kellogg a montré que la méthode de M. Fredholm permet, en particulier, de retomber immédiatement sur la « méthode de la moyenne arithmétique » de M. Carl Neumann. L'on a une série en λ, avec le pôle $\lambda = 1$; le résidu est une constante (indépendant du point s sur le contour). La convergence de la série de C. Neumann s'établit très facilement et pour des contours bien plus compliqués que ceux de C. Neumann.

4° *Problèmes de la Physique* (¹). — *Aimantation par influence.* Il faut trouver un potentiel simple, avec la condition, sur le contour

$$\frac{dV_s^i}{dn} + K\,\frac{dV_s^e}{dn} = \psi_s \text{ fonction donnée.}$$

Équilibre de température avec rayonnement. — Il faut trouver un potentiel de simple couche avec la condition au contour

$$KV_s - \frac{dV_s^i}{dn} = \psi_s.$$

Vibration des membranes. — Il faut intégrer

$$\Delta u + K\,c(x, y)\,u = f(x, y)$$

$c(x, y)$ étant positif dans l'intérieur du contour sur lequel u est donné ; K désignant toujours une *constante*.

Après les beaux travaux de MM. H. Weber, Schwarz, Picard, Poincaré, par la théorie de Fredholm l'on montre rapidement que les pôles correspondent à *une infinité de valeurs positives* de K et qu'ils sont *simples*.

Récemment, M. Sanielevici a fait l'extension au cas où $c(x, y)$ *change de signe* dans le domaine.

5° *Équations différentielles.*

Soit :

$$\Delta u + a\,\frac{\delta u}{\delta x} + b\,\frac{\delta u}{\delta y} + cu = f$$

l'on donne sur le contour C, ou bien u, ou bien $\frac{du}{dn_i}$, ou encore, $u_s + \varphi_s\,\frac{du_s}{dn_i}$, l'on est ramené à l'équation de Fredholm (²).

Soit encore :

$$\Delta u = u$$

L'on donne u_s, sur le contour et l'on veut que $e^y \times u$ soit *nul à*

(¹) Émile Picard, Circ. di Palermo, 1906.

(²) E. Picard, Ann. École normale sup., 1906 et 1907.

l'infini. Au lieu de la fonction auxiliaire $\log \frac{1}{r}$, il faut prendre (¹) :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{zr}\,dz}{\sqrt{z^2-1}}.$$

D'autres beaux problèmes sont traités par M. D. Hilbert (²), en particulier celui-ci : trouver une fonction $u(x, y) + iv(x, y)$, synectique dans l'aire (C) avec la condition que l'on ait, sur le contour C :

$$a_s u_s + b_s v_s = c_s$$

a_s, b_s, c_s étant des fonctions données.

Puis, MM. Hilbert et Plemelj abordent, par les équations intégrales, des problèmes fondamentaux de la *théorie des fonctions*...

Nous ne pouvons donner qu'un aperçu rapide des travaux remarquables déjà faits dans cet ordre d'idées tout nouveau.

Faisons seulement une petite remarque, qui montre de suite le lien entre les Problèmes de Dirichlet et de Neumann.

Soient un contour plan, C, s un point fixe, σ un point mobile sur le contour, u une fonction *harmonique dans l'aire* (C) l'on a :

$$\pi u_s = \int_C \left(u \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} - \log \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) d\sigma.$$

n est la normale *intérieure* à l'aire.

Si l'on donne $\frac{du}{dn}$ sur C, l'on connaît

$$U_s = -\frac{1}{\pi} \int \log \frac{1}{r_{s\sigma}} \frac{du}{dn} d\sigma$$

alors u_s est donné par l'équation intégrale :

$$u_s - \frac{1}{\pi} \int u_\sigma \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} d\sigma = U_s$$

(¹) E. Picard, C. R. Ac. des Sciences, sept. 1908.

(²) Nachrichten zu Göttingen ; 2ᵉ Mémoire, 1904 ; 3ᵉ Mémoire, 1905.

Alors, T_s étant la fonction que donne la condition de possibilité (voir n° 5), nous voyons que ces deux conditions sont identiques :

$$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{du}{dn_i}\, d\sigma = 0 \\ &\int U_s\, T_s\, ds = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous espérons avoir bien fait apercevoir le progrès qu'a amené M. Fredholm. Par exemple, on retrouve la méthode de C. Neumann sans la restriction de la *convexité* du contour des données (¹).

CHAPITRE V

L'équation de Fredholm à noyau symétrique

THÉORÈMES DE MM. D. HILBERT ET ERHARD SCHMIDT

1. *Inégalités de Bessel et M. Schwarz.*

Quelques préliminaires sont nécessaires. Soient des fonctions $h_n(x)$, réelles, *continues* dans notre intervalle d'intégration. Elles seront ORTHOGONALES si l'on a :

$$\int h_p(x)\, h_q(x)\, dx = 0$$

et NORMALES si l'on a :

$$\int \overline{h_p(x)}^2\, dx = 1.$$

Si l'on cherche à développer une fonction *continue* $f(x)$ en série de fonctions h_n, on aura :

(¹) Sur tout ceci, voir les livres cités de MM. Poincaré, Picard, Hadamard, un mémoire capital de M. Liapounof (JOURN. DE MATH., 1898), les *Thèses* de MM. Paraf, J. Riemann, Riquier, Robin, et les quelques ouvrages cités dans notre « Bibliographie ».

$$\left\{\begin{aligned} & f(x) \sim \sum a_p h_p(x) \\ & a_p = \int f(y)\, h_p(y)\, dy \end{aligned}\right.$$

(s'il y a convergence, on remplace le signe $\sim$ par le signe $=$).

Nous avons :

$$\left[f(x) - \sum a_p h_p(x)\right]^2 = f(x)^2 + \sum a^2_p\; h_p(x)^2 - 2f(x) \sum a_p h_p(x)$$

Intégrons. Le 2^e^ membre donne :

$$\int \overline{f(x)}^2\, dx + \sum a^2_p - 2 \sum \int f(x)\, h_p(x)\, dx \int f(y)\, h_p(y)\, dy$$
$$= \int f(x)^2\, dx - \sum a^2_p > 0 \qquad \text{(I)}$$

Ceci constitue l'*inégalité de Bessel*. Nous avons à en introduire une seconde.

Rappelons l'*identité de Lagrange :*

$$(a^2 + b^2 + \ldots)\,(\alpha^2 + \beta^2 + \ldots) - (a\alpha + b\beta + \ldots)^2$$
$$= \sum (a\beta - b\alpha)^2 \geq 0.$$

On en conclut l'*inégalité de Schwarz :*

$$\int f^2_x dx \int g^2_x dx - \left(\int f_x \;\; g_x dx\right)^2 \geq 0 \qquad \text{(II)}.$$

Dans (I), il suffit que $f(x)$ soit *quarrable* et de *carré quarrable.*

Dans (II), il suffit que $f(x)$ soit *intégrable* et de *carré intégrable,* si $g(x)$ est *continu.*

2. *Normalisation d'un système de fonctions.*

Soient des fonctions linéairement indépendantes,

$$\varphi_1(x),\; \varphi_2(x),\; \ldots\; \varphi_n(x)\; \ldots$$

l'on peut, par des combinaisons *linéaires* simples, les remplacer par un système

$$\psi_1(x),\; \psi_2(x),\; \ldots$$

de fonctions *linéairement indépendantes*, *orthogonales* et *normales*. C'est la « normalisation » (¹).

D'abord on remplacera $\varphi_1(x)$ par

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\alpha_1}$$

$$\alpha_1^2 = \int \overline{\varphi_1(y)}^2 dy$$

et l'on aura bien :

$$\int \overline{\psi_1}(x)^2 dx = 1.$$

Posons alors :

$$\psi'_2(x) = \varphi_2(x) + m\psi_1(x)$$

l'on peut déterminer m par la condition :

$$\int \psi_1(x)\, \psi'_2(x) = 0$$

et, ψ'_2 étant connu, l'on prendra :

$$\psi_2(x) = \frac{\psi'_2(x)}{\alpha_2}$$

$$\alpha_2^2 = \int \overline{\psi'_2(y)}^2 dy.$$

Nous avons alors, au lieu de φ_1 et φ_2, ψ_1 et ψ_2 qui sont normales et orthogonales. La formule générale est facile à trouver :

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x) - \sum_1^{n-1} \psi_h(x) \int \varphi_n(z)\, \psi_h(z)\, dz}{\alpha_n}$$

$$\alpha_n^2 = \int \left\{ \varphi_n(y) - \sum_1^{n-1} \psi_h(y) \int \varphi_n(z)\, \psi_h(z)\, dz \right\}^2 dy.$$

(¹) Gram, JOURNAL DE CRELLE, Bd. 94.

3. *L'équation intégrale homogène et symétrique* est l'équation :

$$\varphi_s = \lambda \int K(s, t)\, \varphi_t \, dt$$

$$K(s, t) = K(t, s).$$

On peut appeler φ une fonction caractéristique ou fondamentale ou une autofonction ; λ sera un nombre caractéristique ou une autovaleur.

S'il existe des fonctions φ correspondant à des nombres λ différents, *elles sont orthogonales*. C'est facile à voir, K étant *symétrique*.

Soit, en effet :

$$\varphi_p(s) = \lambda_p \int K\, \varphi_p(t)\, dt,$$

$$\varphi_q(s) = \lambda_q \int K\, \varphi_q(t)\, dt.$$

Formons la différence :

$$\int [\lambda_p \varphi_p(s) - \lambda_q \varphi_q(s)]\, ds.$$

Elle donne, K étant SYMÉTRIQUE :

$$(\lambda_p - \lambda_q) \int \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)\, ds = 0.$$

Les nombres λ *sont réels* (¹). Cela se voit facilement car, soit μ le nombre conjugué de λ qui est complexe, soit ψ la fonction conjuguée de φ, l'on aurait, par le théorème précédent :

$$\int \varphi_s \psi_s \, ds = 0$$

avec

$$\varphi_s \psi_s = P^2 + Q^2.$$

Cela n'est pas possible.

(¹) Démontré par M. Hilbert, et par M. Picard.

A un nombre donné λ ne peut correspondre qu'un nombre fini de fonctions φ.

(Voir la théorie générale.)

L'on appellera système complet relatif au noyau symétrique K l'ensemble des fonctions caractéristiques correspondant à toutes les valeurs de λ.

4. *Théorème d'existence.*

Une question capitale se pose : K (s, t) étant donné, *existe-t-il au moins un système* (λ, φ_s) ?

M. Schmidt montre que cela est vrai, pour tout noyau symétrique.

Rappelons la définition des noyaux itérés :

$$K_1(s, t) \equiv K(s, t)$$

$$K_n(s, t) = \int K_1(s, r)\, K_{n-1}(r, t)\, dr.$$

Et définissons les *constantes* U_n ainsi :

$$U_1 = \int K_1(s, s)\, ds, \quad U_2 = \int K_2(s, s)\, ds, \text{ etc.}$$

$$U_{m+n} = \iint K_m(s, r)\, K_n(r, s)\, dr ds$$

$$U_{2n} = \iint \overline{K_n(s, r)}^2\, dr ds.$$

L'*inégalité de Schwarz* donne :

$$\frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$$

$$U_{2n} > \frac{U_{2m+2n}}{U_{2m}}$$

d'où l'existence d'une *limite* C pour le rapport

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$$

avec

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{C^n} = U \geq 1.$$

Montrons alors que

$$\frac{K_{2n}(s, t)}{C^n}$$

a *une limite pour* $n = \infty$.

Écrivons :

$$K_{2n+2}(s, t) = \iint K(s, r_1)\, K(t, r_2)\, K_{2n}(r_2, r_1)\, dr_1 dr_2$$

et l'expression analogue pour $K_{2n}(s, t)$. Si l'on peut rendre l'expression :

$$\left[\frac{K_{2n+2}}{C^{n+1}} - \frac{K_{2n}(s, t)}{C^n}\right]^2$$

moindre, par exemple, que $\frac{1}{n^4}$, le théorème est démontré.

Appliquons l'inégalité de Schwartz à cette différence dont nous avons formé le carré, ce carré est au plus égal, M étant assignable, à :

$$\frac{M}{C^2} \iint dr_1 dr_2 \left\{\frac{K_{2n}(r_1, r_2)}{C^n} - \frac{K_{2n-2}(r_1, r_2)}{C^{n-1}}\right\}^2$$

ou, à :

$$\frac{M}{C^2}\left\{\frac{U_{4n}}{C^{2n}} - 2\frac{U_{4n-2}}{C^{2n-1}} + \frac{U_{4n-4}}{C^{2n-2}}\right\}$$

Or, $\frac{U_{2n}}{C^n}$ ayant une limite, nous sommes dans les conditions voulues

$$\lim_{n=\infty} \frac{K_{2n}(s, t)}{C^n} = \Phi(s, t)$$

Φ *n'est pas identiquement nul*, car

$$\int \Phi(s, s)\, ds = \lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{C^n} = U \geq 1$$

et Φ satisfait à l'équation intégrale :

$$\Phi(s, t) = \frac{1}{C}\int K_2(s, r)\, \Phi(r, t)\, dr.$$

Nous devons seulement encore passer du noyau K_2 au noyau K donné. Ici, nous admettrons le résultat.

5. *Développement en série d'un noyau symétrique.*

Nous admettons donc que, pour un NOYAU SYMÉTRIQUE, la fonction D a *au moins une* racine λ_0 ; qu'elles sont toutes *réelles* ; que les fonctions caractéristiques φ sont *orthogonales*.

Voici alors un théorème fondamental :

Soient les *fonctions caractéristiques normalisées* $\varphi_k(s)$, soient les *nombres caractéristiques* λ_k rangés par ordre de grandeur ; *si la série converge* UNIFORMÉMENT, *l'on aura :*

$$K(s, t) - \sum_k \frac{\varphi_k(s)\,\varphi_k(t)}{\lambda_k} = 0. \tag{1}$$

Représentons, en effet, le premier membre par

$$Q(s, t) = Q(t, s).$$

L'on a :

$$\int K\,\varphi_k(t)\,dt = \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}$$

D'où :

$$\int Q\,\varphi_k(t)\,dt = 0. \tag{2}$$

Ou bien $Q \equiv 0$, et le théorème est prouvé ; ou bien $Q \neq 0$ et alors il existe un nombre Λ_0 et une fonction $\psi(s)$, de sorte que l'on ait :

$$\psi_s = \Lambda_0 \int Q\,\psi_t\,dt.$$

Au lieu de (2) l'on peut écrire :

$$\int \psi(s)\,ds \int Q\,\varphi_k(t)\,dt = 0.$$

Échangeons s et t, il vient :

$$\int \psi(t)\,\varphi_k(t)\,dt = 0.$$

Mais alors ψ ferait partie du système des fonctions φ_k (ce qui est contraire à l'hypothèse), car nous avons :

$$\psi_s = \Lambda_0 \int Q\,\psi_t\,dt = \Lambda_0 \int K\,\psi_t\,dt.$$

Donc $Q \equiv 0$, et le théorème est prouvé. Nous allons, de même, développer un NOYAU ITÉRÉ.

Soit toujours

$$K_1(s,t) = K(s,t)$$

$$K_2(s,t) = \int K_1(s,r)\,K_1(r,t)\,dr$$

$$K_n(s,t) = \int K_1(s,r)\,K_{n-1}(r,t)\,dr.$$

Nous avons :

$$\varphi_s = \lambda \int K(s,t)\,\varphi_t\,dt$$

$$\varphi_t = \lambda \int K(t,r)\,\varphi_r\,dr$$

d'où :

$$\varphi_s = \lambda^2 \int K_2(s,r)\,\varphi_r\,dr$$

et

$$\varphi_s = \lambda^n \int K_n(s,r)\,\varphi_r\,dr.$$

Au noyau K_n correspond le nombre λ^n. Si donc il y a convergence, nous avons :

$$K_4(s,t) = \sum \frac{\varphi_k(s)\,\varphi_k(t)}{\lambda^4_k}$$

Or il y a convergence, donc la formule est vraie si le noyau K est de *carré sommable*. En effet :

$$\sum_n^{n+m} \left| \frac{\varphi_k(s)\,\varphi_k(t)}{\lambda^4_k} \right| \leq \frac{1}{2\lambda^2_n} \sum_n^{n+m} \frac{\varphi^2_k(s) + \varphi^2_k(t)}{\lambda^2_k}$$

puisque l'on a :

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Puis, d'après l'inégalité de Bessel :

$$\sum \frac{\varphi^2_k(s)}{\lambda^2_k} = \sum \left(\int K\,\varphi_k(t)\,dt \right)^2 < \int K^2\,dt.$$

Donc notre somme tend vers *zéro* avec $\frac{1}{\lambda_n}$.

6. *Théorèmes fondamentaux d'Hilbert-Schmidt.*

Établissons un *Lemme*.

Soit h_s une fonction continue, telle que l'on ait :

$$\int \mathrm{K}\, h_t\, dt = 0. \tag{1}$$

Nous en déduisons, en multipliant par $\varphi_k(s)$ et intégrant :

$$\int \varphi_k(t)\, h(t)\, dt = 0. \tag{2}$$

La réciproque est vraie. De (2) l'on déduit (1) — car, d'après la forme de K_4, nous tirons de (2) :

$$\iint \mathrm{K}_4\, h_s\, h_t\, ds\, dt = 0.$$

$$\iiint \mathrm{K}_2(s, r)\, \mathrm{K}_2(r, t)\, h(s)\, h(t)\, dr\, ds\, dt = 0.$$

D'où :

$$\int \mathrm{K}_2(s, r)\, h(s)\, ds = 0.$$

Partons de ceci, nous aurons :

$$\iint \mathrm{K}_2(s, r)\, h(s)\, h(r)\, dr\, ds = 0.$$

D'où :

$$\int \mathrm{K}\, h(s)\, ds = 0$$

et la réciproque est prouvée.

Nous arrivons alors aux développements généraux des fonctions.

Soit maintenant p_t une fonction continue, cherchons des développements pour $g(s)$, avec les fonctions φ, $g(s)$ étant donné ainsi :

$$g(s) = \int \mathrm{K}(s, t)\, p(t)\, dt. \tag{3}$$

Formons la fonction :

$$g(s) - \sum \varphi_k(s) \int g(t)\, \varphi_k(t)\, dt = h(s) \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int h(s)\, \varphi_k(s)\, ds \\ &= \int g(s)\varphi_k(s)ds - \int \varphi_k(s)\, ds \sum \varphi_k(s) \int g(t)\varphi_k(t)\, dt = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

D'après ce qui précède, nous avons :

$$\int \mathrm{K}\, h_t\, dt = 0. \tag{6}$$

Formons maintenant, pour prouver que h est *nul*, l'intégrale :

$$\int h^2_s\, ds = \int h_s\, g_s\, ds - \sum \int h_s\, \varphi_k(s)\, ds \int g_t\, \varphi_k(t)\, dt.$$

Le 2^e^ terme du 2^e^ membre est nul, d'après (5) ; le 1^er^ terme du 2^e^ membre est nul, d'après (6). Donc $h_s = 0$ et alors (4) donne un développement pour $g(s)$.

$$g(s) = \sum \varphi_k(s) \int g(t)\, \varphi_k(t)\, dt \tag{I}$$

D'ailleurs

$$g(t) = \int \mathrm{K}(t, r)\, p(r)\, dr.$$

D'où :

$$g(s) = \sum \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \int \varphi_k(r)\, p(r)\, dr \tag{II}.$$

Ici le noyau symétrique K paraît ne pas figurer, mais il figure par l'intermédiaire des φ. Enfin, remplaçons $\varphi_k(s)$ par sa valeur

$$\lambda_k \int \mathrm{K}\, \varphi_k(t)\, dt,$$

nous avons :

$$g(s) = \sum \int \mathrm{K}(s, t)\, \varphi_k(t)\, dt \int \varphi_k(t)\, p(t)\, dt \tag{III}.$$

De la formule (II) se déduit encore le théorème de M. Hilbert, obtenu par l'étude des formes quadratiques à une infinité de variables. Soit une fonction continue $q(s)$; formons l'intégrale

$$\int g(s)\, q(s)\, ds.$$

Nous obtenons :

$$\iint \mathrm{K}(s, t)\, p(t)\, q(s)\, ds\, dt$$

$$= \sum \frac{1}{\lambda_k} \int q(s)\, \varphi_k(s)\, ds \int p(t)\, \varphi_k(t)\, dt \qquad \text{(IV)}.$$

Les formules (I), (II), (III), (IV) constituent des théorèmes extrêmement beaux, qui vont nous permettre d'indiquer une très belle résolution de l'équation de Fredholm à noyau symétrique.

7. *Résolution de l'équation de Fredholm à noyau symétrique.*

f_s est donné, φ_s est l'inconnue, soit :

$$f_s = \varphi_s - \lambda \int \mathrm{K}(s, t)\, \varphi_t\, dt \qquad (1)$$

Nous posons :

$$\varphi_s = f_s + g_s,$$

d'où :

$$g_s = \lambda \int \mathrm{K}(f_t + g_t)\, dt \qquad (2)$$

Reportons-nous au paragraphe précédent. De (I) l'on tire d'abord

$$g(s) = \sum \varphi_k(s) \int g(t)\, \varphi_k(t)\, dt \qquad (3)$$

Or on peut exprimer la quadrature ci-dessus à l'aide des φ_k et de f, car, l'on tire de (3) :

$$\int g(s)\, \varphi_k(s)\, ds = \int g(t)\, \varphi_k(t)\, dt$$

$$= \lambda \int \varphi_k(s)\, ds \int \mathrm{K}(f_t + g_t)\, dt$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_k} \int \varphi_k(t)(f_t + g_t)\, dt$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_k} \left(\int \varphi_k(t)\, f_t\, dt + \int \varphi_k(t)\, g_t\, dt \right)$$

ou enfin :

$$(4) \qquad \int g(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda}\int f(t)\,\varphi_k(t)\,dt$$

D'où la solution :

$$(5) \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \sum \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}\int f(t)\,\varphi_k(t)\,dt.$$

8. Remarquons que *toutes nos séries convergent*. Prenons, par exemple, le terme général u_k de la série qui figure dans la solution (5).

$$u_k = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}}\int K(s, t)\,\varphi_k(t)\,dt \int f(t)\,\varphi_k(t)\,dt$$

Nous allons établir un théorème. Soit un système *normalisé :*

$$\Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\ \ldots$$

Si l'on veut développer $f(x)$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \sim \sum a_n\,\Phi_n(x) \\ a_n = \int f(x)\,\Phi_n(x)\,dx \end{array}\right.$$

Développons de même la fonction $Q(z, x)$, qui contient un paramètre z :

$$\left\{\begin{array}{l} Q(z, x) \sim \sum b_n(z)\,\Phi_n(x) \\ b_n(z) = \int Q(z, x)\,\Phi_n(x)\,dx. \end{array}\right.$$

Nous avons d'abord :

$$J = \int\left(\sum a_h\,\Phi_h\right)\left(\sum b_k\,\Phi_k\right)dx = \sum_h a_h\,b_h$$

Puis, de même :

$$\int \left(\sum a_h \ \Phi_h \right)^2 dx = \sum a_h^2$$

$$\int \left(\sum b_k \ \Phi_k \right)^2 dx = \sum b_k^2$$

Et, d'après l'inégalité de Bessel, ces deux dernières sommes sont finies si $f(x)$ et $Q(z, x)$ sont *quarrables et de carré quarrable.*

Dans ces conditions, la 1

Dans ces conditions, la 1^e est un nombre fini α, la 2^e est un nombre fini β.

L'inégalité de Schwartz donne alors :

$$J^2 < \alpha\beta.$$

Donc la série

$$\sum a_h b_h$$

converge absolument et uniformément, z et x étant chacun dans un intervalle tel que f et Q soient intégrables et de carré intégrable.

La conclusion est que la *seule hypothèse* sur le *noyau symétrique* est la suivante : INTÉGRABLE ET DE CARRÉ INTÉGRABLE.

CHAPITRE VI

Nouvelle solution de l'équation de Fredholm à noyau quelconque

M. Erhard Schmidt a donné une nouvelle solution, très élégante, de l'équation de M. Fredholm. Soit

$$(1) \qquad f(s) = \varphi(s) - \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

1^{re} Remarque. — Si l'on a

$$K(s, t) = \sum_{1}^{m} \alpha_p(s)\, \beta_p(t),$$

nous sommes ramené à n équations du premier degré. C'est immédiat et MM. Goursat et Lebesgue ont écrit des mémoires intéressants en partant de là.

2ᵉ Remarque. — Supposons

$$\iint K^2\, ds\, dt < \mu < 1.$$

Dans ce cas, l'*itération* du noyau va nous donner la solution. Posons :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} K_1(s,t) &= K(s,t) \\ K_2(s,t) &= \int K_1(s,r)\, K_1(r,t)\, dr \\ K_n(s,t) &= \int K_1(s,r)\, K_{n-1}(r,t)\, dr. \end{aligned}\right.$$

En regardant K_{n+1} comme une intégrale n — *uple,* l'on voit que :

$$K_{p+q}(s,t) = \int K_p(s,r)\, K_q(r,t)\, dr.$$

Reportons-nous à la valeur de $K_n(s,t)$, l'inégalité de Schwarz donne :

$$(2)\qquad \overline{K_n(s,t)}^2 < \int \overline{K_1(s,r)}^2\, dr \int \overline{K_{n-1}(r,t)}^2\, dr$$

$$\iint \overline{K_n}^2\, ds\, dt \leq \iint \overline{K_1(s,r)}^2\, ds\, dr \iint \overline{K_{n-1}(r,t)}^2\, dr\, dt$$

répétant ceci pour $n-1$, $n-2$, etc.

$$(3)\qquad \iint K_n^2\, ds\, dt < \left[\iint K_1^2\, ds\, dt\right]^n$$

De même, écrivons :

$$K_p(s,t) = \iint K_1(s,r_1)\, K_1(r_2,t)\, K_{p-2}(r_1,r_2)\, dr_1\, dr_2.$$

Nous avons encore :

$$(4)\ \overline{\mathrm{K}_p(s,t)^2} < \int\int \mathrm{K}_{p-2}(r_1, r_2)^2\, dr_1\, dr_2 \int\int \mathrm{K}_1(s, r_1)\, \mathrm{K}_1(r_2 t)^2\, dr_1\, dr_2$$

et d'après (3),

$$(5)\ \overline{\mathrm{K}_p(s,\ t)^2} \leq \left[\int\int \overline{\mathrm{K}_1^2}\, ds\, dt\right]^{p-2} \int\int \mathrm{K}_1\,\overline{(s, r_1)}\, \mathrm{K}_1\,\overline{(r_2\, t)^2}\, dr_1\, dr_2$$

μ étant moindre que 1, il résulte de (5) la convergence absolue et uniforme de la série

$$(6)\qquad \Gamma(s, t) = \sum_1^{\infty} \mathrm{K}_p(s, t).$$

Cette fonction Γ donne lieu à deux égalités immédiates et *capitales*, puisque K = K₁,

$$(7)\qquad \Gamma(s, t) = \mathrm{K}(s, t) + \int \mathrm{K}(s, r)\left[\sum \mathrm{K}_p(r, t)\right] dr$$

$$= \mathrm{K}(s, t) + \int \mathrm{K}(s, r)\, \Gamma(r, t)\, dr$$

et de même

$$(8)\qquad = \mathrm{K}(s, t) + \int \Gamma(s, r)\, \mathrm{K}(r, t)\, dr$$

Il en résulte que la formule suivante

$$(9)\qquad \varphi(s) = f(s) + \int \Gamma(s, t)\, f(t)\, dt$$

équivaut à (1), c'est-à-dire *résout* (1). En effet, (9) donnera :

$$(10)\qquad \varphi(t) = f(t) + \int \Gamma(t, r)\, f(r)\, dr.$$

Portons dans (1) et, grâce à (7), nous avons une identité :

$$0 = \int\int f(t)\, \mathrm{K}(s, \mathrm{r})\, \Gamma(r, t)\, dr\, dt - \int\int f(r)\, \mathrm{K}(s, t)\, \Gamma(t, r)\, dr\, dt.$$

Solution générale pour un noyau continu.

Un noyau étant continu, l'on pourra toujours former des fonctions linéairement indépendantes $\alpha_h(s)$ et des fonctions linéairement indépendantes $\beta_k(t)$, de façon que l'on ait :

$$\iint \left[\mathrm{K}(s,t) - \sum_1^m \alpha_p(s)\,\beta_p(t)\right]^2 ds\,dt < \mu < 1.$$

Nous obtenons alors la solution par une *itération* et par la résolution de m équations linéaires.

Soit, en effet :

$$\overset{+}{\mathrm{K}}(s,\,t) = \mathrm{K} - \sum_1^m \alpha_p\,\beta_p.$$

Formons la série correspondante

$$\overset{+}{\Gamma}(s,\,t) = \sum_1^{\infty} \overset{+}{\mathrm{K}}_p(s,\,t)$$

l'équation donnée, (1), s'écrira :

$$(2)\quad f(s) + \int\left[\sum \alpha(s)\,\beta(t)\right]\varphi(t)\,dt = \varphi(s) - \int \overset{+}{\mathrm{K}}(s,\,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Représentons par $f_1(s)$ le premier membre ; nous savons qu'il y a équivalence entre les égalités (3) et (4) :

$$(3)\qquad f_1(s) = \varphi(s) - \int \overset{+}{\mathrm{K}}(s,\,t)\,\varphi(t)\,dt$$

$$(4)\qquad \varphi(s) = f_1(s) + \int \overset{+}{\Gamma}(s,\,t)\,f_1(t)\,dt$$

Nous avons l'expression de $f_1(s)$, par (2), d'où :

$$(5)\qquad f_1(t) = f(t) + \int\left[\sum \alpha(t)\,\beta(r)\right]\varphi(r)\,dr.$$

Portons dans (4)

$$\varphi(s) = \left\{\begin{aligned} & f(s) + \int\left[\sum \alpha(s)\,\beta(t)\right]\varphi(t)\,dt \\ & + \int \overset{+}{\Gamma}(s,t)\left\{f(t) + \int\left[\sum \alpha(t)\beta(r)\right]\varphi(r)\,dr\right\}dt. \end{aligned}\right.$$

Posons :

$$F(s) = f(s) + \int \overset{+}{\Gamma}(s, t)\, f(t)\, dt$$

$$A_p(s) = \alpha_p(s) + \int \overset{+}{\Gamma}(s, r)\, \alpha_p(r)\, dr$$

et nous avons, au lieu de (1), l'équation (6) :

$$\varphi(s) - \int \left[\sum A_p(s)\, \beta_p(t) \right] \varphi(t)\, dt \doteq F(s) \tag{6}$$

C'est bien le résultat annoncé.

Remarques. 1. Il faudrait encore considérer le cas où le noyau devient *infini,* mais reste *intégrable :* nous renverrons aux travaux de M. Hilbert, de M. Fredholm et de M. Poincaré.

Soit un noyau :

$$f(x, s) = \frac{1}{(x - s)^\alpha}\,.$$

Dans les *déterminants* à intégrer, les diagonales principales n'ont *aucun sens.* M. Hilbert prouve que, dans des cas généraux, il suffira de remplacer $\frac{1}{0}$ par 0, résultat très *remarquable.*

2. D'autre part, M. J. Plemelj a bien voulu me signaler sa démonstration, très simple, de l'indépendance des fonctions $L_h(x)$ (chap. III, n° 6).

L'on a évidemment :

$$L_1(\xi_1) = 1 \quad \text{et} \quad L_h(\xi_1) = 0 \; (h > 1)$$
$$L_2(\xi_2) = 1 \quad \text{et} \quad L_h(\xi_2) = 0 \; (h \neq 2)$$
$$L_n(\xi_n) = 1 \quad \text{et} \quad L_h(\xi_n) = 0 \; (h \neq n).$$

De là résulte l'*impossibilité* d'une relation de la forme :

$$c_1 L_1(x) + c_2 L_2(x) + \ldots + c_n L_n(x) = 0$$

$c_1, c_2, \ldots$ étant des constantes (MONATSHEFTE F. MATH., 1904).

3. Si l'on veut résoudre le Problème de Dirichlet pour l'aire comprise entre *deux courbes planes*, l'on a à trouver deux *densités* φ_1 et φ_2 satisfaisant au système :

$$\varphi_1(s) - \lambda \sum_{1}^{2} \int_{0}^{1} K_{1i}(s, t)\, \varphi_i(t)\, dt = f_1(s)$$

$$\varphi_2(s) - \lambda \sum_{1}^{2} \int_{0}^{1} K_{2i}(s, t)\, \varphi_i(t)\, dt = f_2(s).$$

M. Fredholm ramène ainsi à *une seule équation*. L'on pose :

$$f(s) = \begin{cases} f_1(s) & \text{entre 0 et 1,} \\ f_2(s-1) & \text{entre 1 et 2.} \end{cases}$$

De même pour $\varphi(s)$.

Puis l'on pose encore :

$$K(s, t) = K_{ik}(s - i + 1,\ t - k + 1),$$

pour

$$i - 1 \leq s < k,$$
$$k - 1 \leq t < k.$$

On a alors l'équation unique :

$$\varphi(s) - \lambda \int_{0}^{2} K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s).$$

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

Fredholm : « Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet », AKAD. STOCKHOLM, 1900. — « Sur une classe de transformations rationnelles », C. R. (1) 1902. — « Sur une classe d'équations fonctionnelles », C. R. 1902. — « Sur la théorie des spectres », C. R. 1906. — « Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité », ARCHIV FÜR MATHEMA-

---

(1) COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, Paris.

TIK, Stockholm, 1905. — Enfin le mémoire détaillé se trouve dans les ACTA MATHEMATICA, 27 (1903).

Kellog ; *Andrae* ; *Cairns* ; *Haseman* ; *Myller* ; Dissertation. Göttingen 1902 ; 1903 ; 1907 (Voir à ce sujet, une observation de M. *Hilbert* 1er Mémoire, p. 84 et 2e Mémoire, p. 254).

Kellog, M. A. (1) Bd LVIII, Bd LX.

M. Mason, JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, 1904. M. A. Bd VIII.

D. Hilbert : « Grundzüge einer Theorie der linearen Integralgleichungen », N. ZU G. (2) 1904, 05, 06 ; et un Mémoire au Congrès de Heidelberg, 1904. (Voir, à ce sujet, une note de E. E. Levi. N. ZU G. 1908).

M. Hilbert s'attache principalement au « passage à la limite » tant dans la théorie des *Équations linéaires* que dans celle des *Formes quadratiques*. Il fait de nombreuses applications aux équations différentielles et aux dérivées partielles du second ordre. Ses résultats sont complétés par ceux de M. *Erhard Schmidt*, M. A. Bd LXIII, Bd LXIV.

Dans cet ordre d'idées : équations linéaires et formes quadratiques à une infinité de variables, voir encore :

H. von Koch, ACTA M. (3), tomes 15 et 18.

H. Poincaré, B. SOC. M. F. (4), tome XIV.

E. Schmidt, CIRCOLO P. (5), 1908.

Emil Hilb, Habilitationsschrift, Erlangen, 1908.

Ernst Hellinger, Dissertation, Göttingen, 1907.

H. Weyl, Dissertation, Göttingen, 1908.

Hellinger et *Toeplitz*, N. ZU G. 1906 et 1907.

M. *E. Goursat*, B. Soc. M. F., 1907, reprend la théorie de M. Fredholm, en partant de noyaux $\sum^{r} g_p(x)\, h_p(y)$. — Voir, à ce sujet, les travaux de E. *Schmidt*. — (M. *Lebesgue*, B. Soc. M. F. 1908, reprend ce même point de vue). — Dans un Mémoire récent,

---

(1) MATHEMATISCHE ANNALEN.

(2) NACHRICHTEN DER K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN zu Göttingen.

(3) ACTA MATHEMATICA.

(4) BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

(5) CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Ann. F. T. (¹), 1908, M. Goursat étudie la *fonction méromorphe*, solution de Fredholm ; il introduit, pour le cas du noyau NON SYMÉTRIQUE, les *fonctions principales*. Il retrouve le théorème de M. *Lalesco* sur le cas où l'équation D = 0 n'a qu'un nombre *limité* de racines.

L'un de ses théorèmes était obtenu, simultanément par M. *Bryon Heywood*, Journal de Mathématiques, 1908. Dans ce même ordre d'idées, M. *H. Bateman* a obtenu des résultats intéressants sur l'inversion de l'intégrale à *limites fixes*. — Voir H. Bateman : Proceedings of the London Mathematical Society, 1906, — Cambridge Philosophical Society, 1907 et 1908, — M. A. t. LXIII. — Messenger of Mathematics, 1908.

Nous avons déjà cité M. *J. Plemelj*. Outre la discussion détaillée, ici reproduite, il a rattaché à l'équation de Fredholm les *fonctions fondamentales* de M. Poincaré. Voir : *Henri Poincaré* « Sur les équations de la Physique » Circolo P. 1894 — Acta Mathematica, t. 20, 1896, et les travaux de *E. Le Roy*, *S. Zaremba, A. Korn, W. Stekloff* ; en particulier : *Stekloff* « Sur certaines égalités générales » Ac. Imp. des Sciences de St-Pétersbourg, 1903. M. Plemelj montre encore, comme M. Hilbert, l'applicabilité à la *théorie des fonctions* et à des problèmes de Riemann de l'équation de Fredholm. Monatshefte für M. und P. Bd XIX.

T. Boggio, C. R. 1907, donne un beau théorème sur un cas où les racines de D sont *réelles* et *simples* (complété par M. *Goursat*, C. R. 1908).

Voir les applications de M. Boggio à la Physique : R. Acc. L. (²) 1907, 1908. Pour les applications à la Physique, citons :

G. Lauricella, R. Acc. L. 1906, 1907, 1908 (et pour une *Inversion*, Mem. del 21 Giugno 1908) — Nuovo Cimento, « Alcune Applicazioni » 1907 — Annali di Matematica, 1907, « Sur le refroidissement des corps ».

M. *Émile Picard* a donné de nombreuses applications à la Physique, dans ses cours de 1906 et 1908. Voir : Circolo P. 1906. M. Picard donne de très importants résultats (C. R. 28 sept. 1908),

---

(¹) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

(²) R. Accademia dei Lincei, Roma.

touchant des équations nouvelles de la Physique, et reprend ses travaux bien connus sur les équations linéaires du second ordre, elliptiques, dans ses Mémoires récents (ANNALES de l'École Normale, 1906, 1907, 1908, 1909).

Nous avons déjà signalé la démonstration très simple de l'une des formules des potentiels, inspirée à M. Picard par la Méthode de *Robin*, et les travaux de M. *Henri Poincaré*, C. R., décembre 1908 ; janvier 1909 ; février 1909.

Voir aussi : *E. E. Levi*, R. ACC. L. 1907.

G. Fubini, ACC. IN CATANIA, fascicolo LXXXIII.

J. Hadamard, Mémoire couronné par l'Acad. des Sciences, 1908.

Citons encore : *Myller* et *Bounitzkij*, BULLETIN DES SCIENCES MATH., 1907.

R. Marcolongo, ANN. F. T. 1908, sur la théorie de l'*élasticité*.

F. Riesz, C. R. mars et avril 1907, sur les systèmes orthogonaux et l'équation de Fredholm et N. ZU G. 1907.

M^{me} Lebedeff, Dissertation, Göttingen, 1906.

A. Korn, C. R. juin 1907.

E. Holmgren, ARKIV FÖR MAT. STOCKHOLM, 1906.

S. Pincherle, R. ACC. DELLE SC. DI BOLOGNA, S. 6^a vol. III. — SOC. ITALIANA DELLE SC. S. 3^a, t. XV.

S. Sanielevici, Thèse, 1908.

Pour les Équations intégrales *non linéaires, à limites constantes*, signalons trois tentatives qui montrent la difficulté extrême du problème :

E. Schmidt, M. A. LXV. 1908.

Block, ARKIV F. MAT. 1907.

R. d'Adhémar, B. SOC. M. F. 1908.

L'Équation de *Volterra* se distingue de celle de *Fredholm* en ce que dans l'intégrale les LIMITES sont 0 et x et non pas 0 et 1.

Le noyau étant *fini*, l'on peut bien regarder l'Équation de Volterra comme un cas particulier de l'Équation de Fredholm, mais, pour les *noyaux infinis*, l'on doit faire directement l'étude. C'est *indispensable*.

Citons seulement les travaux de MM. :

V. Volterra, ACC. DEI LINCEI et ACC. DI TORINO, 1896. — ANNALI DI MATEMATICA, série II, t. XXV, 1897.

E. Holmgren, Soc. royale d'Upsal, 1900, et application aux équations aux dérivées partielles du type *parabolique*, Arkiv för Mat. 1906.

P. Burgatti, Acc. dei Lincei, 1903.

G. Fubini, Acc. di Napoli, 1904.

T. Lalesco, Journal de Math., 1908.

Eug. Elia Levi, Annali di Matematica, série III, t. XIV, 1908.

R. d'Adhémar, Congrès de Math., 1908, etc.

M. Le Roux, dans sa Thèse, en 1895, avait déjà abordé ce type d'équations intégrales. (Ann. École norm.).

M. E. Picard, C. R. 1907, a résolu une nouvelle équation intégrale à limite variable, par approximations successives. Il a montré que ces *approximations* donnent souvent une forme meilleure que les *itérations* de M. Volterra.

Ici l'on passe, en général, facilement du cas linéaire au cas non-linéaire.

N'oublions pas que la première équation intégrale résolue est la célèbre *Inversion d'Abel* (Œuvres d'Abel) et que *Liouville* a sa place dans l'histoire de cette théorie : Journ. de Math., tomes 1, 2 et 4 ; Journ. de l'École polytechnique (1832).

Indiquons enfin quelques ouvrages, non mentionnés encore, où l'on trouvera d'amples renseignements sur l'*Équation de Laplace* et sur les travaux anciens de *Gauss*, *Green*, *W. Thomson* (lord Kelvin), *Poisson*, *Helmholtz* :

A. Schwarz « Mathem. Abhandlungen », Springer, Berlin, 1890.

A. Harnack « Theorie des logarithmischen Potentiales ». Teubner, Leipsig, 1887.

M. Böcher « Reihenentwickelungen der Potentialtheorie », Teubner, Leipsig, 1894.

F. Pockels « Part. Diff. $\Delta u + K^2 u = 0$ », Teubner, Leipsig, 1891.

A. Korn « Potentialtheorie », Berlin, 1900.

R. Neumann « Ueber die Methoden von C. Neumann u. Robin ». Leipsig, Teubner, 1905.

Carl Neumann « Logarithmische und Newtonsche Potentiel ». Leipsig, Teubner, 1877 ; « Untersuchungen über das Newtonsche Princip », Teubner, 1896.

Henrik Petrini, Acta Mathematica, t. 31. Sur les Potentiels.

F. Klein, Cours lithographiés, Teubner, etc.

Dans la théorie des Potentiels, nous ne nous sommes pas occupé des *conditions strictes* de validité des formules. On peut supposer le rayon de courbure simplement *lipschitzien* (et non dérivable), et la densité n'est pas nécessairement *dérivable*. Nous renvoyons aux travaux de MM. Plemelj et Petrini.

Quand, dans le plan, le contour présente des *pointes*, l'on peut se tirer d'affaire par des *représentations conformes*.

Ceci n'a plus lieu, dans l'espace.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE

DE LA

VACCINATION ANTITUBERCULEUSE [1]

par le Dr HAIBE

DIRECTEUR DE L'INSTITUT BACTÉRIOLOGIQUE PROVINCIAL DE NAMUR

Nous nous sommes proposé d'approfondir de notre mieux, la question si importante de la vaccination antituberculeuse préconisée par M. le professeur Heymans de l'Université de Gand. Forcément, nous avons dû répéter des expériences déjà faites par ce savant et nous appuyer sur ses publications, pour conduire ce travail à bonne fin.

Il comprendra deux parties principales :

I. La vaccination par la méthode des sacs, n'est ni nuisible ni dangereuse.

II. Cette vaccination confère aux animaux un certain degré d'immunité contre l'infection tuberculeuse.

PREMIÈRE PARTIE

Expériences et observations démontrant que cette vaccination n'exerce aucune nuisance sur les organismes inoculés

A. *Étude de la vaccination elle-même.* — Le sac-vaccin employé par M. Heymans est constitué par une culture pure et vivante de bacilles tuberculeux introduite dans l'enveloppe interne du roseau

---

[1] Mémoire envoyé en réponse à la question de concours de la IVe Section, et couronné par la Société scientifique.

« fragmites communis » ; cette enveloppe ligaturée hermétiquement à ses deux extrémités, devient imperméable pour les bacilles de Koch eux-mêmes, mais laisse passer par diffusion. certains produits spécifiques élaborés par ces germes. Les sacs. ainsi préparés, sont introduits dans des capsules de gélatine aseptisée. De la sorte, leur maniement est des plus faciles et tout risque de contamination par écrasement du sac lui-même, est écarté.

Pour vacciner, l'opérateur se lave les mains, tond l'animal au défaut de l'épaule, saisit la peau entre le pouce et l'index et incise transversalement le pli cutané ; dans la plaie, il enfonce le trocart spécial de M. Heymans dont il retire le mandrin ; il lui reste à introduire le petit sac et à enlever le trocart. L'opération terminée. on peut réunir les lèvres de la plaie au moyen d'une forte agrafe ou, comme nous l'avons expérimenté nous-même, se dispenser de toute ligature. Dans ce dernier cas, le sang en se coagulant. ne tarde pas à coller parfaitement les lèvres de la plaie. On comprend que cette opération très simple se fasse aisément sur l'animal à l'étable maintenu seulement par un aide : elle dure, en moyenne, une minute (1).

Les suites immédiates de la vaccination chez les bovidés, ont toujours été des plus heureuses dans les nombreux cas que nous avons observés ; parfois, nous n'avons noté qu'une légère suppuration sans importance, se produisant autour du sac (2). D'autre part, nous avons eu l'occasion d'inoculer une trentaine de lapins et cobayes et, chaque fois, nous avons pu vérifier une réunion par première intention. En aucun cas, il n'y eut mort par septicémie ou autre accident imputable à la vaccination.

Nous pouvons donc conclure avec M. Heymans (3), que le procédé de vaccination est facile et inoffensif.

B. *Étude des conséquences lointaines de la vaccination.* — Nous

---

(1) Deux opérateurs ont pu, en deux jours, vacciner 784 sujets répartis dans 43 exploitations situées dans sept communes. (Bullet. de l'Acad. de médec. de Belgique, 23 fév. 1907, p. 125.)

(2) Les statistiques de M. Heymans prouvent qu'en pratique l'évolution de la vaccination est aseptique dans 90 % des cas et que sur 9000 vaccinations et revaccinations, il y a eu 2 réclamations *(loc. cit.*, p. 125.)

(3) Cf. Bull. de l'Acad. royale de médec., 1907, p. 125.

nous contenterons de résumer nos observations sur les bêtes bovines en attestant que la vaccination antituberculeuse n'a pas eu d'influence sur la croissance, l'engraissement, la gestation et la lactation. En aucun cas, les vaches pleines n'ont montré des menaces d'avortement ; les veaux vaccinés même quelques jours après leur naissance, n'ont présenté aucun retard dans leur développement. Remarquons enfin, que toutes les bêtes vaccinées ont pu être remises en pâture sans inconvénient, dès les premières heures qui suivirent leur vaccination.

D'autre part, nous avons observé pendant plusieurs mois, deux *séries* de petits animaux vaccinés, auxquelles nous comparions des séries d'animaux témoins présentant sensiblement le même poids et nourris de la même façon. Nous n'avons pas trouvé de différence, dans l'évolution physiologique des animaux vaccinés et des animaux non vaccinés. Nous donnons dans les tableaux suivants, les résultats des pesées mensuelles de ces animaux.

Première série

	DATES	10-7-07	10-8-07	10-9-07	10-10-07
Vaccinés	I Lapin blanc	1 k 580	2 k 010	2 k 433	2 k 650
	II ». fuchsine	1 k 085	1 k 400	1 k 780	1 k 960
	III » blanc-gris	1 k 217	1 k 665	2 k 308	2 k 605
	IV » gris	1 k 290	1 k 810	2 k 445	2 k 675
	V Cobaye I	538 grs	558 grs	605 grs	650 grs
Témoins	I Lapin blanc	1 k 400	1 k 750	2 k 200	2 k 350
	II » feu	1 k 500	2 k 065	2 k 268	2 k 515
	III » tache grise	1 k 390	1 k 950	2 k 435	2 k 605
	IV Cobaye II	520 grs	536 grs	600 grs	635 grs

Seconde série

	DATES	18-7-07	18-8-07	18-9-07	18-10-07
Vaccinés	Lapin I	436 grs	880 grs	1 k 170	1 k 557
	» II	430 »	838 »	1 k 057	1 k 352
	» III	457 »	801 »	1 k 093	1 k 413
	» IV	482 »	872 »	1 k 188	1 k 507
Témoins	Lapin I	430 grs	830 grs	1 k 065	1 k 443
	» II	430 »	883 »	1 k 210	1 k 492
	» III	500 »	971 »	1 k 375	1 k 536
	» IV	400 »	788 »	1 k 013	1 k 385

Remarquons que les lapins de cette dernière série ont tous le même âge et proviennent de la même mère.

Quant aux réactions fébriles des animaux vaccinés par rapport aux animaux témoins, elles ont été trop inconstantes pour que nous songions à les comparer et à en tirer des conclusions irrévocables.

C. *Imperméabilité des sacs de roseau pour les bacilles de Koch.* — Pour que la vaccination par sacs, ne constitue par elle-même aucun danger, il importe surtout que les bacilles virulents restent localisés dans la coque végétale et ne puissent passer dans l'organisme ou dans les tissus voisins. Pour résoudre cette proposition, nous ne pouvons mieux faire que de nous appuyer sur les données des *autopsies* et des *analyses* anatomo-pathologiques.

1. *Autopsies*. Nous avons d'abord autopsié des bêtes bovines.

Une génisse (Elisa), provenant de l'exploitation L. avait été vaccinée une première fois, le 12 mai 1906, à l'épaule droite et une deuxième fois, le 15 octobre 1907, à l'épaule gauche. Ces deux vaccinations avaient été précédées de la tuberculination qui avait donné des résultats négatifs. La génisse fut abattue le 8 mai 1907 et nous procédâmes à une autopsie aussi complète que possible dont voici le détail.

Examen externe. La génisse âgée de vingt mois est demi-grasse ; par la palpation externe nous ne découvrons pas d'engorgements ganglionnaires. En procédant avec précaution, nous parvenons à énucléer sans les détériorer, les petits vaccins qui s'étaient encapsulés sous la peau. Nous enlevons de même les ganglions préscapulaires et les ganglions axillaires ; nous pratiquons dans ces ganglions de nombreuses coupes transversales qui ne font découvrir aucun foyer purulent ou suspect.

Examen interne. Dans la cage *thoracique*, nous trouvons les séreuses pleurales et péricardiques absolument normales, dépourvues d'adhérences ou de fausses membranes quelconques ; pas de fibrine ni de liquide suspect dans les sacs pleuraux ; les poumons sont mobiles autour du hile, et présentent une couleur normale ; leur surface bien lisse dépourvue de granulations et d'adhérences excluait tout passé pathologique. Nous détachons ces organes et les palpons sur toute leur étendue : ils présentent la consistance ordinaire et nous ne trouvons pas la moindre induration ni le moindre tubercule ; les incisions que nous pratiquons dans le même but nous conduisent aussi à des conclusions *négatives*. Nous détachons alors les ganglions médiastinaux antérieurs, moyens et postérieurs, ainsi que les ganglions bronchiques que nous partageons en nombreuses tranches transversales, sans qu'il nous soit possible de découvrir la moindre altération suspecte. Nous les emportons cependant pour les livrer à des analyses plus minutieuses.

Dans l'*abdomen*, le péritoine bien lisse sur toute son étendue, ne présente pas de fausses membranes ni de fibrine. Le *foie* a sa couleur et sa consistance normales ; nous ne découvrons pas de tubercules sur sa surface externe ni dans sa trame. Le ganglion hépatique n'est pas engorgé et la vésicule biliaire ne présente pas d'adhérences suspectes. Les intestins sont examinés sur leur surface externe et interne ; nous ne découvrons rien d'anormal, sinon une petite excroissance de la grosseur d'une noix qui contenait une espèce de mastic verdâtre dans lequel nous avons vainement recherché le bacille de Koch : les inoculations qui furent pratiquées aux cobayes conduisirent d'ailleurs aux mêmes résultats négatifs. Nos recherches se portèrent alors sur les ganglions mésentériques qui, çà et là, semblaient engorgés : cependant les coupes ne révélèrent aucun foyer caséeux ou purulent. Plusieurs cobayes dont il sera question plus loin, reçurent sous la peau des fragments de ces ganglions.

En somme, cette autopsie type, prise entre plusieurs autres, faites également chez les bovidés, ne nous permit pas de relever le moindre indice de tuberculose.

Nous avons autopsié dans le même but, une quinzaine de lapins et de cobayes, auxquels nous avions inoculé des sacs-vaccins dans la région voisine des ganglions inguinaux ; de la sorte, nous pouvions mieux observer les réactions de ces derniers si sensibles à des traces de virus tuberculeux. Les autopsies ont été pratiquées un mois, deux mois et trois mois, après les inoculations et les ganglions qui lors de ces autopsies avaient paru suspects, étaient inoculés à des animaux *neufs*. Ces autopsies de petits animaux ne nous ont pas amené à découvrir une infection tuberculeuse même au début consécutive à nos inoculations, et l'autopsie type que nous donnons ci-dessous, peut résumer toutes nos observations.

État général : tous les animaux observés ont augmenté en poids.

Réaction locale : nulle dans tous les cas.

Thorax : pas de réactions des ganglions bronchiques et axillaires ; pas de tubercules dans les poumons.

Abdomen : pas de tubercules sur le foie, la rate ou les intestins. La rate elle-même avait, chaque fois, sa couleur naturelle et son volume normal. Dans aucun cas, nous ne trouvons d'engorgements ganglionnaires suspects. Ajoutons que ces autopsies nous ont amené à faire une constatation intéressante : il semble, en effet, que la région dans laquelle un sac-vaccin a été inoculé doive recevoir une plus grande quantité de sang et que l'organisme favorise cet afflux de sang en dilatant fortement les veines et les artères de cette région. C'est ainsi qu'après inoculation d'un de ces sacs sous la peau de l'abdomen, on peut constater déjà après un mois, que les deux veines collatérales sont très dilatées et que tout le réseau circulatoire sous-cutané est très turgescent. Cette circulation sanguine devient particulièrement intense, dans la région qui entoure immédiatement le sac : les capillaires normaux y sont très dilatés et de nombreux capillaires néoformés envoient des ramifications dans la capsule conjonctivale du sac.

2. *Analyses microscopiques et anatomo-pathologiques des sacs-vaccins et des ganglions prélevés en diverses régions, lors des autopsies.* Nous examinerons tout d'abord, de plus près, les particularités trouvées à l'autopsie-type (génisse L) dont il vient d'être question.

Le sac-vaccin qui avait été inoculé sous la peau de l'épaule *droite* depuis un an environ, a la grosseur d'un tuyau de pipe et est entouré d'une coque fibreuse très résistante. Après incision longitudinale, nous constatons qu'entre cette coque et le sac de roseau lui-même, il y a quelques fusées purulentes. A *gauche*, le vaccin avait séjourné six mois sous la peau ; il a acquis le volume d'une petite noix et est nettement fluctuant. A l'incision, nous retrouvons d'abord une enveloppe fibreuse résistante et, entre celle-ci et le sac de roseau, du pus très muqueux. Nous procédons alors à l'analyse du *contenu* de ces sacs, du *pus* qui les entoure immédiatement et de la *coque* fibreuse elle-même.

A. *Analyse du contenu des petits sacs de roseau.* — Macroscopiquement, le contenu des sacs a conservé ses caractères primitifs; cependant, au microscope nous n'y décelons plus que de *très rares* bacilles ; ceux-ci se présentent sous un aspect très granuleux et, malgré une coloration prolongée, ils prennent très mal le Ziehl. Nous avons également trouvé des bacilles revêtant des formes anormales : le plus souvent ils sont complètement dégénérés et transformés en petits fragments que l'on rencontre dans le champ microscopique, grâce à la propriété qu'ils ont conservée, de prendre le colorant spécifique. Ces caractères sont retrouvés aussi bien dans le contenu du sac gauche que dans le contenu du sac droit. Nous rapprochons dès à présent cette dégénérescence *in vivo* des bacilles de Koch, de leur destruction *in vitro*, quand on les mélange avec une certaine proportion de sérosité péritonéale provenant d'un lapin vacciné d'après la méthode de M. Heymans. (Voir la seconde partie de cette étude, p. 22).

Afin de constater si ces bacilles vivaient encore et d'apprécier leur virulence *actuelle*, nous avons inoculé à des lapins, le contenu entier de ces sacs.

Le lapin *4* pesant 2 k 730 grs reçoit sous la peau le contenu du sac de *droite*. Après trois semaines, ce lapin présente au niveau de l'inoculation un petit abcès qui s'ouvre après peu de temps. Les frottis que nous faisons avec le pus de l'abcès, ne nous permettent pas d'identifier, avec toute certitude, le bacille de Koch. L'abcès n'a suppuré que pendant huit jours et s'est alors parfaitement cicatrisé ; dès ce moment, le lapin a grossi et pesait 3 k 110 grs lors de l'autopsie qui fut pratiquée trois mois et demi après l'injection.

Autopsie. Abdomen : quelques rares nodosités sur le foie, ne présentant pas les caractères de tubercules vrais ; la rate ne présente pas de tubercule et a sa couleur et sa grosseur normales. Les ganglions inguinaux sont légèrement engorgés, mais les coupes ne révèlent aucun foyer suspect.

Thorax : absence de tubercules sur les poumons ; les ganglions axillaires et bronchiques sont normaux.

Lapin *5 :* 2 k 650 grs. Reçoit sous la peau de l'abdomen, le contenu du sac de *gauche* et est sacrifié trois mois après.

Autopsie : état général mauvais, l'animal maigrit et mange peu. Poids actuel : 2 k 350.

Abdomen : au niveau de l'inoculation, nous trouvons du pus contenant des bacilles de Koch ; les ganglions inguinaux sont engorgés et présentent de petits foyers purulents ; il y a de nombreux tubercules sur le *foie* et la *rate* : la rate elle-même est grosse, déformée, épaissée et décolorée.

Thorax : nous trouvons un tubercule calcifié et très gros à l'extrémité antérieure du poumon gauche ; les ganglions bronchiques sont hypertrophiés et crient sous le scalpel ; les ganglions axillaires sont normaux.

Enfin nous rapprochons de l'autopsie de la génisse L, une autre autopsie faite le 14 juin 1907. Il s'agissait d'une vache qui avait été vaccinée *trois* fois : V_1 le 20 janvier 1906, V_2 le 16 mars 1906, V_3 le 13 novembre 1906. Nous avons pu retrouver les trois sacs-vaccins et leurs contenus ont été inoculés dans le péritoine de trois cobayes différents. Voici les résultats des autopsies.

Cobaye *noir* : Inoculé le 14 juin 1907 avec le contenu du sac de la première vaccination ; ce cobaye meurt le 22 août 1907.

État général : cobaye émacié.

Abdomen : il y a une forte ascite, mais nous ne trouvons pas de tubercules sur les intestins, le foie et la rate ; pas de réaction ganglionnaire.

Thorax : poumons, plèvres et ganglions normaux.

Cobaye *angora* : reçoit en injection péritonéale le contenu du sac de la seconde vaccination (V_2) et est tué le 30 août 1907. A l'autopsie, nous trouvons un abcès à l'endroit de l'injection et du pus dans les ganglions inguinaux contenant des bacilles de Koch. Il y a tuberculose de la rate et du foie : nous trouvons également de nombreux tubercules dans les poumons ; les ganglions bronchiques sont très gros et calcifiés.

Cobaye *blanc* : est mort le 8 juillet 1907, un mois environ après l'injection intra-péritonéale du contenu du sac de la troisième vaccination (V_3). Abdomen : le péritoine, les intestins et le foie sont littéralement criblés de granulations tuberculeuses ; la rate est doublée de volume, décolorée et couverte de gros tubercules ; les ganglions inguinaux sont fortement engorgés et renferment du pus dans lequel nous retrouvons de nombreux bacilles de Koch. Thorax : les plèvres et le péricarde sont recouverts de granulations tuberculeuses ; nous décelons une tuberculose miliaire des poumons, les ganglions bronchiques et axillaires sont fortement engorgés.

D'autre part, nous avions fixé la virulence des bacilles qui avaient servi à préparer les vaccins et nous avions trouvé que ces bacilles étaient très virulents, puisque des injections de 20 mmg. dans le péritoine, tuaient des lapins de 2 k et demi en 25-30 jours et des injections de 10 mmg tuaient des cobayes de 500 gr en 20-25 jours.

Dans le cas qui nous occupe, les animaux en expérience, ont reçu des doses de bacilles apparemment plus fortes ; cependant, les autopsies ont démontré que les bacilles provenant de ces sacs avaient été fortement atteints dans leur vitalité et leur virulence. En effet, l'autopsie du lapin *4* et celle du cobaye *noir* prouvent que ces animaux avaient échappé à une réelle infection tuberculeuse ; d'autre part, les autres autopsies démontrent, à l'exception de celle du lapin blanc, que ces injections de bacilles n'avaient causé qu'une tuberculose à marche beaucoup plus *lente* que celle que nous avions pu déterminer chez les animaux témoins.

Ces diverses observations ne sont pas assez nombreuses pour que nous puissions prendre des conclusions irrévocables ; mais il est bien permis de présumer que les bacilles de Koch des sacs-vaccins inoculés aux bovidés sont altérés, après un temps plus ou moins long, dans leur vitalité et leur virulence. Cela tient, croyons-nous, aux mauvaises conditions de nutrition d'abord, mais surtout à l'action bactéricide des humeurs de l'organisme vacciné qui peuvent pénétrer par osmose à travers la membrane végétale des sacs de roseau.

Nous montrerons en effet, plus loin, que les humeurs d'animaux vaccinés n'exercent pas seulement sur les bacilles spécifiques une action nuisible, mais même une action bactéricide et bactériolytique, quand on les fait réagir ensemble « *in vitro* » à des concentrations suffisamment fortes.

B. *Analyse du pus recueilli autour des petits sacs ; analyse de la paroi fibreuse de néoformation.* — Si, par les méthodes de coloration, nous examinons les traînées muqueuses et purulentes dont il a été question plus haut et qui entouraient immédiatement la coque végétale du sac-vaccin, nous constatons que les globules blancs ont perdu leurs caractères propres, qu'ils sont déchiquetés et que leurs noyaux fragmentés peuvent à peine fixer les colorants ordinaires.

Nous avons fait, de nombreuses fois, la coloration de ce pus par la méthode de Ziehl et, en aucun cas, nous n'avons pu identifier le bacille de Koch. Cependant, pour nous entourer de plus de garanties encore, nous avons pratiqué des injections à des cobayes ; et les autopsies ont démontré que, dans ces cas au moins, les bacilles n'étaient pas passés du sac végétal dans les tissus voisins.

Quant à la paroi fibreuse de néoformation qui, comme nous le montrerons plus loin, ne tarde pas à se former naturellement autour du petit sac, nous voyons en elle une seconde barrière, très résistante, établie par l'organisme contre l'invasion des germes dans l'économie. Nous remarquerons aussi que, chez les bêtes bovines tuberculeuses et vaccinées, ces néoformations ne sont, en somme, qu'une des réactions de vaccination contre le bacille de Koch.

Si, après avoir fixé la paroi fibreuse d'un sac ayant séjourné six mois sous la peau, nous y pratiquons des coupes transversales, nous trouvons après coloration, la configuration histologique générale suivante : au centre, un espace vide occupé avant la fixation, par le sac-vaccin lui-même ; tout autour, une couche de néoformation ressemblant à s'y méprendre au tissu tuberculeux : nombreuses cellules mononucléaires et nombreuses cellules géantes bien formées ou en voie de formation, contenant les unes deux ou trois noyaux, les autres un plus grand nombre de noyaux. En certains endroits, on peut même surprendre en quelque sorte, la formation de la cellule géante : dans ce cas, le noyau d'une cellule mononucléée, riche en protoplasme, s'allonge et s'échancre vers son milieu ; à un stade plus avancé, le noyau est divisé et on en retrouve les deux parties dans la même cellule protoplasmatique (¹).

Enfin, on peut rencontrer dans cette couche, des cellules géantes réunies en amas donnant la configuration générale d'un tubercule typique. Ajoutons que ces cellules géantes sont

---

(¹) La genèse complète de ces cellules géantes a été longuement exposée par M. Heymans lui-même dans le BULLETIN DE L'ACAD. ROYALE DE MÉDECINE DE BELGIQUE : séance du 28 avril 1906.

jetées au hasard dans cette première couche de néoformation, mais qu'elles abondent surtout au voisinage de la paroi cellulosique du sac. Autour de ce tissu, formé surtout de cellules géantes et de cellules mononucléées, on distingue une couche de tissu conjonctif, fibrillaire, dense, contenant des vaisseaux sanguins, nombreux et, çà et là, des ilots de cellules mononucléées. Cette couche *conjonctivo-vasculaire*, plus ou moins épaisse suivant les endroits, est elle-même plongée dans du tissu graisseux. Nous étudierons plus longuement dans la 2ᵉ partie, la formation de cette enveloppe conjonctivo-vasculaire et sa signification.

Il était également intéressant de rechercher le bacille de Koch dans ces coques fibreuses. Nous avons donc coloré par le Ziehl de nombreuses coupes, mais nous n'avons pu y déceler le bacille de Koch. Pour la même raison, des inoculations de sacs fibreux furent faites aux cobayes et les résultats des autopsies furent également *négatifs*.

D'ailleurs, en nous basant sur les expériences qui constituent la 2ᵉ partie de ce travail, nous sommes en droit de penser que, si par suite d'un accident quelconque, de rares bacilles s'échappaient du sac cellulosique, l'organisme lui-même n'en souffrirait pas, pour peu que les réactions de vaccination se soient établies.

C. *Analyse histologique et microscopique des ganglions provenant de l'autopsie type* (Génisse L.). — *Ganglions mésentériques, bronchiques, axillaires, inguinaux.*

1ᵒ *Frottis.* Les ganglions suspects ont servi à faire des frottis sur lames ; après coloration par le Ziehl, nous n'avons pas identifié, une seule fois, le bacille de Koch.

2ᵒ *Coupes histologiques.* Des fragments de ganglions ont été fixés et colorés par les méthodes ordinaires et par le procédé de Ziehl ; ces coupes n'ont pas présenté la configuration du tissu tuberculeux et l'analyse n'y a pas révélé la présence du bacille de Koch.

3ᵒ *Inoculations.* Enfin les cobayes auxquels nous avons inoculé des fragments de ces ganglions ne présentèrent pas, à l'autopsie, la moindre lésion tuberculeuse.

SECONDE PARTIE

La vaccination antituberculeuse par la méthode des sacs, confère aux animaux un certain degré d'immunité contre l'infection tuberculeuse.

S'il était nécessaire de démontrer la possibilité d'une vaccination naturelle ou expérimentale contre le bacille de Koch, nous nous contenterions de rappeler les faits suivants :

Tout d'abord, au cours de nos expérimentations, M. le professeur Heymans a attiré notre attention sur un fait qu'il eut l'occasion de noter très souvent : c'est que, dans certaines exploitations littéralement ravagées par la tuberculose, toutes les bêtes bovines soumises à l'épreuve de la tuberculine réagissent nettement, à l'exception de celles qui ont atteint un certain âge ; de plus, un grand nombre d'autopsies ont parfaitement démontré au professeur de Gand, que ces animaux âgés avaient été atteints autrefois de tuberculoses localisées ou généralisées dont ils s'étaient parfaitement guéris. Nous sommes donc en droit de conclure que ces animaux guéris spontanément, avaient dû élaborer dans leur organisme, les facteurs généraux de l'immunité acquise contre la tuberculose.

Ajoutons encore, que jamais jusqu'ici nous n'avons rencontré de cas de tuberculose récente chez ces vieux animaux guéris de tuberculose ancienne.

Rapprochons de ces faits, une constatation que le médecin a l'occasion de faire si souvent au cours de sa carrière. N'est-il pas notoire, en effet, que l'immunité antituberculeuse s'établit d'une façon toute spéciale, chez les individus qui, pendant leur jeune âge, ont été atteints de tuberculoses localisées comme des adénites, des synovites, des péritonites tuberculeuses ?

D'autre part, Nocard et Vallée ont pu constater dans diverses exploitations, que certains animaux cessaient après un certain temps de réagir à la tuberculine, alors qu'ils avaient présenté auparavant tous les signes de la tuberculose ; les mêmes expérimentateurs ont en plus noté que ces animaux guéris pouvaient supporter, sans inconvénient, des injections intra-veineuses mortelles de bacilles de Koch.

Behring et Koch purent, par des vaccinations successives, injecter à des bêtes bovines, des doses *massives* de bacilles tuberculeux humains et ensuite des bacilles bovins très virulents ; ils ont constaté que le plus grand nombre de ces animaux préparés ont survécu à des injections mortelles pour les témoins.

Denys, de son côté, a pu conférer à l'homme et aux animaux un certain degré d'immunité antituberculeuse en injectant des doses croissantes de bouillon tuberculeux filtré sur bougie.

Néanmoins, nous devons à la vérité de conclure que cette immunité antituberculeuse n'est en rien comparable à ces immunités puissantes et rapides que l'on voit s'établir contre la diphtérie par exemple. Dans le cas qui nous occupe, l'immunité acquise est toujours moins intense et plus lente à se produire. Nous n'en voulons pour preuve que ces tuberculoses torpides de l'abdomen, des poumons ou d'autres organes qui, au début, présentent des symptômes si légers et qui cependant, continuant leur marche chronique pendant plusieurs années, causent définitivement la mort.

Ces faits posés, examinons ce qui se passe quand on vaccine des animaux par la méthode des sacs. Nous étudierons successivement les réactions qui se produisent du côté du sac lui-même et du côté de l'organisme inoculé.

A. *Réactions locales*. Sitôt qu'un sac-vaccin est placé sous la peau d'un animal, les liquides organiques l'humectent et pénètrent par osmose, dans son intérieur ; dès lors, les microbes commencent à végéter et à sécréter des produits qui, à leur tour, diffusent vers l'organisme, par la paroi osmotique du sac (1). Que se passe-t-il alors ?

L'organisme, impressionné par les produits toxiques, réagit en dirigeant vers l'endroit où ils se produisent, de nombreux leucocytes polynucléaires qui tapissent la paroi externe du sac. C'est ainsi que déjà après 6-7 heures de séjour sous la peau, on peut obtenir des frottis avec la paroi externe du sac, qui montrent de nombreux globules blancs. Nous nous sommes d'abord attachés à suivre pendant quelques jours ces modifications locales. Pour cela, nous avons inoculé des sacs-vaccins à des lapins et nous les avons retirés de jour en jour. Nous les avons généralement fixés dans le sublimé-acide et avons procédé aux colorations suivantes : Hématéine-éosine, Ziehl, triacide de Ehrlich.

---

(1) Quand on introduit dans des sacs de roseau de la tuberculine brute ou des bacilles vivants et quand on plonge alors ces sacs dans du bouillon, ce liquide acquiert les propriétés de la tuberculine. (ARCH. DE PHARMACO-DYNAMIE. 1908, p. 179, 2e communic. de M. Heymans.

1. *Après 24 heures.* Le sac-vaccin a séjourné pendant 24 heures sous la peau d'un lapin ; nous pratiquons une boutonnière à la peau et l'extrayons prudemment. Nous constatons que sa paroi, encore bien lisse, n'est retenue par aucune adhérence. Nous le plongeons dans la solution de sublimé-acide ; après quelques minutes, sa paroi externe devient nettement opaque, surtout aux deux extrémités distales qui paraissent couronnées par un petit bourrelet blanchâtre : ces réactions proviennent de la précipitation de la mucine et des globules blancs sur la coque du sac de roseau. Après fixation et inclusion, nous pratiquons des coupes surtout aux endroits qui nous paraissent les plus intéressants, c'est-à-dire aux deux extrémités. Ainsi que le démontrent les coupes, un grand nombre de globules blancs s'étaient déjà massés autour du sac, mais ils abondaient surtout au niveau des ligatures. Une de nos coupes passant précisément par la ligature montre les fils enfouis au milieu de leucocytes nombreux et bien conservés : la ligature est donc protégée par un véritable capuchon de globules blancs. Cette constatation tend à prouver que les toxines diffusent rapidement hors du sac et passent surtout, au moins *au début*, par ses deux extrémités. Les coupes démontrent encore que les globules blancs, déjà après 24 heures, sont massés autour des fils, sur 7, 8 et même 12 rangs d'épaisseur ; çà et là, ils sont en contact avec des amas de globules rouges qui proviennent vraisemblablement du traumatisme opératoire.

2. *Après 48 heures.* Le sac est extrait de la même façon ; il se laisse énucléer aisément, n'étant retenu par aucune espèce d'adhérences ; les bourrelets blanchâtres des deux extrémités sont plus nets encore et des traînées muco-purulentes courent çà et là sur les parois externes. Ce muco-pus sert à faire des frottis qui, colorés par le Ziehl, ne montrent pas de bacilles de Koch. Les coupes histologiques que nous pratiquons nous donnent la même configuration générale que les coupes provenant du sac de

24 heures ; nous remarquons seulement que les leucocytes sont encore plus nombreux et qu'ils se tassent par traînées sur la paroi externe du sac.

3. *Après 3 jours.* Nous extrayons encore aisément le petit sac qui déjà, cependant, est collé par ses deux extrémités aux tissus voisins. Dès ce moment, la paroi externe du sac a perdu son poli et est presque entièrement recouverte d'une couche irrégulière de muco-pus qui s'épaissit vers les extrémités. Plongée dans le fixateur, la paroi externe blanchit instantanément et uniformément. Les frottis ne permettent pas de découvrir des bacilles de Koch. Le sac lui-même est coupé vers son milieu. Comme l'indiquent les examens histologiques, la paroi externe (sac de roseau) est uniformément entourée d'une couche épaisse de leucocytes, mais nous assistons déjà à l'éclosion d'un nouvel élément histologique qui commence à se produire au centre de la couche globulaire. A ce niveau, les cellules se tassent les unes sur les autres ; leurs noyaux s'allongent et deviennent fusiformes ; on retrouve alors, sur les coupes, des traînées de noyaux allongés et juxtaposés, vers la partie médiane de la couche globulaire.

4. *Après 5 jours.* Le petit sac adhère aux tissus voisins et est bien encapsulé. Des frottis faits avec une partie du muco-pus qui l'entoure extérieurement, ne permettent pas de découvrir des bacilles de Koch.

Les coupes histologiques nous montrent clairement la formation de la coque fibreuse : les fibrilles du tissu conjonctif sont nettement colorées et les longs noyaux caractéristiques de ce tissu y apparaissent.

Du côté interne, dans le voisinage de la membrane cellulosique, des transformations nombreuses atteignent les globules blancs : peu de leucocytes restent intacts, presque tous sont transformés en cellules mononucléées et ces cellules elles-mêmes, comme l'a très bien décrit M. le professeur Heymans dans sa communication à l'Académie royale de médecine de Belgique (28 avril 1906 : 4e page), vont devenir l'origine des cellules géantes qui ne tardent pas à apparaître très nombreuses surtout au voisinage immédiat de la membrane cellulosique.

Les sacs-vaccins qui ont séjourné 10-20-30 jours et plus sont mieux encapsulés encore et leur coque fibreuse est parfois très épaisse ; quand la vaccination a été faite aseptiquement, on ne trouve pas de réaction purulente autour des sacs. La configuration histologique des coupes qu'on en tire est généralement la même. Au centre, le sac de roseau ; immédiatement autour de la paroï cellulosique, une couche de cellules mononucléées en voie d'involution et contenant un très grand nombre de cellules géantes ; enfin, une couche souvent très épaisse de tissu conjonctif fibrillaire contenant de nombreux vaisseaux sanguins et, çà et là, des ilots de cellules mononucléées.

Nous nous sommes étendus à dessein sur ces réactions locales produites autour des sacs, parce qu'elles représentent bien le mécanisme de la réaction naturelle de l'organisme autour de foyers tuberculeux. Si ces réactions locales s'ébauchent déjà dans les organes des bêtes bovines tuberculeuses (autopsie M.), elles se retrouvent avec une netteté beaucoup plus grande chez les animaux tuberculeux qui ont été soumis à la vaccination par la méthode des sacs.

Nous donnons, dans cet ordre d'idées, les points importants d'une autopsie de vache tuberculeuse et vaccinée trois fois, faite à B. le 14 juin 1907.

Histoire : cette vache est tuberculinée une première fois le 19 janvier 1906 et donne une réaction nettement *positive* ; elle est vaccinée une première fois le 20 janvier 1906 et une deuxième fois le 16 mars 1906 ; deuxième tuberculination, le 6 juin 1906 avec résultats *négatifs* et troisième tuberculination le 13 septembre 1906 avec résultats *négatifs* ; enfin elle est vaccinée une troisième fois le 28 septembre 1906 et tuberculinée une quatrième fois le 12 janvier 1907 ; cette dernière épreuve, de même que les deux précédentes, est *négative*. Cette histoire est donc intéressante puisque cette bête bovine, qui avait d'abord réagi, a cessé de réagir aux trois épreuves auxquelles elle a été soumise. Voyons ce que l'autopsie, qui fut pratiquée le 14 juin 1907, nous a révélé.

État général : bête grasse.

Abdomen : Rien de suspect : foie, rate, péritoine. Le ganglion hépatique est normal.

Thorax : *a)* ganglions retro-pharyngiens : l'un est indemne l'autre contient un petit tubercule caséifié.

b) Ganglions médiastinaux : dans les ganglions antérieurs et moyens, qui sont un peu hypertrophiés, il y a des tubercules tantôt caséifiés, tantôt crétifiés : ces tubercules sont réunis en amas ou sont isolés. Souvent, ils crient sous le couteau. Les ganglions postérieurs sont moins atteints.

c) Ganglions bronchiques : ces ganglions ne montrent pas de foyers de tuberculose ; les coupes que nous y faisons au couteau, nous décèlent un piqueté hémorrhagique intense : ils étaient donc à l'état d'hyperhémie active. Nous prélevons ces ganglions pour des examens histologiques ; l'un d'entre eux avait gardé l'aspect d'un ganglion normal, tandis que l'autre était altéré dans les deux tiers de son épaisseur où les follicules étaient remplacés par du tissu conjonctif tantôt fibrillaire dense, tantôt plus lâche. C'est dans ce tissu de néoformation que nous avons retrouvé un grand nombre de vaisseaux sanguins pourvus d'une épaisse membrane conjonctive ; nous avons pu également identifier quelques cellules géantes fortement comprimées. Nous rapprochons cette hyperhémie active des ganglions bronchiques de la turgescence du réseau circulatoire superficiel que nous avons signalée plus haut, à propos des lapins vaccinés sous la peau du ventre.

d) Poumons. A la coupe, nous décelons de nombreux tubercules tantôt isolés, tantôt en amas et criant sous le couteau ; à certains endroits nous trouvons du pus jaunâtre que nous examinons par la méthode de Ziehl sans retrouver des bacilles spécifiques ; cependant un cobaye injecté avec ce pus devint tuberculeux. Mais ce qui a particulièrement attiré notre attention, c'est que, dans ces poumons qui avaient été autrefois profondément tuberculeux, nous retrouvons tous les stades de guérison locale des foyers tuberculeux par le procédé de sclérose. C'est ici que nous notons le grand parallélisme entre ces réactions locales et les néoformations que nous avons décrites à propos des sacs de roseau inclus sous la peau.

De nombreux tubercules étaient entourés de véritables capsules conjonctivales épaisses, nacrées, dures ; d'autres, plus rares, n'étaient encapsulés que par des lames de tissu conjonctif plus lâche et moins épaisses.

L'examen histologique des coupes que nous avons faites dans ces tubercules, démontre que ces capsules sont constituées par du tissu fibrillaire dense ; parfois on peut surprendre ce tissu à divers stades d'involution et le trouver même à l'état embryonnaire.

Si on compare, comme nous l'avons fait, ces lésions à des lésions de poumons provenant de bêtes bovines tuberculeuses non vaccinées, on trouve d'abord *macroscopiquement*, que les coques fibreuses entourant les tubercules sont moins épaisses, moins nombreuses et moins résistantes que celles que nous venons de décrire ; à l'examen *microscopique* des coupes, on peut se convaincre qu'il y a bien du tissu fibrillaire, çà et là, autour des tubercules, mais qu'il est sensiblement moins abondant que chez la bête vaccinée.

De ces observations, nous concluons que la vaccination par la méthode des sacs, exerce une réelle action stimulante sur le processus ordinaire de guérison locale de la tuberculose, en activant autour des foyers la formation de véritables coques conjonctives.

B. *Réactions générales d'immunité.*

1. *Étude du pouvoir phagocytaire.* Nous nous sommes proposé d'abord, de rechercher le pouvoir phagocytaire des leucocytes, provenant d'animaux *vaccinés* par la méthode des sacs, comparé à celui des leucocytes provenant d'animaux *neufs*, non vaccinés.

Pour nous procurer des globules blancs, nous nous sommes arrêtés après divers essais à la technique suivante : les animaux recevaient, par injections intra-péritonéales, 8-12 heures avant le prélèvement, une forte émulsion de gluten-caséine dans du bouillon ordinaire. Ainsi, nous pouvions retirer un exsudat très riche en polynucléaires, mais contenant aussi des lymphocytes et de gros mononucléaires.

Pour la recherche qui nous occupe, la sérosité péritonéale était soumise à la centrifugation ; cette opération terminée, nous rejetions le liquide surnageant et traitions le culot de centrifugation par des lavages répétés à l'eau physiologique, portée à la température de 37°. Après cinq lavages, nous étions en droit de supposer que les leucocytes avaient été débarrassés de toutes les substances solubles des humeurs ; nous nous conformions d'ailleurs aux indications données par Löhlein, dans son mémoire intitulé : *Sur la phagocytose « in vitro » des microbes pathogènes*, An. de l'Inst. Pasteur 1905, p. 648, et nous pouvions dès lors, avoir une juste idée de leur aptitude propre à phagocyter les bacilles de Koch. La même méthode a été appliquée pour les leucocytes provenant d'animaux *neufs* et les leucocytes provenant d'animaux *vaccinés*. Les animaux vaccinés, comme les témoins du reste, étaient des lapins de même grosseur ; les premiers avaient été vaccinés trois mois et demi environ avant l'expérience.

Nous avons déterminé le pouvoir phagocytaire des leucocytes lavés provenant d'animaux vaccinés et d'animaux neufs, sur des bacilles de Koch d'origine humaine. La culture qui nous a servi était une culture sur gélose glycérinée, âgée de cinq mois. L'émulsion bacillaire était obtenue de la manière suivante : trois anses de la culture étaient mélangées à 12 cm^3 d'eau physiologique et la culture verruqueuse était broyée aussi parfaitement que possible dans un mortier : à la fin de l'opération, l'émulsion était nettement louche et les grumeaux qui avaient échappé étaient retenus par filtration sur ouate.

Mélangeons donc, au moyen de pipettes jumelles, des parties sensiblement égales de leucocytes de lapins *vaccinés* et soigneusement lavés et d'émulsion bacillaire bien préparée et observons une goutte de ce mélange, au microscope. La phagocytose ne tarde pas à se produire, même à la température de la chambre ; on voit les globules blancs s'allonger, se déformer et englober parfois un grand nombre de bacilles. La phagocytose est particulièrement nette sur les plaques qui ont été obtenues quelques minutes après le début de l'expérience (5 min.), et qui ont été ensuite colorées par le Ziehl : de nombreux globules blancs contiennent alors 2, 5, 10 et un plus grand nombre de bacilles.

Pour suivre la marche de la phagocytose, nous avons aspiré dans des pipettes, le mélange des leucocytes et de l'émulsion bacillaire et nous avons porté ces pipettes à la couveuse réglée à 37°. Nous passerons sous silence les nombreux examens successifs que nous avons faits, pour ne citer que ceux qui nous ont donné des résultats caractéristiques. Nous pourrons ainsi mieux établir une comparaison entre ces résultats et les résultats que nous avons obtenus en opérant sur des phagocytes lavés provenant d'animaux *neufs*.

Après *une* heure de séjour à la couveuse, la phagocytose est intense : un grand nombre de leucocytes ont phagocyté des bacilles et on peut même voir des leucocytes massés en tas, pour englober les grumeaux de bacilles qui n'avaient pas été dissociés entièrement.

Après *trois* heures, presque tous les leucocytes contiennent des bacilles de Koch et on ne retrouve plus que de rares bacilles libres sur les plaques colorées par le Ziehl. Si on désigne par + = phagocytose légère ; ++ = phagocytose nette ; +++ = phagocytose intense, on peut dresser le tableau suivant :

Émulsion bacillaire + leucocytes de lapin vacciné.

Durée du contact	5'	15'	1 heure	3 heures
Résultats	+	+	++	+++

D'autre part, si au lieu de globules blancs provenant d'un animal vacciné, on se sert de globules blancs provenant d'un animal *neuf* et si l'on procède de la même façon, on remarque que la phagocytose se produit également même après quelques minutes de contact ; nous n'avons noté qu'une différence, c'est dans l'*intensité* du pouvoir phagocytaire lui-même. En comparant les diverses plaques que nous avons obtenues, nous pouvons, en nous servant des mêmes indications, dresser le tableau suivant :

Émulsion bacillaire + leucocytes de lapin neuf.

Durée du contact	5'	15'	1 heure	3 heures
Résultats	+	+	+	++

Ces observations nous permettent de conclure que les phagocytes de lapin *neuf* et surtout les leucocytes de lapin vacciné possèdent à un *haut degré* le pouvoir d'englober les microbes de la tuberculose, même lorsqu'ils sont dépourvus des substances sensibilisantes des sérums ou des humeurs (*).

(*) Cf. Annales de l'Inst. Pasteur, 1905. Mémoire de Löhlein : p. 659. L'auteur de ce mémoire a opéré dans les mêmes conditions que nous et a pu constater que des leucocytes de cobayes *lavés* phagocytaient « in vitro » la bactéridie charbonneuse, le vibrion cholérique et certaines races de streptocoques et de bact. coli.

Il faut donc bien admettre, en général, que les phagocytes de lapins normaux et vaccinés peuvent englober les bacilles tuberculeux, sans que ceux-ci aient été sensibilisés préalablement par des substances favorisantes (*) et que si vraiment la phagocytose ne se produit — au moins chez l'animal neuf — que grâce à ces substances, celles-ci peuvent être fournies par les leucocytes, même lavés plusieurs fois (**).

Mais pour qu'un organisme lutte efficacement contre des germes donnés, il ne suffit pas que les germes soient phagocytés, il faut surtout que cet organisme puisse les détruire ; c'est pour cette raison que dans le chapitre suivant, nous étudions le pouvoir bactéricide des leucocytes et des humeurs de lapins vaccinés et de lapins neufs, par rapport aux bacilles de Koch.

2. *Étude des propriétés bactéricides.* — A. Nos recherches ont d'abord porté sur les dépôts *leucocytaires* obtenus après centrifugation d'exsudats péritonéaux, provenant de lapins *vaccinés* et de lapins *neufs*.

Les exsudats et l'émulsion bacillaire ont été obtenus d'après la technique exposée plus haut. La sérosité surnageant au-dessus des leucocytes après centrifugation a été rejetée, mais ces derniers, n'ayant subi aucun lavage, étaient évidemment baignés dans de petites quantités de cette sérosité.

Nous avons donc fait des mélanges égaux de leucocytes et d'émulsion bacillaire, en nous servant de pipettes. Pour plus de facilité, nous désignerons par *V*, le mélange des leucocytes de lapin *vacciné* et de l'émulsion bacillaire ; par *N*, le mélange des leucocytes de lapin *neuf* et de la même émulsion bacillaire. Ces mélanges eux-mêmes, faits aussi intimement que possible, sont aspirés dans des pipettes de même capacité, que nous portons alors à la couveuse réglée à 37° C.

Si, avant de décrire les réactions qui s'opèrent dans ces pipettes, nous observons de suite « in vitro » les mélanges *V* et *N*, nous remarquons aisément que dans les deux cas, la phagocytose ne tarde pas à se produire : après trois minutes, les leucocytes impressionnés par les bacilles de Koch se déforment et s'allongent

---

(*) Annales de l'Inst. Pasteur, 1905, p. 659.
(**) Ibid., 1906, p. 960.

pour s'en emparer. Cependant, les plaques colorées que nous faisons après 10-15 minutes prouvent bien que la phagocytose a été plus intense dans le mélange *V* que dans le mélange *N*. Les plaques que nous avons faites après une demi-heure, une heure et même deux heures, ont donné les mêmes résultats.

Mais si, après trois heures de séjour à la couveuse, nous faisons des prélèvements dans les mélanges *V* et *N*, nous constatons, après coloration, des différences notables qui sont du plus haut intérêt et qui prouvent bien que le pouvoir bactéricide vis-à-vis du bacille de Koch est plus intense dans le mélange *V* que dans le mélange *N*.

Dans le premier, les germes se présentent sous un aspect nettement granuleux et, çà et là, ils sont fragmentés ; de plus, ils prennent mal les colorants et de nombreux bacilles ont concentré, à leurs extrémités surtout, la chromatine qu'ils contiennent ; il en résulte que ces grains de chromatine condensée et intensément colorée par le Ziehl, donnent l'aspect d'une spore terminale ; en un mot, nous assistons à *une véritable dégénérescence granuleuse* des bacilles. Nous ne trouvons pas ces modifications quand nous colorons de la même façon les frottis obtenus avec le mélange *N* : les bacilles y sont bien conservés, prennent parfaitement le Ziehl, ne sont pas dégénérés et ne présentent qu'exceptionnellement, les amas de chromatine dont il vient d'être question.

Si, après sept heures de séjour à la couveuse, nous réexaminons les deux mélanges, nous obtenons des résultats plus caractéristiques encore : nous constatons sur les frottis V, une véritable destruction bacillaire. Les germes y sont mal conservés et très fragmentés, ils sont généralement très pâles et leur nombre surtout est bien inférieur à celui des frottis précédents ; ajoutons que les amas bacillaires eux-mêmes sont dès ce moment disloqués et réellement *fondus*, pour employer une expression qui rend bien la réalité. Il semble que la bactériolyse serait plus intense encore, si les bacilles inclus dans les phagocytes n'étaient assez bien conservés. — Tout autre est l'aspect des frottis *N* : le champ microscopique est encore bourré de bacilles tantôt isolés, tantôt réunis en amas compacts ; ces bacilles se colorent encore normalement et ne présentent pas les signes de dégénérescence dont il vient d'être question.

B. Enfin, nous avons comparé les propriétés bactéricides de la sérosité péritonéale, provenant d'animaux vaccinés et neufs, débarrassée des phagocytes.

Pour obtenir ces exsudats péritonéaux, nous avons employé la méthode indiquée plus haut. Après une centrifugation suffisamment prolongée, le liquide qui surnage est limpide et débarrassé des leucocytes. Nous traitons de la même façon les exsudats provenant de lapins *neufs* et de lapins *vaccinés*. Dans le but de faciliter les recherches, nous diluons au demi, dans l'eau physiologique, les parties liquides obtenues après centrifugation.

Nous préparons alors des pipettes de même capacité qui vont nous servir à prendre des quantités égales de sérosité péritonéale et de bacilles de Koch et à faire des mélanges parfaitement égaux dans des verres de montre. Nous désignerons ces mélanges par les lettres suivantes :

V = mélange de sérosité péritonéale de lapin *vacciné* et de bacilles de Koch.

N = mélange de sérosité péritonéale de lapin *neuf* et de bacilles de Koch.

T = mélange d'eau physiologique et de bacilles de Koch.

Ces mélanges étant faits, nous les aspirons dans des pipettes dont nous scellons alors à la flamme les extrémités et que nous portons à la couveuse à 37°. Dès lors, nous observons macroscopiquement et microscopiquement ces mélanges et nous obtenons par cette double enquête, les résultats intéressants que nous allons détailler.

Après une heure de séjour à la couveuse, l'aspect macroscopique des trois pipettes n'a pas changé, mais les plaques *microscopiques* que nous tirons du mélange V nous montrent que les bacilles sont déjà en voie de bactériolyse : ils sont déformés, granuleux et fragmentés ; les bacilles des mélanges N et T ne sont pas altérés et ne présentent pas de modifications à signaler.

Après cinq heures, nous réexaminons les trois mélanges. Procédant d'abord à l'examen macroscopique, nous n'avons pas de peine à nous convaincre que le mélange V s'est notablement éclairci si on le compare aux deux autres, qui conservent leur louchissement net. D'autre part — et nous voyons en cela un nouvel effet des propriétés bactériolytiques des humeurs des lapins vaccinés — les grumeaux de l'émulsion bacillaire sont déjà disloqués et partagés en fragments plus petits, qui peu à peu tombent eux-mêmes en déliquescence. L'examen microscopique des frottis colorés, obtenus avec ces trois mélanges donne des résultats qui concordent bien avec l'examen macroscopique. Les bacilles provenant de la pipette V prennent très mal les colorants et ont subi une véritable dégénéresence granuleuse, alors que les frottis N et T ne révèlent pas ces modifications.

Après sept heures, la destruction bacillaire s'est encore accentuée dans le mélange V et la bactériolyse commence à se produire. Aussi, après vingt-quatre heures de séjour à la couveuse, les différences entre les trois mélanges apparaissent nettement. A l'examen macroscopique, on remarque que le mélange *T* a gardé son louchissement primitif et qu'il présente, dans la partie effilée de la pipette, un dépôt notable formé par des bacilles : que le mélange *N* s'est éclairci, mais est encore nettement louche ; enfin que le mélange V est devenu limpide et ne contient plus que de rares grumeaux dans le fond de la pipette.

Au microscope, nous retrouvons dans N et T, de nombreux bacilles bien colorés et souvent en amas, alors que dans N, nous ne décelons plus que de rares bacilles et les amas bacillaires ont presque totalement disparu.

On peut donc conclure que dans la pipette qui contenait le mélange d'émulsion bacillaire et de sérosité péritonéale de lapin vacciné, il s'est produit une *bactériolyse* intense des bacilles de Koch ; bactériolyse qui s'est encore accentuée après trente, trente-six heures, pour être presque complète après quarante-huit heures.

Ajoutons cependant que tous les lapins vaccinés ne préparent pas également ces substances immunisantes ; certains de ces animaux semblent même ne pas en préparer ; la raison de ces différences nous échappe jusqu'ici.

Nous concluons de ces dernières observations que, grâce à la vaccination antituberculeuse par la méthode des sacs, l'organisme élabore, chez le lapin, des substances immunisantes contre le bacille de Koch. Il doit en résulter naturellement, que les animaux vaccinés offrent plus de résistance que les animaux neufs contre l'infection tuberculeuse, expérimentale, et surtout contre la contamination naturelle. Ce dernier point a été prouvé péremptoirement par le savant professeur de Gand, dans sa dernière communication à l'Académie de Belgique (1907, p. 124).

Les expériences que nous avons entreprises dans le même sens, nous promettent aussi les meilleurs résultats.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

I. La vaccination antituberculeuse préconisée par M. le prof. Heymans de Gand est, en elle-même, très simple et très facile.

II. Nous basant sur des autopsies et analyses anatomo-pathologiques, aussi bien chez les bovidés que chez les petits animaux de laboratoire, nous avons reconnu que cette vaccination ne nuit, en aucune façon, aux sujets qui y sont soumis.

III. La vaccination par la méthode reproduit le mécanisme de la guérison spontanée de la tuberculose.

IV. Elle provoque, chez les animaux vaccinés, des réactions d'immunité très nettes vis-à-vis du bacille de Koch.

SUR UNE TENTATIVE D'ÉDITION

DES

ŒUVRES COMPLÈTES DE L. EULER

FAITE A BRUXELLES EN 1839

par H. BOSMANS, S. J.

La correspondance de C.-G.-J. Jacobi et de P.-H. Fuss, publiée récemment, dans la Bibliotheca Mathematica, par MM. Stäckel et Ahrens (*), mentionne à plusieurs reprises une édition des *Œuvres d'Euler* dont cinq volumes parurent à Bruxelles, en 1839. C'est là aujourd'hui un ouvrage bien oublié, même en Belgique. A l'étranger il est devenu, paraît-il, une rareté bibliographique. On le chercherait en vain au British Museum. Aucune bibliothèque d'Allemagne n'en possède un exemplaire complet, et seule l'Université de Kœnigsberg en a les trois premiers volumes. Au moment où, de tous côtés, les géomètres réclament à l'envi une bonne édition critique d'Euler, la vieille édition de Bruxelles conserve un intérêt du moins rétrospectif. Ce serait, au besoin, l'excuse de cette note.

Et tout d'abord, en voici le titre :

Œuvres complètes en français de L. Euler, publiées par MM. Dubois et Drapiez, examinateurs permanents à l'École militaire de

---

(*) *Der Briefwechsel zwischen C.-G.-J. Jacobi und P.-H. v. Fuss* ueber die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Von P. Staeckel in Hannover und W. Ahrens in Magdeburg. Bibliotheca Mathematica, 3^e série, t. VIII, Leipzig, 1908 ; pp. 233-306.

Belgique ; Moreau, Weiler et Steichen, professeurs à la même École ; et Ph. Vandermaelen, fondateur de l'Établissement géographique de Bruxelles ; accompagnées de figures et ornées du portrait de L. Euler, par M. Madou, professeur de dessin à l'École Militaire. Bruxelles, Établissement géographique, près la porte de Flandre. 1839 (*).

Les éditeurs formaient un corps d'élite. Tous étaient hommes distingués, quelques-uns même des hommes de la plus haute valeur. Tel notamment ce Philippe Vandermaelen (**), membre de l'Académie Royale de Belgique, fondateur du célèbre Établissement géographique de Bruxelles. Tel encore Steichen (***), membre lui aussi de l'Académie. Esprit original, un peu compliqué il est vrai, mais auquel on doit des mémoires sur la mécanique qui furent jadis remarqués. Steichen écrivit en outre une étude sur les travaux de Simon Stévin (****) restée excellente et consultée avec fruit, même aujourd'hui.

Drapiez (*****) était naturaliste. Son titre principal au souvenir de la postérité lui vient d'avoir pris rang parmi les premiers fondateurs du Jardin botanique de Bruxelles. C'était en son genre le plus beau de l'Europe, disait, en 1835, de Candolles à Pierre van

---

(*) In-8°. T. I, LXXII-347 pp., portrait ; t. II, 498 pp., 8 pl. ; t. III, 476 pp. ; t. IV, 491 pp. ; t. V, 270 pp.

(**) Né à Bruxelles, le 23 décembre 1795, mort dans la même ville, le 29 mai 1869. On lui a consacré de nombreuses notices biographiques. L'une des meilleures a été donnée par Houzeau dans l'*Annuaire de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, pour 1873 ; pp. 109-147.

(***) Né à Burange (Grand-Duché de Luxembourg) le 29 septembre 1804, décédé à Ixelles le 4 mars 1891. Le général De Tilly lui a consacré une courte notice biographique dans le discours prononcé à ses funérailles au nom de l'Académie (BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE, 3e sér., t. 21, Bruxelles, 1891, pp. 308-311). La liste de ses travaux se trouve dans les *Notices biographiques et bibliographiques concernant les membres... de l'Académie royale de Belgique*. Édition de 1886. Bruxelles, Hayez, 1887 ; pp. 272 et 273.

(****) *Mémoire sur la vie et les travaux de Simon Stévin*, par Steichen. Bruxelles, Van Dale, 1846.

(*****) Né à Lille, le 28 août 1778, mort à Bruxelles, le 28 décembre 1856. Sa notice par Van Beneden se trouve dans la BIOGRAPHIE NATIONALE publiée par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, t. 6, Bruxelles, 1878 ; col. 158-165.

Beneden, qui rappelle ce souvenir dans sa notice sur Drapiez. Drapiez a beaucoup écrit, mais, il faut l'avouer, parfois un peu vite.

Dubois (*) et Moreau (**) se firent connaître comme mathématiciens ; leur réputation ne dépassa cependant guère les frontières de la Belgique. Quant au général Weiler (***), à cette époque simple professeur à l'École militaire, il parcourut dans l'arme du génie une carrière brillante.

Ces Messieurs s'adjoignirent un renfort nombreux de traducteurs et de copistes. Je trouve dans leurs archives, possédées, on le sait, par l'Observatoire royal de Belgique à Uccle, les noms bien obscurs de B. F. Toussaint, Truffaut, T. Joly, Dworzecki, Martin, Tuchs, Bottin, etc., sur lesquels les renseignements biographiques me font défaut.

Le plan primitif de l'entreprise n'était vraiment pas mauvais. Des travaux d'Euler, les éditeurs connaissaient la liste donnée par Nicolas Fuss à la suite de l'édition allemande de son éloge du grand géomètre (****). Ils la croyaient complète. L'Observatoire possède encore un exemplaire du catalogue de Nicolas Fuss (*****), où tous les titres latins et allemands sont traduits

---

(*) Né à Bruxelles, en 1787, décédé dans la même ville, en 1859. Voir sa notice dans la Biographie nationale, publiée par l'Académie de Belgique, t. 6, Bruxelles, 1878, col. 190 et 191.

(**) Né à Bruxelles, le 16 mai 1819, décédé dans la même ville, le 21 mars 1883. Voir sa notice dans la Biographie nationale publiée par l'Académie de Belgique, t. 15, Bruxelles, 1899, col. 245 et 246.

(***) Né à Diekirch (Grand-Duché de Luxembourg) le 15 décembre 1804 décédé à Ixelles, le 12 mai 1871. Voir Bibliographie nationale. *Dictionnaire des écrivains belges et catalogue de leurs publications.* t. 4, Bruxelles, Weissenbruch, 1899, col. 331 et 332. Weiler donnait à l'École militaire la topographie. Voir : *Histoire de l'École militaire de Belgique* par V. Deguise. Bruxelles, Polleunis et Ceuterick, 1895, p. 251.

(****) *Lobrede auf Herrn Leonhard Euler, in der Versammlung der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften zu Petersburg den 23 Octob. 1783 vorgelesen* von Nicolas Fuss... von dem Verfasser selbst aus dem französischen übersetzt... nebst einem vollständigen Verzeichniss der Eulerschen Schriften. Basel, bey Johann Schweighausen, 1786.

(*****) Coté 46*g*. L'exemplaire est incomplet. Il lui manque l'éloge même d'Euler et ne contient que la liste des ouvrages. Le catalogue de la Bibliothèque de l'Observatoire le mentionne sous le titre de : *Vollständiges Verzeichniss der Schriften des Herrn Leonhard Euler.*

en français dans la marge. On y trouve des indications curieuses tant sur les ouvrages achetés par la corporation des éditeurs que sur les bibliothèques auxquelles ils demandaient en prêt les mémoires dont ils ne possédaient pas eux-mêmes d'exemplaire.

Un autre manuscrit de l'Observatoire (*) nous apprend les détails du plan lui-même. L'ordre choisi était l'ordre méthodique, et les travaux d'Euler s'y groupaient en quatorze classes : 1° Physique ; 2° Arithmétique raisonnée ; 3° Algèbre ; 4° Problèmes de géométrie ; 5° Introduction à l'analyse infinitésimale ; 6° Calcul différentiel et calcul intégral ; 7° Calcul des probabilités ; 8° Calcul des variations ; 9° Mécanique ; 10° Hydraulique ; 11° Acoustique ; 12° Dioptrique ; 13° Astronomie ; 14° Science navale. Dans l'ouvrage imprimé il est en outre souvent question d'une dernière section intitulée *Mélanges ;* elle provient de modifications apportées au plan primitif.

L'arrière-petit-fils d'Euler, le célèbre Paul Henri Fuss, auquel le monde savant doit la publication de la *Correspondance* (**) et d'une partie notable des *Œuvres* (***) de son illustre ancêtre, P. H. Fuss, dis-je, vit d'abord de très bon œil l'édition de Bruxelles. A Jacobi, qui insiste et le prie de prendre l'initiative d'une édition complète des œuvres de son bisaïeul, Fuss répond que le moment est inopportun (****). Il faut attendre le résultat de l'essai fait à Bruxelles. Bien plus, il s'intéresse directement au succès de l'édition belge, envoie au comité de rédaction des mémoires qui lui

---

(*) Coté 494*h*. Ce manuscrit est formé par un paquet de feuillets détachés, non numérotés, dont l'ordre ne s'impose pas. J'aurai plusieurs fois à le citer, mais l'état du manuscrit ne permet pas de donner les références avec toute la précision désirable.

(**) *Correspondance mathématique et physique de quelques géomètres du XVIII^e siècle. précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler tant imprimés qu'inédits et publiée sous les auspices de l'Académie impériale de S^t-Pétersbourg*, par P. H. Fuss... S^t-Pétersbourg, 1848. En 2 vol.

(***) *L. Euleri Commentationes arithmeticae collectae, auspiciis Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae* ediderunt auctoris praenepotes P. H. Fuss et Nic. Fuss. Petropoli, 1849. En 2 vol.

L. Euleri opera posthuma mathematica et physica quae... ediderunt... P. H. Fuss et N. Fuss. Petropoli, 1862. En 2 vol.

(****) *Briefwechsel*... BIBL. MATH., 3^e sér., t. 8, p. 241. Lettre du 7/19 mars 1841.

font défaut et lui adresse de chaleureux encouragements. Témoin cette lettre (*) :

Académie Impériale des Sciences de Russie.

S^{t}-Pétersbourg, le 21 juin (3 juillet) 1839.

Le conseiller d'État secrétaire perpétuel de l'Académie, à Messieurs les éditeurs des Œuvres de L. Euler.

MESSIEURS,

J'ai eu l'honneur de recevoir votre lettre du 7 mars, avec le premier volume des *Œuvres complètes d'Euler ;* vous ne sauriez croire, Messieurs, avec quelle vive satisfaction, j'ai appris par le prospectus, les détails de votre excellente entreprise. Je ne parlerai pas de moi personnellement, tous les amateurs des sciences mathématiques, toutes les académies, et la nôtre principalement, qui a eu le bonheur de posséder le grand homme pendant tout un demi-siècle, devront applaudir à votre projet ; et ce suffrage général, je n'en doute pas, en garantira le succès.

Vous me demandez la communication des mémoires inédits d'Euler ; j'en conclus que le tome XI (**) de l'ancienne série des

---

(*) *Œuvres complètes de L. Euler,* t. 3, p. 474.

(**) Il y a dans le texte, tome IV, mais c'est là une faute d'impression évidente. Le volume auquel Fuss fait allusion est le tome XI des MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST-PÉTERSBOURG, publié à S^{t}-Pétersbourg, en 1830. Il est consacré, en entier, à la publication des mémoires posthumes de L. Euler, F. T. Schubert et N. Fuss, ci-devant membres de l'Académie Impériale des Sciences de S^{t}-Pétersbourg. Nous en donnons ici l'Avant-propos, rempli, on le verra, de détails intéressants :

« Lorsqu'en 1826, époque de sa fête séculaire, l'Académie prit la résolution de faire commencer avec le nouveau siècle de son existence, une nouvelle série de ses *Mémoires*, elle arrêta en même temps de publier dans un volume à part, formant le supplément de la série qui venait d'être terminée, tous les mémoires posthumes qui se trouvaient dans ses archives, et dont la publication avait été décrétée du vivant des auteurs. A ce nombre appartenaient les mémoires encore inédits d'Euler. On sait que ce grand homme avait désiré que les volumes du recueil académique pussent contenir de ses mémoires encore quarante ans après sa mort. Il ne s'agit pas ici de discuter si l'Académie a eu tort ou non de se conformer aussi strictement à la volonté du plus grand géomètre qu'elle ait eu le bonheur de posséder. Le fait est que le nombre de ses

Mémoires de notre Académie n'est pas venu à votre connaissance, et je m'empresse de vous l'envoyer. Vous y trouverez tout ce qui, à l'époque où je fus chargé du secrétariat de l'Académie, se trouvait aux archives en fait de mémoires inédits de mon illustre bisaïeul. Depuis longtemps on méditait chez nous une édition des *Œuvres* d'Euler ; vous nous avez prévenus et le monde savant ne peut que s'en féliciter. Ce n'est qu'aujourd'hui que je ferai part à l'Académie de votre entreprise ; étant sûr d'avance de l'accueil favorable qu'elle trouvera chez mes collègues, je vous prie d'agréer les remerciements de l'Académie pour l'envoi du premier volume des *Lettres à une princesse d'Allemagne*. Veuillez bien m'inscrire au nombre de vos souscripteurs pour huit exemplaires, etc. etc.

Votre très humble et très obéissant serviteur
(signé) Fuss.

En écrivant cette lettre, Fuss ne connaissait encore, on le voit, que le premier volume des *Lettres à une princesse d'Allemagne*, c'est-à-dire le tome I des *Œuvres complètes*. Ce début avait été pour les éditeurs chose relativement fort aisée. Les lettres à la princesse Philippine de Schwedt de la maison d'Anhalt-Dessau sont écrites en français (*), il suffisait de les reproduire. Les difficultés véritables commençaient avec le tome II. Les savants belges s'y perdirent dès l'abord et Fuss, à la réception des volumes suivants, éprouva de cruelles déceptions. Aussi quatre ans plus tard, en 1843, prononçait-il ce jugement sévère : « Les deux éloges (d'Euler) ont été plus d'une fois reproduits dans les éditions récentes des ouvrages de notre grand géomètre ; naguère encore

---

mémoires posthumes a suffi non seulement pour en remplir, immédiatement après sa mort arrivée en 1783, trois gros volumes in-4° (les *Opuscula analytica* et le 4e volume de la 2e édition de ses *Institutiones calculi integralis*), mais encore pour en orner les vingt-cinq volumes des Nova Acta et des Mémoires qui ont paru depuis cette époque, et, en 1823, à l'échéance du terme de quarante ans, il en restait encore quatorze aux archives, que l'Académie offre actuellement au public, dans ce volume. A ces mémoires on en a joint quatre de Schubert et treize de N. Fuss. Pour le format et les caractères, on a cru devoir se conformer à l'ancienne série dont ce volume est le dernier ».

(*) *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur quelques sujets de Physique et de Philosophie*. St-Pétersbourg, 1768-1772. En 3 vol.

dans celle qu'on avait entreprise à Bruxelles et dont, je crois, l'interruption n'est guère à regretter » (*).

La sentence est dure, mais méritée. Les éditeurs avaient présumé de leurs forces. Ils voulaient classer, traduire et publier les œuvres d'Euler en deux ans. Aucun corps savant n'accomplira en si peu de temps pareil labeur (**). Mais il y a plus, sans prévoir le danger de toucher à un maître comme Euler, les érudits belges essayèrent d'en faciliter la lecture et de le mettre au point de la science. Tentative téméraire, étrange chez de vrais savants, digne plutôt de l'audace inconsciente et sereine de maîtres d'écoles. Aussi Jacobi est-il bien près de les en affliger du sobriquet (***). Mon Dieu, ne leur jetons pas trop vite la pierre! Il ne me faudrait pas chercher longtemps pour trouver à l'étranger telle société mathématique des plus considérables, des plus connues, où pas plus tard que l'an dernier une proposition analogue a été faite sérieusement et écoutée sans rire (****)! Bref, les corrections des éditeurs de Bruxelles furent mal reçues. Elles discréditèrent leur travail et finalement le ruinèrent.

Au point de vue de l'exactitude et de la fidélité, beaucoup des manuscrits inédits de l'Observatoire sont supérieurs aux travaux réimprimés. Traduits par des sous-ordres ils n'ont pas été remaniés, serrent le texte de près, reproduisent sans mutilation la pensée de l'auteur. Nous en donnerons plus loin la liste, après avoir au préalable décrit sommairement les cinq volumes publiés. Une notice sur l'Observatoire royal, parue dans l'ANNUAIRE de 1898,

---

(*) *Correspondance de quelques géomètres du XVIII^e siècle*.... t. I, pp. XLVI et XLVII.

(**) Le P. Hagen, se rangeant en cela à l'avis de Fuss, estime que les Œuvres d'Euler formeront au moins 25 volumes in-4° de 640 pages. *Index Operum Leonardi Euleri*, Berolini, 1896, p. VI.

(***) « Ich habe hier (à Paris) auch erfahren dass das Belgische Unternehmen von der Gesammtausgabe von Euler sich gänzlich zerschlagen hat. Er was blos eine speculation um ein Rechenbuch herauszugeben. » *Briefwechsel*... BIBL. MATH. 3e sér., t. 8, p. 253. Lettre du 10 août 1842.

(****) Cette phrase a été écrite en mars 1908. Depuis lors la Commission chargée de l'édition des *Œuvres* d'Euler s'est complètement ralliée à la thèse que je défends ici. Voir notamment : *Der Plan einer Gesamtausgabe von Leonhard Eulers Werken*, par F. Rudio. JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG, t. XVIII, Leipzig, 1909, p. 47, en note.

dit à propos de la bibliothèque : « L'Observatoire possède la collection des mémoires de Léonard Euler, réunis à grand' peine et traduits en français par les éditeurs qui préparaient la publication des œuvres complètes de ce mathématicien, mais qui n'ont pu donner suite à leur projet » (*).

Cette phrase est de nature à induire en erreur. A sa lecture on pourrait croire, on doit même croire à l'existence d'une traduction complète des œuvres d'Euler. Cela n'est pas. L'Observatoire n'en possède pas la dixième partie. Mais ce fragment est déjà à lui seul très considérable. On sait l'incroyable fécondité d'Euler ! S'ils étaient imprimés, les manuscrits inédits de l'Observatoire suffiraient à remplir plusieurs gros in-4°. Notre liste fera connaître quelles sont en réalité les traductions conservées à la bibliothèque.

Euler revient souvent à diverses reprises sur les mêmes sujets. Une simple énumération française des titres de ses mémoires les rend difficiles à identifier et ne peut guère servir aux chercheurs. A preuve le peu d'attention prêtée jusqu'ici aux manuscrits de l'Observatoire malgré les indications du *Catalogue des ouvrages d'Astronomie et de Météorologie qui se trouvent dans les principales bibliothèques de la Belgique* (**). En m'aidant de l'*Index* du P. Hagen (***) et des manuscrits eux-mêmes, j'ai transcrit pour chaque mémoire le titre latin original en donnant, en même temps,

---

(*) *Description sommaire de l'Observatoire royal de Belgique.* ANNUAIRE DE L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BELGIQUE, pour 1898. Bruxelles, Hayez, 1898 ; pp. 425 et 426.

(**) Préparé et mis en ordre à l'Observatoire de Bruxelles (par Houzeau). Bruxelles, Hayez, 1878.

(***) Cité ci-dessus. Pour abréger les références bibliographiques, je me servirai des sigles du P. Hagen.

(N). A. Petr. = *(Nova) Acta Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae.*

(N). C. Petr. = *(Novi) Commentarii Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae.*

Mem. de Berlin. = *Histoire de l'Académie royale des Sciences de Berlin. avec les Mémoires tirez des Registres de cette Académie.*

Op. var. Arg. = *L. Euleri Opuscula varii argumenti* I, II, III. Berolini 1746, 50, 51.

Rec. des pièces cour. de Paris = *Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie royale des Sciences de Paris.* Voir sur ce *Recueil* : Brunet. *Manuel du libraire et de l'amateur de livres,* 5e édit., t. I. Paris, 1860, col. 27.

le volume où il a été publié pour la première fois. J'eus voulu aller plus loin et collationner la traduction avec le texte latin, mais l'Observatoire ne possédant pas les anciennes collections des Académies de Berlin et de St-Pétersbourg, ce travail m'a été pour le moment impossible. Dans les conditions où j'aurais dû le faire, il m'eût pris un temps dont je ne disposais pas (*). Pour la même raison je n'ai pu distinguer la date de la présentation des mémoires d'Euler à l'Académie de St-Pétersbourg et celle de leur publication effective, comme le souhaite M. Félix Müller (**) ; je m'en tiens aux dates du P. Hagen, suffisantes d'ailleurs au but d'identification que j'ai en vue.

Voici maintenant l'analyse des cinq volumes (***) publiés en 1839.

Le *tome I* contient les éloges d'Euler par N. Fuss et par Condorcet, puis les 137 premières *Lettres à une princesse d'Allemagne*. Ce volume est bon et ne provoque pas de remarques.

Le *tome II* commence par les dernières *Lettres à une princesse d'Allemagne*, ce qui nous conduit vers le milieu du volume ; puis viennent des *Mémoires sur diverses parties de la physique*. « Ces Mémoires, disent les éditeurs, servant en quelque sorte de développement ou de pièces à l'appui des *Lettres à une princesse d'Allemagne*, ne doivent dans les *Œuvres complètes* du grand

---

(*) Je remercie vivement M. Collard, bibliothécaire de l'Observatoire, pour l'obligeance avec laquelle il a facilité mes recherches.

(**) *Bibliographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonhard Euler*. JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG, t. XVI. Leipzig, 1907, pp. 193-194.

(***) La BIBLIOGRAPHIE NATIONALE. *Dictionnaire des écrivains belges et catalogue de leurs publications* (Bruxelles, Weissenbruch, 1886, t. I, p. 599) dit avec raison, dans l'article consacré à Louis Joseph Félix Dubois, que l'édition belge des *Œuvres complètes de L. Euler* n'eut que cinq volumes. La remarque n'est pas inutile, car Houzeau, dans la *Bibliographie générale de l'Astronomie* (Bruxelles, Hayez, 1887, t. I, 1e partie, p. 666) induit ici le lecteur en erreur. Sous le n° 3843, il dit, en effet : « Euler L. *Œuvres complètes en français*. 8 vol. in-8°. Bruxelles, 1839-41. Cette édition, qui devait comprendre 25 volumes, a été abandonnée après le tome VIII. Les volumes parus ne renferment que des mathématiques pures ». Pour formuler cette dernière assertion, Houzeau doit avoir travaillé sur pièces de seconde main, sans avoir vu l'ouvrage ; on s'en rendra compte par notre analyse.

mathématicien prendre place ailleurs qu'à la suite de ces lettres » (*). Fort bien, mais alors pourquoi ne pas publier ici intégralement tous les mémoires d'Euler sur la physique ? C'eût été suivre le plan manuscrit primitif et, nous l'avons dit, ce plan était bon. Loin de là, les éditeurs s'en écartent complètement. Ils omettent des mémoires entiers pour les reporter dans d'autres parties où ils sont mal à leur place. Bien plus, dans les mémoires conservés ils corrigent, taillent, résument à tort et à travers. En cela ils se laissent même parfois guider par une idée bien imprévue et peu scientifique : donner au second volume « à peu près l'épaisseur du premier ». J'en ai retrouvé la preuve dans les papiers de l'Observatoire, où une note manuscrite dit la chose en termes exprès (**).

Voici la liste de ces mémoires (***) :

1° Recherches physiques sur la nature des moindres parties de la matière. *Publié en français dans* Op. var. arg. I, *1746, p. 287.*

2° Dissertation sur le feu, sa nature et ses propriétés.

Traduit de Dissertatio de igne, in qua ejus natura et proprietates explicantur. Rec. des pièces cour. de Paris, *IV, 1752, I.*

3° Sur la propagation du son et de la lumière.

Traduit de Conjectura physica de propagatione soni et luminis. Op. var. arg. *II, 1750, p. 1.*

La première partie de ce mémoire est seule publiée ici. Quant au manuscrit de la seconde partie, il se trouve encore à l'Observatoire, où il est coté 499^h.

Les éditeurs donnent au sujet de cette séparation en deux parties une note trop curieuse pour ne pas la reproduire en entier. Impossible de mieux mettre en lumière les mauvais principes conducteurs qui les guident. Et que dire de leur phrase française et de leur style ? Euler, Suisse allemand, pouvait leur en remontrer !

Je cite textuellement (****) :

(*) T. 2, p. 263^h.

(**) Ms. 494^h.

(***) J'ai cru utile de préciser, plus que les éditeurs, les titres des mémoires originaux et l'indication des volumes où ils ont été publiés pour la première fois.

(****) Pp. 301 et 302.

« Nota *(sic)*. L'auteur, après avoir prouvé au commencement de ce Mémoire, que le sens de l'ouïe ne peut pas servir à mesurer exactement la fréquence des impulsions, qui caractérise chacun des sons de l'octave, cherche à justifier sa conjecture sur la propagation du son dans l'air, par la comparaison de cette propagation avec celle de la lumière dans l'éther. Si la série de chacune des couleurs, depuis un premier rayon rouge jusqu'à un second rouge, est due à la fréquence des impulsions de la lumière dans l'éther, l'octave formée par chacun des huit tons ne serait-elle pas due également à la fréquence des impulsions du son dans l'air, qui est un fluide bien plus dense que l'éther ? Euler en parlant de cette comparaison probable, fait dépendre l'explication des phénomènes du son des mêmes causes que les phénomènes lumineux corrélatifs, et comme les plus petites différences entre ces derniers phénomènes peuvent toujours être appréciées par le sens délicat de la vue, c'est en cherchant à se rendre compte des phénomènes de la lumière qu'il parvient à justifier sa conjecture sur la propagation du son.

» Dans les recherches sur la lumière qui terminent son Mémoire, l'auteur prouve d'abord que la fréquence des impulsions ne peut pas servir à expliquer immédiatement et toute seule, le phénomène lumineux de la réfraction, malgré cependant que cette fréquence d'impulsions contribue indirectement à modifier la réfraction par son influence sur la vitesse des impulsions ; en sorte qu'il se propose ce problème :

» *Déterminer comment la fréquence des impulsions de la lumière influe sur la réfraction et donne naissance aux diverses couleurs ?*

» Après une analyse transcendante des plus ingénieuses dans laquelle les propriétés physiques de la lumière, confirmées par l'expérience, servent à l'auteur pour trouver la forme d'une fraction inconnue ayant pour variable la fréquence des impulsions, il parvient enfin à ce beau résultat :

» *Dans le passage des rayons rouges et violets, d'un milieu dans un autre, le logarithme du rapport de réfraction des rayons rouges est toujours proportionnel au logarithme du rapport de réfraction des rayons violets* (*).

(*) Voici le texte d'Euler : « In transitu radiorum ex medio quocunque dia-

» Comme les raisonnements et les calculs employés pour amener ce résultat ne sont pas à la portée de tout le monde, les éditeurs des *Œuvres complètes* d'Euler ont jugé convenable de ne pas les consigner ici ; c'est un problème de hautes mathématiques appliquées à la physique, dont la solution doit trouver sa place dans la dernière section des *Mélanges*, à la fin de ces mêmes *Œuvres* ».

Qu'on relise après un pareil fatras le beau mémoire d'Euler, si bien écrit, si élégant, on comprendra l'amère désillusion de Fuss en le voyant massacrer avec tant de maladresse !

4° Sur la lumière et les couleurs.

Publié en français dans Mém. de Berl. *I, 1745, p. 17 (Hist.)*.

A la fin du mémoire on lit (*) :

« *N. B.* Nous ne saurions entrer dans le détail des explications des phénomènes dont Euler rend raison, en suivant les principes qui viennent d'être établis ; il suffit de dire que s'il ne conduit pas son hypothèse jusqu'à la démonstration, il lui donne au moins une très grande supériorité sur toutes celles que cette matière avait soulevées jusqu'à présent ».

Cette note, contrairement à ce que le lecteur pourrait peut-être croire, n'est pas, cette fois, le fait des éditeurs ; elle se trouve dans l'original. Il est équitable de le remarquer.

5° Extrait d'une explication physique des couleurs engendrées sur des surfaces extrêmement minces.

Publié en français dans Mém. de Berl. *VIII, 1752, p. 262.*

6° Expériences faites pour déterminer la réfraction dans toutes les liqueurs transparentes.

Publié en français dans Mém. de Berl. *XII, 1756, p. 235.*

Note des éditeurs (**) :

« Le mémoire qui précède n'est que le résumé de celui d'Euler. Afin de mettre ce résumé à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs, les éditeurs ont jugé convenable d'en retrancher la partie mathématique, pour ne donner ici que la partie physique et les

---

phano in aliud quodcunque, semper erit logarithmus rationis refractionis radiorum rubrorum ad logarithmum rationis refractionis violaceorum in ratione constante ». *Op. var. Arg. II, 1750, p. 21.*

(*) P. 309.

(**) P. 343.

résultats du calcul. On trouvera dans les *Mélanges* tout ce qui a été supprimé ».

Fort bien. Mais encore une fois de pareilles mutilations peuvent-elles encore se nommer : réédition d'Euler ?

7° Recherches physiques sur la cause de la queue des comètes, sur la lumière boréale, sur la lumière zodiacale.

Publié en français dans MÉM. DE BERL. *II, 1746, p. 117.*

8° Nouvelle théorie de la lumière et de la couleur.

Traduit de Nova theoria lucis et colorum. OP. VAR. ARG. *I, 1746, p. 169.*

9° Dissertation sur l'aimant et ses propriétés.

Traduit de Dissertatio de Magnete. OP. VAR. ARG. *III, 1751, p. 1.*

10° Dissertation sur l'inclinaison de l'aiguille aimantée.

Traduit de De observatione inclinationis magneticae dissertatio. REC. DES PIÈCES COUR. DE PARIS, *V, 1752, II, (b), p. 1.*

Le *tome III* contient l'*Arithmétique raisonnée* et le *tome IV*, l'*Algèbre*. Ils sont franchement mauvais, même en comparaison des autres volumes de la collection. Les éditions antérieures de ces ouvrages demandaient un examen critique ; les nouveaux éditeurs n'en prirent pas la peine. Sans remonter aux sources, ils employèrent pour l'*Arithmétique* la traduction dite de Bernoulli, édition de Berlin, 1792 (*) ; pour l'*Algèbre* la traduction de Garnier, Paris, 1807 (**). Nous le savons par les papiers de l'Observatoire (***).

Malheureusement, dit avec raison M. Florian Cajori, dans les *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de Cantor (****), en republiant l'*Arithmétique*, les éditeurs de Bruxelles s'écartent tellement du texte original qu'il en devient méconnaissable. Cette *Arithmétique* est à proprement parler un ouvrage nouveau, com-

---

(*) *L'Arithmétique raisonnée et démontrée, œuvres posthumes de Léonard Euler*, traduite en français par Bernoulli, directeur de l'Observatoire de Berlin, etc. etc., Berlin, Chez Voss et fils, Et Decker et fils, 1792.

(**) *Éléments d'Algèbre, par Léonard Euler*, traduits de l'allemand. Nouvelle édition revue et augmentée de notes, par J. G. Garnier. Paris, Courcier, 1807. En 2 vol.

(***) Ms. 494^h.

(****) Tom. IV, Abschnitt XX, Arithmetik, Gleichungslehre, Zahlentheorie, von F. Cajori. Leipzig, Teubner, 1907, p. 63, en note.

posé d'après les idées de l'ancien ; ce n'est pas une réédition. La même réflexion s'applique à l'*Algèbre*.

Abrégeons. Le tome IV ne contient pas de mémoires en annexe, mais à la fin du tome III, après l'*Arithmétique*, on trouve un appendice intitulé : *Complément de l'Arithmétique raisonnée*, « tiré, disent les éditeurs (*), des mémoires latins de L. Euler, sur quelques propriétés non élémentaires des nombres, et qui ne peuvent trouver place ailleurs qu'à la suite du *Traité d'Arithmétique* ».

Ce complément comprend trois parties.

1° Des nombres figurés ou polygones et de leur application à la sommation des piles de boulets.

Note des éditeurs (**) : « Extrait de l'algèbre et des mémoires de l'auteur ». C'eût été perte de temps que de chercher à en identifier les diverses parties.

2° Mémoire sur ce problème d'arithmétique : Trouver un nombre qui, divisé par des nombres connus, laisse pour résidu des nombres donnés.

Traduction très libre de Solutio problematis arithmetici de inveniendo numero qui per datos numeros divisus relinquat data residua. C. Petr. *VII, 1734-35, p. 46*.

3° Notions préliminaires sur les nombres parfaits et les nombres amiables.

Note des éditeurs (***) : « Extraites de différents mémoires de L. Euler ».

Bref, dans l'édition de Bruxelles, ces deux volumes manquent complètement leur but principal, le seul vraiment intéressant et utile : nous faire connaître comment Euler entendait l'exposé méthodique élémentaire de l'arithmétique et de l'algèbre (****).

Le *tome V*, hâtons-nous de le dire, est beaucoup meilleur que les précédents. Sans atteindre, loin de là, la perfection exigée

---

(*) P. 415.

(**) P. 417.

(***) P. 460.

(****) Euler rédigea aussi en 1765 un manuel de géométrie élémentaire à l'usage du gymnase annexé à l'Académie des sciences de S^{t}-Pétersbourg. Ce fait, ignoré jusqu'ici, vient d'être signalé par M. Bobynin de Moscou dans les *Vorlesungen* de Cantor, tom. IV, Abschnitt XXII, Elementare Geometrie, von V. Bobynin, p. 322.

aujourd'hui dans les éditions critiques, il est convenable pour l'époque où il parut. Nous y trouvons d'abord l'*Essai d'une nouvelle théorie sur la musique*, traduction suffisamment fidèle du *Tentamen novae theoriae musicae* (*). Il remplit les trois quarts du volume. Puis viennent trois mémoires :

1° Conjectures sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique.

Publié en français dans Mém. de Berl. *XX, 1764, p. 165.*

2° Du véritable caractère de la musique moderne.

Publié en français dans Mém. de Berl. *XX, 1764, p. 175.*

3° Des véritables principes de l'harmonie représentés par le miroir musical.

Traduit de De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis. N. C. Petr. *XVIII, 1773, p. 330.*

Ce volume a été remis en vente sans modifications à Paris, en 1865, sous le nouveau titre de *Musique mathématique* (**).

Telle est, en résumé, cette curieuse tentative d'édition des *Œuvres complètes d'Euler*.

Malgré l'incontestable talent de ses promoteurs, elle échoua et devait échouer. Traduire Euler était déjà bien difficile ; le moderniser, impossible. Euler comme Euclide est un maître et on ne modernise pas les maîtres. Que si on m'objecte, en l'espèce, tant d'excellentes éditions modernisées des *Éléments* d'Euclide données aux xvie, xviie et xviiie siècles, je réponds : « Toutes ces bonnes éditions furent faites en vue des élèves ; quant aux géomètres, aucune d'elles ne remplacera jamais pour eux le texte original. Or

---

(*) *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae.* Petropoli, ex typographia Academiae scientiarum. M.D.CC.XXXIX.

(**) Titre de départ : *Musique mathématique.*

Titre : *Musique mathématique. La musique rendue facile, par le système de la notation lettrée, ou essai d'une nouvelle théorie de la musique, fondée sur les connaissances physiques et métaphysiques appliquées aux vrais principes de l'harmonie.* Par Léonard Euler, traduit, augmenté et mis au courant de la science actuelle par une société de savants. Paris, Librairie scientifique et philosophique, 1865.

Les éditeurs ne se sont pas même donné la peine de réimprimer en entier la première feuille ; les deux nouveaux titres y sont appliqués en cartons.

c'était Euler lui-même que les géomètres demandaient aux éditeurs ! »

Reste à donner pour terminer cette étude, la liste des manuscrits de l'Observatoire. (Nous l'avons déjà dit ci-dessus, et il n'est pas inopportun de le répéter, ces manuscrits contiennent pour la plupart un travail relativement bon.) Écrits par des hommes modestes, de talent bien inférieur à celui des éditeurs, ne se croyant pas de taille à corriger Euler, ils font une version fidèle du latin, sans s'écarter du texte. Si la plume des traducteurs n'est pas toujours élégante, elle nous livre cependant d'ordinaire avec exactitude la pensée de l'auteur. Ce n'est pas ici la place d'un plaidoyer en faveur des humanités anciennes, mais le fait est là ; nombreux sont aujourd'hui les mathématiciens n'ayant pas passé par les classes latines, incapables donc de lire les mémoires d'Euler dans la langue originale ; pour eux les manuscrits de l'Observatoire peuvent être plus qu'un simple objet de curiosité et conserver de l'utilité pratique.

C'est une des raisons qui m'engagent à en publier ici le catalogue.

Pour y faciliter les recherches, les titres y sont précédés d'une double cote :

La première mise entre parenthèses est celle du *Catalogue des ouvrages d'Astronomie et de Météorologie qui se trouvent dans les principales bibliothèques de la Belgique* par Houzeau. La deuxième est la cote de la Bibliothèque de l'Observatoire.

A chaque mémoire j'ajoute, quand il y a lieu, le titre original d'après l'*Index* du P. Hagen ; ce renseignement est indispensable aux identifications. Je termine enfin par une Table de concordance entre les cotes du *Catalogue* de Houzeau et celles de l'*Index* de Hagen.

Sauf indication contraire, chacun de ces mémoires forme une farde de feuilles détachées. Leur numérotation est compliquée, le traducteur suivant souvent le texte imprimé page par page, et donnant alors à la feuille manuscrite le numéro de la page imprimée. Il m'a paru sans intérêt d'en indiquer le détail.

(626) 46^g. *Euler L. Vollständiges Verzeichniss ihrer Schriften.* S. l. n. d.

Imprimé in-8°, avec notes Ms. en marge.

Nous nous en sommes beaucoup servi. Ce sont les pp. 123-181 de : *Lobrede auf Herrn Leonhard Euler, in der Versammlung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu S^t-Petersburg den 23 Octob. 1783 vorgelesen von Nicolaus Fuss.* Basel, 1786.

(4575) 494^h. Euler L. Différentes listes de ses ouvrages.

1° Un extrait de la *France littéraire.*

2° Un extrait du *Manuel du Libraire*, par Brunet.

3° Liste des Opuscules insérés dans les *Mémoires de l'Académie de S^t-Pétersbourg.*

4° Liste des Opuscules insérés dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin.*

5° (Catalogue méthodique de ses *Œuvres complètes*).

(4815) 455^h. Exemple de l'emploi des observations dans les mathématiques pures.

Traduit par T. Joly. Specimen de usu observationum in mathesi pura. N. C. Petr. *VI, 1756-57, p. 185.*

(4831) 487^h. Des problèmes indéterminés qui paraissent plus que déterminés.

Traduit par Truffaut. De problematibus indeterminatis quae videntur plus quam determinata. N. C. Petr. *VI, 1756-57, p. 85.*

(4832) 516^h. De la résolution des équations d'un degré quelconque.

Traduit par Dworzecki. De resolutione aequationum cujusvis gradus. N. C. Petr. *IX, 1762-63, p. 70.*

(4833) 488^h. Nouveaux arguments pour distinguer les racines imaginaires des équations.

Traduit par Dworzecki. Nova criteria radices aequationum imaginarias dignoscendi. N. C. Petr. *XIII, 1768, p. 89.*

(4834) 483^h. Observations sur les racines des équations.

Traduction. Observationes circa radices aequationum. N. C. Petr. XV, *1770, p. 51.*

(4835) 482^h. Problème algébrique remarquable par ses formes tout à fait singulières.

Traduction. Problema algebraicum, ob affectiones prorsus singulares memorabile. N. C. Petr. *XV, 1770, p. 75.*

(4849) 514^h. Calcul différentiel.

Quatorze cahiers in-folio contenant la traduction de la première partie et des huit premiers chapitres de la seconde partie des Institutiones calculi differentialis, cum ejus usu in analysi finito-

rum ac doctrina serierum, auctore Leonhardo Eulero... Impensis Academiae imperialis Scientiarum Petropolitanae. 1755. Berolini, ex officina Michaelis.

(4854) 510^h. Considération d'une progression propre à faire trouver la quadrature du cercle.

Traduction. Consideratio progressionis cujusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae. C. PETR. *XI, 1739, p. 116.*

(4855) 464^h. Des séries divergentes.

Traduit par Toussaint. De seriebus divergentibus. N. C. PETR. *V, 1754-55, p. 205.*

(4856) 470^h. Différentes observations sur les séries infinies.

Traduction. Variae observationes circa series infinitas. C. PETR. *IX, 1737, p. 160.*

(4891) 505^h. Différentes démonstrations de géométrie.

Traduction. Variae demonstrationes geometricae. N. C. PETR. *I, 1748, p. 49.*

(4892) 502^h. Annotation sur un passage de Descartes concernant la quadrature du cercle.

Traduit par Toussaint. Annotationes in locum quemdam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem. N. C. PETR. *VIII, 1760-61, p. 157.*

(4893) 512^h. De différents modes d'exprimer en nombres approximativement la quadrature du cercle.

Traduction. De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. C. PETR. *IX, 1737, p. 222.*

(4894) 513^h. Solution du problème géométrique sur les lunules formées par les cercles.

Traduit par Dworzecki. Solutio problematis geometrici circa lunulas a circulis formatas. C. PETR. *IX, 1737, p. 207.*

(4895) 501^h. Développement d'un paradoxe remarquable sur l'égalité des surfaces.

Traduit par Toussaint. Evolutio insignis paradoxi circa aequalitatem superficierum. N. C. PETR. *XIV, I, 1769, p. 104.*

(4905) 509^h. Solution d'un problème appartenant à la géométrie de position.

Traduit par T. Joly. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. C. PETR. *VIII, 1736, p. 128.*

(4906) 493^h. Sur quelques propriétés des sections coniques.

L'original a paru en français sous le titre : Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes. Mém. de Berl. *I. 1745, pp. 53 et 71.*

(4908) 491^h. Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes.

L'original a été publié en français sous le même titre. Mém. de Berl. *IV, 1748, p. 219. Transcrit par Tucks.*

(4909) 490^h. Sur le nombre de points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper.

L'original a été publié en français sous le titre de : Démonstration sur le nombre des points où deux lignes d'un ordre quelconque peuvent se couper. Mém. de Berl. *IV, 1748, p. 234.*

(4939) 480^h. Observations sur le théorème de Fermat et quelques autres concernant les nombres premiers.

Traduction. Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus. C. Petr. *VI, 1732-33, p. 103.*

(4940) 472^h. Des fractions continues.

Traduit par Dworzecki. De fractionibus continuis. C. Petr. *IX, 1737, p. 98.*

(4941) 473^h. Démonstration de quelques théorèmes d'arithmétique.

Traduction. Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes. C. Petr. *X, 1738, p. 125.*

(4942) 474^h. Solution d'un problème très difficile proposé par Fermat.

Traduction. Solutio problematis difficillimi a Fermatio propositi. N. C. Petr. *II, 1749, p. 49.*

(4943) 481^h. Différentes remarques analytiques sur les combinaisons.

Traduit par B. F. Toussaint. Observationes analyticae variae de combinationibus. C. Petr. *XIII, 1741-43, p. 64.*

(4944) 479^h. Démonstration de quelques théorèmes par rapport aux nombres premiers.

Traduction. Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio. C. Petr. *VIII, 1736, p. 141.*

(4945) 484^h. De l'extraction des racines des quantités irrationnelles.

Traduit par T. Joly. De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus. C. Petr. *XIII, 1741-43, p. 16.*

(4946) 476^h. Théorèmes touchant les diviseurs des nombres.

Traduction. Theoremata circa divisores numerorum. N. C. Petr. *I, 1747-48, p. 20.*

(4947) 468^h. Sur les nombres amiables.

Traduit par Bottin. De numeris amicabilibus. Op. var. arg. *II, 1750, p. 23.*

(4948) 475^h. Distribution de la partition des nombres.

Traduit par Dworzecki. De partitione numerorum. N. C. Petr. *III, 1750-51, p. 125.*

(4949) 471^h. Des nombres formés par l'agrégation de deux carrés.

Traduit par P. C. Truffaut. De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum. N. C. Petr. *IV, 1752-53, p. 3.*

(4950) 467^h. Démonstration du théorème de Fermat que chaque nombre premier de la forme $4n+1$ est la somme de deux carrés.

Traduit par B. F. Toussaint. Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum. N. C. Petr. *V, 1754-55, p. 3.*

(4951) 466^h. Démonstration d'un théorème touchant l'ordre observé dans les sommes des diviseurs.

Traduction. Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum. N. C. Petr. *V, 1754-55, p. 75.*

(4952) 465^h. Observation sur les sommes des diviseurs.

Traduction. Observatio de summis divisorum. N. C. Petr. *V, 1754-55, p. 59.*

(4953) 462^h. Solution du problème de la recherche de trois nombres, dont tant la somme que le produit, ainsi que la somme du produit des deux sont des nombres carrés.

Traduit par B. F. Toussaint. Solutio problematis de investigatione trium numerorum, quorum tam summa quam productum, necnon summa productorum ex binis sint numeri quadrati. N. C. Petr. *VIII, 1760-61, p. 64.*

(4954) 469^h. Théorèmes relatifs aux restes obtenus de la division des puissances.

Traduction. Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta. N. C. Petr. *VII, 1758-59, p. 49.*

(4955) 461^h. Théorèmes d'arithmétique démontrés par une nouvelle méthode.

Traduit par B. F. Toussaint. Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata. N. C. Petr. *VIII, 1760-61, p. 74.*

(4956) 460^h. Supplément de quelques théorèmes d'arithmétique supposés dans quelques démonstrations.

Traduit par B. F. Toussaint: Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur. N. C. Petr. *VIII, 1760-61, p. 105.*

(4957) 486^h. De la résolution en nombres entiers des formules carrées indéterminées.

Traduit par Dworzecki. De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros. N. C. Petr. *IX, 1762-63, p. 3.*

(4958) 463^h. Des nombres premiers infiniment grands.

Traduit par Dworzecki. De numeris primis valde magnis. N. C. Petr. *IX, 1762-63, p. 99.*

(4959) 459^h. Méthode d'examen pour trouver si des nombres très élevés sont premiers ou non.

Traduit par B. F. Toussaint. De variis modis numeros praegrandes examinandi utrum sint primi, nec ne? N. A. Petr. *XIII, 1795-96, p. 14.*

(4960) 458^h. De la séparation des nombres en parties données tant en nombre qu'en espèces.

Traduit par B. F. Toussaint. De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas. N. C. Petr. *XIV, I, 1769, p. 168.*

(4961) 457^h. Mémoire sur la recherche de moyennes proportionnelles sans l'extraction des racines.

Traduit par P. C. Truffaut. De inventione quotcunque mediarum proportionalium citra radicum extractionem. N. C. Petr. *XIV, I, 1769, p. 188.*

(4962) 456^h. Solution d'un problème par lequel on demande deux nombres, dont tant la somme que la différence étant augmentées ou diminuées d'un même nombre, les résultats soient des carrés.

Traduit par B. F. Toussaint. Solutio problematis, quo duo quaeruntur numeri, quorum productum tam summa quam diffe-

rentia eorum sive auctum sive minutum fiat quadratum. N. C. Petr. *XV, 1770, p. 29.*

(4963) 454^h. De la formation des tables des nombres premiers jusqu'à un million et plus.

Traduit par B. F. Toussaint. De tabula numerorum primorum usque ad millionem et ultra continuanda, in qua simul omnium numerorum non primorum minimi divisores exprimantur. N. C. Petr. *XIX, 1774, p. 132.*

(4964) 503^h. Des propriétés mécaniques des triangles.

Traduit par T. Joly. De proprietatibus triangulorum mechanicis. A. Petr. *1779, II, p. 126.*

(4965) 478^h. De la formation des fractions continues.

Traduction. De formatione fractionum continuarum. A. Petr. *1779, I, p. 3.*

(4966) 477^h. Des trois nombres carrés dont tant la somme que la somme des produits des deux est carrée.

Traduction. De tribus numeris quadratis, quorum tam summa quam summa productorum ex binis sit quadratum. A. Petr. *III, I, 1779, p. 30.*

(4967) 452^h. Réflexions sur quelques propriétés remarquables des nombres.

Traduit par B. F. Toussaint. Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum. A. Petr. *1780, II, p. 18.*

(4968) 453^h. Les admirables propriétés des nombres pentagonaux.

Traduit par B. F. Toussaint. De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium. A. Petr. *1780, I, p. 56.*

(4969) 485^h. Des propriétés merveilleuses des coefficients qui se présentent dans le développement du binôme élevé à une puissance quelconque.

Traduit par B. F. Toussaint. De mirabilibus proprietatibus unciarum, quæ in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt. A. Petr. *V. I, 1781, p. 74.*

(4980) 511^h. Méthode facile pour calculer les sinus et les tangentes des angles, tant naturels qu'artificiels.

Traduit par B. F. Toussaint. Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales. C. Petr. *XI, 1739, p. 194.*

(5019) 515^h. Éléments de la doctrine des solides.

Traduction. Elementa doctrinae solidorum. N. C. Petr. *IV, 1752-53, p. 109.*

(5020) 500^h. Démonstration de quelques propriétés remarquables dont sont doués les solides.

Traduit par Truffaut. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. N. C. Petr. *IV, 1752-53, p. 140.*

(5205) 504^h. Principes de la trigonométrie sphérique, tirés de la méthode des plus grands et des plus petits.

Publié en français sous le même titre. Mém. de Berl. *IX, 1753, p. 223.*

(5206) 506^h. De la projection géographique de Delisle, employée dans une carte générale de l'Empire russe.

Traduction par T. Joly. De projectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata. A. Petr. *1777, I, p. 143.*

(5207) 507^h. De la projection géographique d'une surface sphérique.

Traduit par T. Joly. De projectione geographica superficiei sphaericae. A. Petr. *1777, I, p. 133.*

(5208) 508^h. De la représentation d'une surface sphérique sur un plan.

Traduit par T. Joly. De repraesentatione superficiei sphaericae super plano. A. Petr. *1777, I, p. 107.*

(5468) 492^h. Sur la vibration des cordes.

Publié en français sous le même titre. Mém. de Berl. *IV, 1748, p. 69.*

(5469) 496^h. Du mouvement vibratoire d'un fil flexible chargé d'un nombre quelconque de corpuscules.

Traduction. De motu vibratorio fili flexilis corpusculis quotcunque onusti. N. C. Petr. *IX, 1762-63, p. 215.*

(5469bis) 496^{h2}. Du mouvement vibratoire des cordes inégalement épaisses.

Traduction. De motu vibratorio chordarum inaequaliter crassarum. N. C. Petr. *IX, 1762-63, p. 246.*

Ce manuscrit omis dans le catalogue de Houzeau se trouve dans la même farde que le manuscrit précédent.

(5470) 497^h. Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie.

Publié en français sous le même titre. Mém. de Berl. *XXI, 1765, p. 307.*

(5479) 498^h. De la propagation du son.

Publié en français sous le même titre. Mém. de Berl. *XV, 1759, p. 185. Transcrit par Martin.*

(5480) 499^h. Fin du mémoire intitulé : Recherches physiques sur la propagation du son et de la lumière.

Traduction. Conjectura physica de propagatione soni et luminis. Op. var. Arg. *II, 1750, p. 1.*

La première partie de ce mémoire a été publiée au tome II des *Œuvres complètes* à la suite des *Lettres à une princesse d'Allemagne* (pp. 291-302). Les éditeurs disent à ce propos (p. 291) : « Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Berlin, en 1750 ». C'est inexact, car, d'après une lettre de C. G. J. Jacobi à P. H. Fuss, il a été lu devant l'Académie le 28 août 1749. Voir *Briefwechsel.* Bibl. Math. 3^e sér., t. 8, Leipzig, 1908, p. 262.

(5481) 495^h. Éclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son, et sur la formation de l'écho.

Publié en français sous le même titre. Mém. de Berl. *XXI, 1765, p. 335.*

(5822) 202^b. La science navale, ou l'art de construire les vaisseaux et de les diriger.

Traduction. Scientia navalis, seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Petropoli, 1749. En 2 vol., in-4^o.

Le manuscrit est relié en 3 volumes, in-4^o.

(5925) 489^h. De l'induction changée en certitude.

Traduit par B. F. Toussaint. De inductione ad plenam certitudinem evehenda. A. Petr. *1780, II, p. 38.*

APPENDICE

Table de concordance

Pour faciliter les recherches dans les manuscrits de l'Observatoire, nous donnons ici la concordance des cotes de l'*Index* du P. Hagen, avec celles du *Catalogue* imprimé de Houzeau mises entre parenthèses ci-dessus en tête des titres.

I = *Index* de Hagen. C = *Catalogue* de Houzeau.

I	C	I	C	I	C	I	C
5	4849	33	4963	154	4943	237	4908
8	4948	35	4967	158	4961	238	4909
9	4949	44	4959	176	4940	258	4895
10	4950	53	4941	179	4965	263	5208
11	4815	54	4831	191	4945	264	5207
12	4956	56	4953	194	4832	265	5206
13	4960	57	4957	196	4833	474	5469[1]
15	5925	59	4962	197	4834	521	4964
18	4939	60	4835	204	4894	594	5468
20	4944	68	4966	205	4891	597	5469[2]
23	4946	104	4855	206	4942	600	5470
24	4947	114	4980	207	5019	616	5480
25	4952	123	4968	208	5020	617	5479
26	4951	125	4969	209	5205	624	5481
27	4954	150	4856	212	4892	770	5822
28	4955	151	4893	235	4906	789	4905
29	4958	152	4854				

LA FULGURATION

DANS

LE TRAITEMENT DU CANCER

Étude basée sur quinze mois de pratique de cette méthode

par le Dr R. DESPLATS, de Lille

Le Bureau de notre section a pensé qu'une communication sur la fulguration ne serait pas déplacée après la magistrale conférence que nous venons d'entendre sur « le problème du cancer », et il a fait l'honneur à l'un des plus jeunes membres de votre Société de la lui demander.

Pour ne pas résister à ces aimables instances, doublées de l'autorité d'un Président auquel je n'ai guère le droit de désobéir, je vais, après la démonstration de ce matin, à laquelle quelques-uns d'entre vous ont assisté, vous exposer aussi simplement et aussi clairement que je le pourrai, en quoi consiste cette nouvelle méthode, quels sont les appareils qui servent à l'appliquer, et enfin quels effets on est en droit d'en attendre, d'après ce que l'on connaît actuellement.

J'ai eu la bonne fortune d'être mêlé de très près aux travaux de l'auteur de la méthode, dont j'ai été, je crois, le premier élève, et qui veut bien m'honorer de son amitié ; comme tel, je crois pouvoir vous faire connaître assez exactement les idées de M. de Keating-Hart sur la fulguration, et les principes directeurs qui l'ont guidé dès la période d'enfantement de la nouvelle méthode, à travers les phases successives de son perfectionnement.

Il ne sera pas inutile, je pense, pour se faire une idée exacte de la fulguration, telle qu'on doit la pratiquer aujourd'hui, d'en suivre les différentes étapes, d'en reconstituer l'histoire.

Notre confrère, électrothérapeute Marseillais, avait eu, comme beaucoup d'entre nous, le triste privilège de recueillir souvent chez lui les épaves de la chirurgie, de malheureux cancéreux inopérables, ou récidivés après plusieurs interventions chirurgicales qui venaient demander aux rayons X une illusion ou un soulagement à leurs douleurs. Quelques succès dans des sarcomes osseux, quelques affaissements momentanés, quelques guérisons de tumeurs de la peau, mais surtout un grand nombre de mécomptes, tel était le bilan de ses efforts désespérés, statistique lamentable, qui ressemblait d'ailleurs à celle de tous ses collègues.

Comme d'autres, et à la suite de Bergonié, Lacaille, Oudin, il avait eu l'occasion d'essayer contre les cancroïdes l'action de la courte étincelle de haute fréquence, et il en avait reconnu les bons effets. C'est de là que semble être née dans son esprit l'idée d'utiliser la propriété destructrice de l'étincelle, contre les cancers plus volumineux et plus profonds.

Mais au lieu d'employer une courte étincelle de quelques millimètres, il eut l'idée d'utiliser une longue et puissante étincelle de 8 à 10 centimètres ; au lieu d'une minute d'application, il en prolongea la durée jusqu'à 30 et 40 minutes, répétant parfois les séances à cinq ou six reprises différentes, jusqu'à ce qu'il se fût rendu maître de la tumeur en la détruisant complètement, proportionnant pour ainsi dire l'attaque à l'importance du mal.

Lui-même m'a rapporté cette période héroïque du début, où une malade atteinte de tumeur du sein, inopérable, énorme, dure, mamelonnée, avec deux ulcérations larges comme une pièce de cinq francs, des ganglions axillaires volumineux et durs, acceptait courageusement des étincelages répétés, pratiqués sans anesthésie à travers des tunnels creusés par les deux ulcérations dans la tumeur, et quelle joie pour la malade et pour lui-même quand les douleurs disparurent, quand la tumeur diminua progressivement de volume, quand l'état général s'améliora jusqu'à devenir excellent. Il ne resta bientôt plus qu'une masse relativement peu volumineuse et suintante, en voie de mortification, que K.-H. énucléa au bistouri par une fente transversale dans la glande, en même temps que quelques ganglions superficiels. La malade a pu vivre dans ces conditions, depuis avril 1906 jusqu'à décembre 1907, en excellent état de santé, tout en conservant dans la glande mammaire quelques nodules et quelques ganglions suspects dans l'aisselle.

C'est à cette époque que M. de Keating-Hart et M. Juge, son nouveau collaborateur chirurgical, extirpèrent ces vestiges, qui avaient un aspect fibreux et enserraient le paquet vasculo-nerveux de l'aisselle. — Au milieu de ce tissu fibreux, produit par l'étincelle, l'examen histologique a révélé des nodules de nature épithéliale, qui avaient pu être immobilisés par la fibrose.

Mais en vous racontant l'histoire suggestive de cette malade, j'ai déjà traversé toutes les phases de la fulguration, et ceux qui la connaissent peuvent lire entre les lignes de cette observation les enseignements qu'elle comporte.

Dans cette période, Keating-Hart traita par l'étincelle électrique, avec ou sans anesthésie chloroformique, 16 cancers graves, non toujours avec le même succès, avec des résultats assez satisfaisants cependant, eu égard à la nature et à la gravité du mal, pour l'encourager dans cette voie.

C'est l'époque où il comptait, pour ainsi dire exclusivement, sur l'étincelle, qui produit sur le tissu cancéreux deux actions, une action escharifiante plus ou moins profonde, qui n'est point la principale, et une action spéciale d'affaissement, d'aplatissement, de ramollissement intense de la tumeur, qu'il appelait à cette époque, la sidération. Mais il ne devait pas tarder à se rendre compte que l'étincelage, s'il provoquait en effet une véritable fonte de la tumeur, était suivi d'un travail d'élimination très long, qui se manifestait par une abondante exsudation de sérosité, d'où l'idée lui vint bientôt qu'il y aurait avantage à raccourcir ce travail d'élimination naturelle, ou du moins à le remplacer en partie par l'œuvre du bistouri, d'où : 1er temps, mortification de la tumeur par étincelage et, 2^{e} temps, extirpation de la tumeur sidérée par la curette ou le bistouri ; mais comme rien, à cette époque encore, ne devait être enlevé avant d'être modifié par l'étincelle, il fallait souvent plusieurs séances sous le chloroforme avant de se rendre maître du mal.

Jusqu'ici, vous le voyez, Messieurs, ce que K.-H. poursuit, c'est la désagrégation des tissus par cette foudre en miniature qu'est l'étincelle de haute fréquence, c'est l'abaissement de la vitalité des éléments néoplasiques, et je sais que beaucoup de médecins croient encore aujourd'hui que c'est là le mode d'action principal de l'étincelle de haute fréquence.

Quoi qu'il en soit de ce mode d'action, que nous n'envisagerons pas pour le moment, cette période de tâtonnements qui fait grand honneur à la ténacité scientifique de M. K.-H. et qui représente de sa part des efforts personnels que vous vous imaginerez facilement, quand vous saurez qu'il était un isolé, cette période, dis-je, a été une période vraiment utile, en ce qu'elle lui a permis de juger, sans conteste, l'action de l'étincelage livré à lui-même.

Mais une fois la preuve faite à ce point de vue, il n'avait plus de raison de se passer des ressources chirurgicales, et tout le gros œuvre de la nouvelle méthode devait désormais revenir à la chirurgie.

La méthode s'est donc modifiée, d'une façon sensible, par la combinaison intime de l'acte chirurgical et de l'acte électrique, qui s'entremêlent en s'alternant, et malgré son nom emprunté à l'un des agents qui la caractérisent, *c'est l'union intime du bistouri et de l'étincelle, qui constitue la fulguration*, union dans laquelle le bistouri joue le rôle éliminateur et l'étincelle un rôle thérapeutique.

Il paraît en effet, dès cette époque, en présence de quelques résultats acquis par une méthode très imparfaite, il paraît impossible d'admettre que c'est par une action purement destructrice que l'étincelle agit sur l'organisme cancéreux, car le bistouri aussi détruit et pourtant il ne guérit pas, et l'on en vient dès lors à une conception beaucoup plus satisfaisante de l'action de l'étincelle, qui n'agit pas seulement sur les tissus malades en les détruisant, mais aussi sur les tissus sains, en les incitant à la réaction. Cette réaction en effet paraît indéniable, car elle se manifeste, dès après l'étincelage, de deux façons : 1° par l'*hémostase durable* en des tissus très vasculaires due à la vaso-constriction des petits vaisseaux ; 2° par l'*exsudation* très abondante de sérosité, qui suit l'opération, exsudation telle que tous les objets de pansement en sont parfois imprégnés, et que, dans certains cas même, les objets de literie sont traversés. Cette exsudation contient en suspension, je l'ai maintes fois constaté, des polynucléaires, à un moment donné si abondants, qu'on est en droit d'en conclure que cette sérosité est de la lymphe presque pure.

Hémostase par fermeture des petits vaisseaux, sous l'action du choc de l'étincelle, et surtout lymphorrée consécutive à ce choc, voilà deux manifestations réactionnelles immédiates qui paraissent plus importantes que l'action destructrice elle-même.

En présence d'une tumeur donnée, quel sera donc actuellement le rôle du chirurgien, quel sera le rôle de l'électricien ? Si cette tumeur est une tumeur végétante de la peau ou des muqueuses facilement accessible, le premier temps peut être un temps électrique, que je considère pour ma part comme accessoire et qui consistera à faire jaillir sur la tumeur une pluie d'étincelles de haute fréquence longues de 7 à 8 centim., de façon à ramollir les végétations, qui, dures et résistantes sous la curette du chirurgien avant l'étincelage, deviennent molles et s'éliminent facilement, sous le raclage après l'intervention électrique. Après ce premier étincelage suivi de curage, on se trouve en présence d'une plaie, qu'il faut savoir explorer soigneusement avec le doigt, pour s'assurer qu'elle ne contient plus de débris macroscopiques apparents de cancer, cas auquel il faudrait de nouveau étinceler et gratter jusqu'à ce que la plaie ait un aspect absolument sain. A ce moment, un nouvel étincelage soigneux de toute la plaie opératoire, dont il faudra savoir régler la durée et l'intensité suivant l'étendue, suivant la localisation et le voisinage d'organes plus ou moins délicats, provoquera la réaction cherchée.

J'ai choisi le cas des végétations cancéreuses des surfaces de revêtement, parce que c'est dans ce cas qu'il est le plus facile de saisir l'avantage de l'étincelage préalable.

Il en est d'autres, où cet avantage n'est pas non plus négligeable, quand il s'agit de disséquer par exemple un fragment de tumeur adhérent à un organe important que l'on ne doit pas sacrifier ; quand on a extirpé par morcellement une tumeur dont il reste des débris visibles dans la profondeur, l'étincelage ramollira ces débris et facilitera leur raclage à la curette.

Il m'est impossible d'envisager ici tous les cas qui peuvent se rencontrer ; mais on peut établir en principe que *le minimum nécessaire de l'acte chirurgical, qui précède l'étincelage final, c'est* *l'ablation complète des lésions macroscopiques,* c'est-à-dire des masses, soit indurées, soit végétantes que l'œil et le doigt révèlent comme étant de nature néoplasique ; et pour arriver à pratiquer cette éxérèse aussi fidèlement que possible, le chirurgien pourra procéder par morcellement si cela est nécessaire, il pourra s'aider de l'étincelle qui ramollit et de la curette qui racle, bref de tous les moyens qui sont à sa disposition, pourvu qu'il ne reste plus de débris apparents de cancer. Quels que soient le mode et l'étendue de l'intervention sanglante, son complément nécessaire est l'acte électrothérapique final, auquel est réservé d'obtenir le but cherché qui, je vous l'ai déjà dit, est de détruire les vestiges histologiques du cancer et surtout de faire réagir les tissus de voisinage.

Si l'acte chirurgical qui précède l'étincelage a laissé des débris macroscopiques de la tumeur, l'étincelage ne suffira probablement pas à amener la cicatrisation définitive ; mais, d'autre part, si cet étincelage n'est pas fait dans les conditions requises, il peut n'être d'aucune utilité.

Il me reste donc à examiner, autant que faire se peut, *les conditions d'un bon étincelage.*

Ces conditions dépendent en partie de l'appareillage, sur lequel je n'insisterai pas ; il suffira à la plupart d'entre vous de savoir qu'en traversant des appareils puissants, appelés transformateurs, condensateurs et résonnateurs, un courant fourni par des accumulateurs ou par le circuit de la ville perd de son intensité pour acquérir une force électromotrice considérable (2 à 300 000 volts) et qu'on le recueille à l'extrémité supérieure du résonnateur sous forme d'effluves ou d'étincelles de haute fréquence. La longueur de ces étincelles peut se régler par l'écartement des tiges de l'éclateur d'une part et, d'autre part, par le déplacement d'un curseur qui fait varier le nombre des spires supérieures par rapport aux spires inférieures. A un point optimum, on obtient une étincelle maxima extrêmement violente qui produit sur les tissus des effets *mécaniques, électrolytiques et thermiques.* L'effet mécanique est d'autant plus important, le choc est d'autant plus violent, que la tension est plus forte, que l'étincelle est plus longue, et inversement l'effet calorifique est d'autant plus prononcé que l'étincelle est plus courte ; quant à l'effet électrolytique, il n'y a guère lieu de s'en préoccuper pour les étincelles de haute fréquence puisque le courant qui leur donne naissance est un courant alternatif.

Parmi tous ces effets, c'est surtout l'effet mécanique que la fulguration veut utiliser en supprimant dans la mesure du possible l'effet calorifique.

Du fait que les étincelles employées doivent être des étincelles longues, cet effet calorifique est déjà atténué ; il existe néanmoins, suffisamment intense pour échauffer l'électrode qui sert à manier l'étincelle et la colonne d'air qu'elle traverse ; l'eschare produite dans ces conditions serait une eschare sèche, cassante et adhérente, si l'on ne prenait soin de promener, par un mouvement tournant régulier, l'étincelle au-dessus de la plaie, et si l'on ne refroidissait pas continuellement cette plaie par le passage d'un courant d'air ou de gaz froid. Cette question fut difficile à résoudre, m'a dit K.-H., elle fut cependant résolue d'une manière élégante, sous forme d'une électrode à soufflerie, composée d'un mandrin métallique, entouré d'une chemise en ébonite, laquelle est reliée à une source d'air froid ou d'acide carbonique, et dans ces conditions l'étincelle promenée sur les tissus produit une eschare molle qui s'éliminera d'elle-même dans les jours qui suivent la fulguration.

Mais, même avec un bon appareillage, on peut faire de mauvaise besogne, car le rendement des appareils de haute fréquence est loin d'être toujours semblable, et d'autre part : *les tissus vivants réagissent chacun d'une façon différente sous une même étincelle ;* un même tissu se modifie plus ou moins profondément, suivant les variations survenues dans la qualité, la densité, le nombre de chocs électriques qui l'ont atteint, et comme le disait Keating-Hart dans sa récente communication à l'Association française pour l'étude du cancer, « *une fulguration très prolongée stupéfie* » *les tissus sains ou non, et loin de hâter la fermeture d'une plaie* » *la retarde, de sorte qu'une simple différence de temps peut faire* » *donner à cette thérapeutique tel effet ou son contraire* ».

Il m'est impossible de vous donner ici un critérium, *c'est sur l'apparence des tissus après l'étincelage qu'il faut se guider*, en l'absence de tout moyen de mesure, et ceci ne se résume pas en une formule. Rien ne remplace la pratique personnelle.

Peut-on être du moins assuré que la fulguration ne présente pas d'inconvénient ou de danger sérieux ?

Je l'ai dit au Congrès français pour l'avancement des sciences, en août 1908, après neuf mois de pratique de cette méthode et cinquante opérations portant sur des tumeurs diversement localisées ; je le répète aujourd'hui après quinze mois de pratique : « La fulguration est bien tolérée par tous les malades, quelle que soit la localisation de la tumeur » ; mais il me faut insister ici sur plusieurs points, que vous me reprocheriez de laisser dans l'ombre.

1° Le pneumogastrique touché par l'étincelle peut provoquer des troubles cardiaques graves, et K.-H. va jusqu'à dire : « Il vaut mieux le réséquer que le fulgurer ».

2° Sur le thorax privé de la couche musculaire qui le recouvre, la fulguration produit des variations importantes du rythme respiratoire, qu'il faut surveiller attentivement, prêt à arrêter au besoin momentanément la projection de l'étincelle.

Quant au schock opératoire, le danger de la fulguration à ce point de vue, me paraît bien illusoire, et son seul inconvénient est de prolonger quelque peu la durée de l'opération.

Reste un troisième point sur lequel je me permettrai d'insister un peu plus longuement, parce que de récentes discussions à la Société de chirurgie et ailleurs, ont pu faire naître des craintes très exagérées à ce point de vue : *Peut-on rapprocher les lèvres de la plaie après la fulguration ?* Sans hésitation je répondrai oui, à condition qu'on prenne toujours soin de pratiquer un large drainage.

Je crois avoir suffisamment insisté sur l'exsudation très abondante de liquide qui suit la fulguration ; or il est très important de ne pas laisser l'organisme résorber ce liquide qui provoquerait dans ces conditions des élévations de température, pouvant aller jusqu'à 40°. Il est vrai que l'abondance de cette exsudation varie suivant les individus, mais il faut toujours la prévoir abondante, sous peine de s'exposer à de graves mécomptes, et la seule façon d'éviter ces mécomptes, c'est de drainer largement. Permettez-moi d'étayer cette opinion sur des faits personnels, qui vous feront mieux comprendre l'importance de cette question du drainage.

Il m'est arrivé dernièrement de fulgurer, à huit jours d'intervalle, deux malades atteintes de squirrhe du sein ; chez toutes deux, on fit un rapprochement des lèvres de la plaie, et on draina largement ; mais la première coula si peu que je pus faire le premier pansement huit jours après, et enlever mes drains ; la seconde, au contraire, eut un écoulement très abondant qui s'éternisait à tel point, que l'on se demanda si les drains ne jouaient pas un rôle irritant et qu'on les raccourcit assez rapidement ; la température monta deux soirs de suite à 39°6 et force fut bien de remettre des drains plus longs. Il sera donc sage de ne raccourcir les drains, ou *a fortiori* de ne les supprimer, que lorsque l'écoulement aura considérablement diminué. — A cette condition, le malade ne s'intoxiquera pas et la cicatrisation s'opérera normalement ; à cette condition aussi, on peut dire que *la fulguration n'ajoute aucun danger nouveau à l'intervention chirurgicale.*

Dès lors, deux autres questions se posent : 1° La fulguration permet-elle d'aborder avec chance de succès des cancers considérés comme inopérables, et dans quelle mesure le permet-elle?

2° Donne-t-elle au malade des chances de non récidive, ou du moins prolonge-t-elle la durée de la guérison apparente ?

Pour résoudre ces deux questions, il faut à mon avis examiner deux séries d'observations différentes : la première sera celle des cancers inopérables ou opérés dans des conditions notoirement insuffisantes au point de vue chirurgical, la seconde celle des malades opérables chez lesquels on a pratiqué la fulguration. C'est vous dire que la *première de ces deux questions est seule soluble dès aujourd'hui,* et pour y répondre j'avais apporté dans une communication au Congrès de l'A. F. A. S. à Clermont 18 cas, les plus graves à coup sûr parmi ceux qui m'étaient passés par les mains, à ce moment, puisque j'y faisais entrer, d'une part systématiquement tous les insuccès, et d'autre part tous les cas considérés à bon droit comme inopérables, les laissés pour compte de la chirurgie.

Dans ces conditions j'obtenais sept insuccès francs, malgré la fulguration, et onze succès, qui paraissent bien, par conséquent, devoir être attribuables à la méthode. Il m'a paru qu'il serait intéressant de passer en revue devant vous les onze malades qui paraissaient guéris le 1er août dernier, et de vous dire ce qu'ils sont devenus depuis cette époque. Ce sera la meilleure façon de vous rendre compte de ce que l'on peut obtenir.

Observation I (N° VIII de mon mémoire).— Epithélioma térébrant de l'orbite ayant détruit complètement la paupière inférieure, tous les muscles de l'œil,

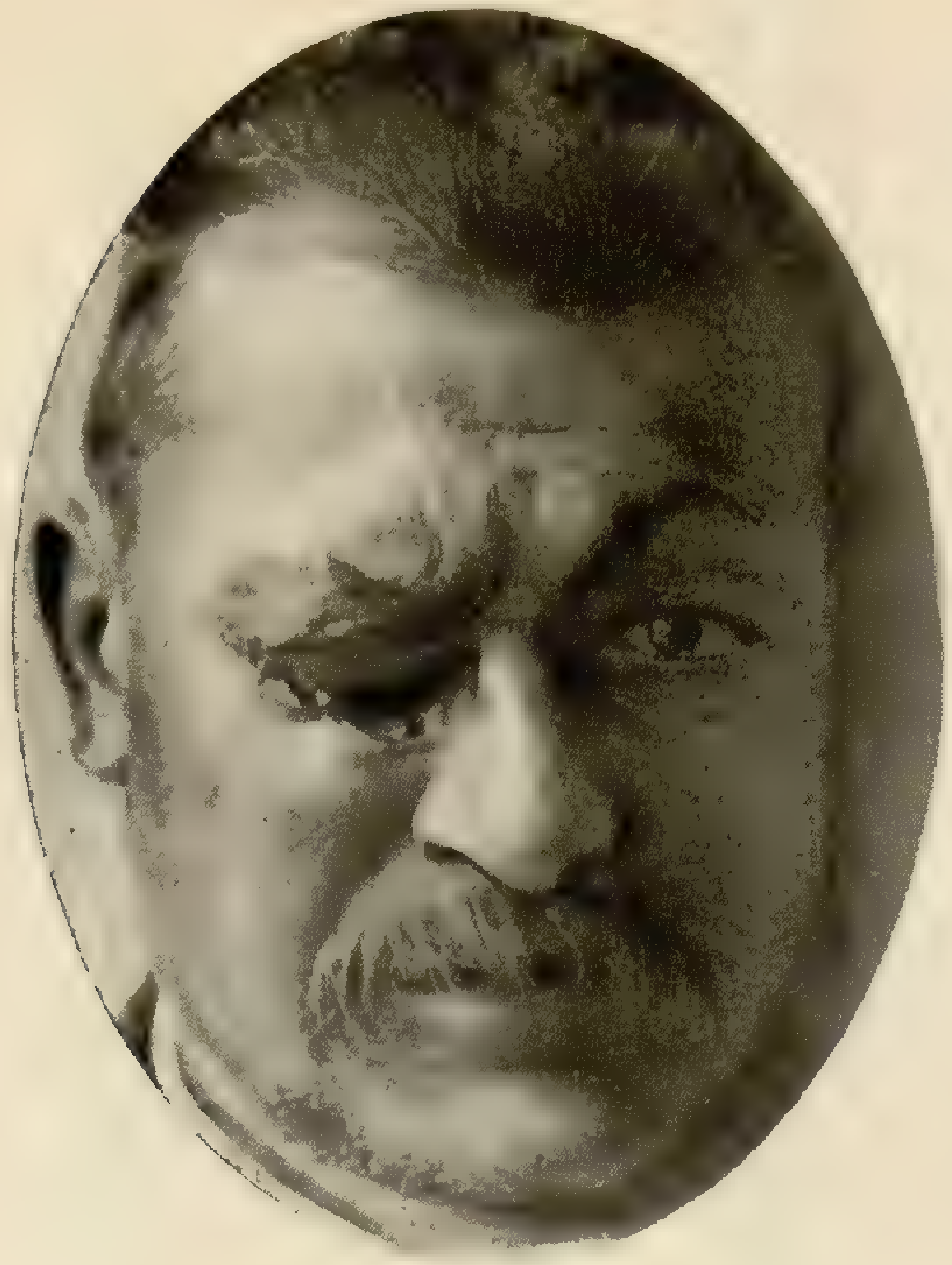


Fig. 1.
Malade de l'observation I avant l'intervention.

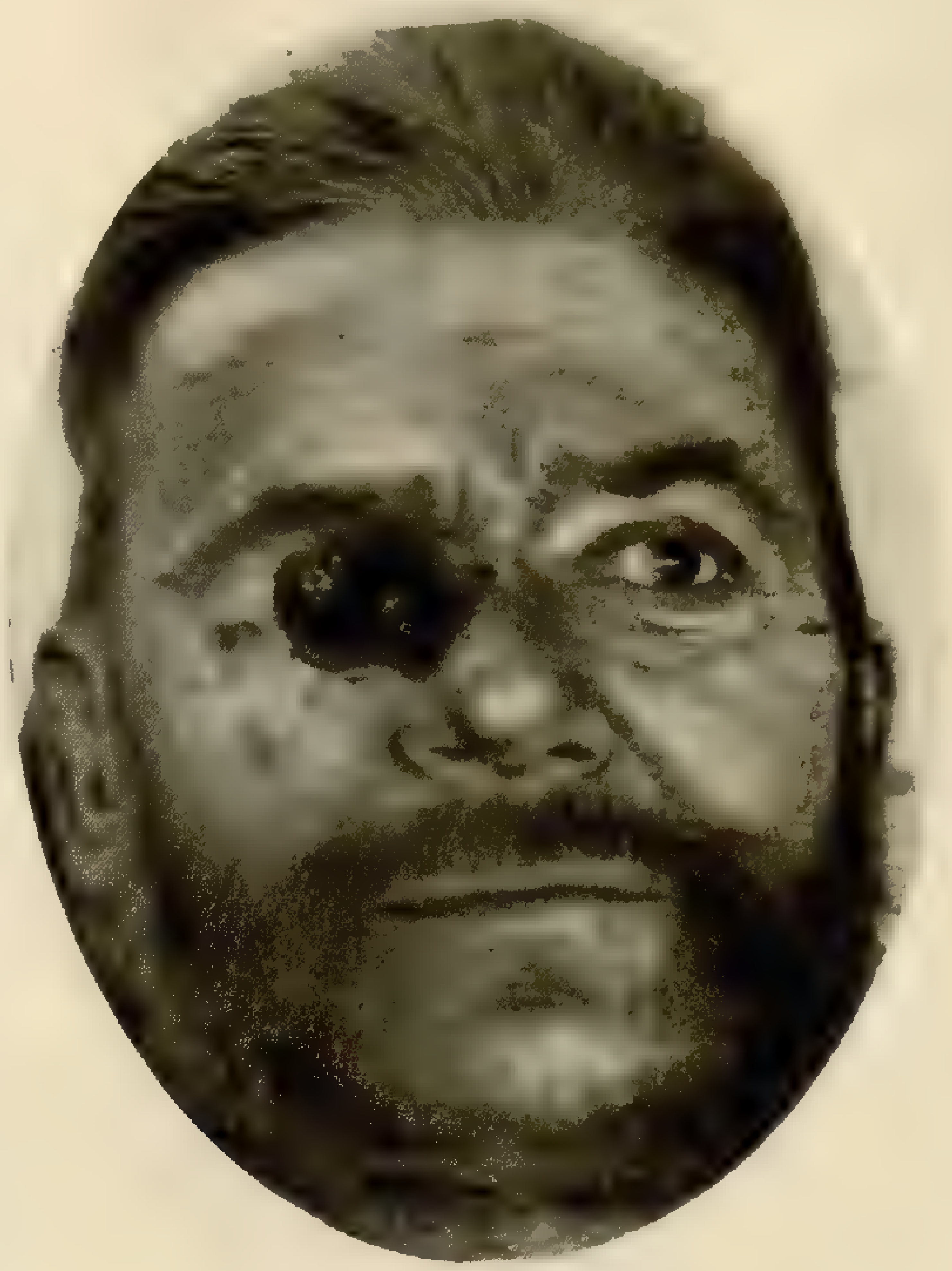


Fig. 2.
Même malade 6 semaines après l'intervention.

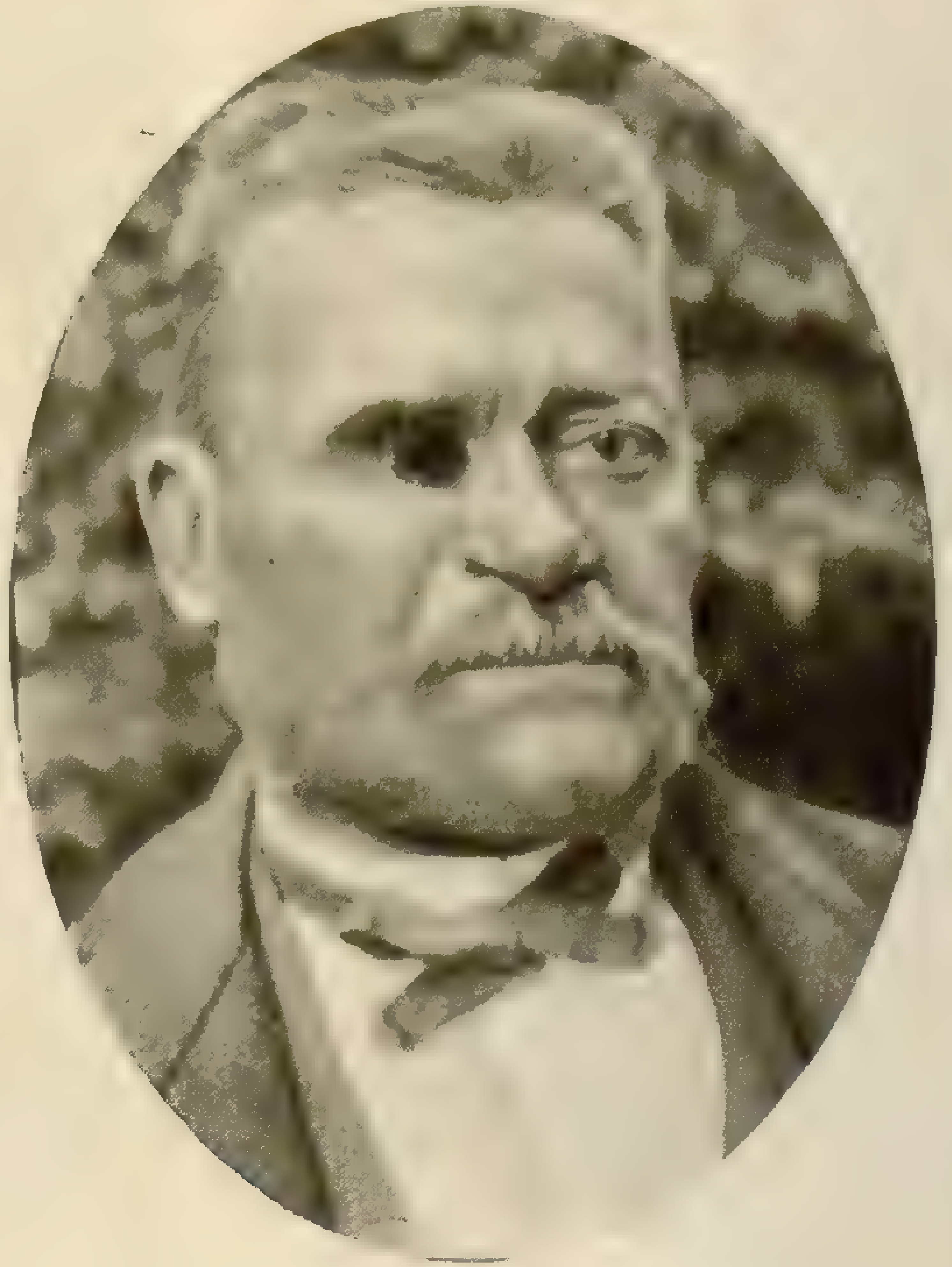


Fig. 3.
Même malade 3 mois après l'intervention.

une partie de la paroi de l'orbite. Le globe oculaire réduit à l'état de moignon était adhérent à la paupière supérieure.

L'opération, qui a eu lieu le 22 novembre 1907, a consisté à vider l'orbite du tissu cancéreux, qui le remplissait jusque dans l'épaisseur du tissu graisseux. Comme la paroi osseuse interne de l'orbite était en partie détruite tout autour du canal nasal, qui lui-même était envahi par le tissu cancéreux, jusque dans la fosse nasale correspondante, on fit pénétrer la curette dans ce trajet et, à plusieurs reprises, on étincela toute la plaie opératoire, pour éliminer à la curette les débris mortifiés.

Résultat : Le malade s'est parfaitement cicatrisé et je vous montre les photographies avant l'opération, un mois après et enfin après guérison complète.

Depuis deux mois environ, ce malade présente sur la partie inférieure de sa cicatrice une petite ulcération, qui me paraît d'ailleurs se cicatriser spontanément, de sorte que je ne suis pas fondé à croire, jusqu'à plus ample informé, qu'il s'agisse d'une petite récidive locale.

Observation II (N° IX). — Sarcome à myéloplaxes du maxillaire supérieur, ayant nécessité la résection du maxillaire ; six mois après l'intervention, ce sarcome récidive sur le rebord alvéolaire du maxillaire inférieur du même côté, sous forme de bourgeons gros comme le petit doigt. Après échec de la radiothérapie, le chirurgien, M. le Professeur Delassus, déclarait la résection du maxillaire inférieur nécessaire et c'est sur mes instances qu'on se contenta de faire une résection du rebord alvéolaire. L'opération eut lieu le 13 décembre, et j'entends encore le chirurgien déclarer que ce n'était pas un acte chirurgical. La malade reste cependant guérie après treize mois, et je l'ai présentée il y a huit jours à la Ligue contre le cancer.

Observation III (N° X). — Branchiome très volumineux de la parotide, ulcéré, suintant, du volume de deux poings. Absolument inopérable. Tuméfaction arrondie, lisse, dure, qui s'étend en hauteur du conduit auditif externe à une ligne passant par le cartilage cricoïde, qui va en avant jusqu'au bord antérieur du masséter, en arrière jusqu'aux muscles de la nuque. Les diamètres vertical et antéropostérieur sont l'un et l'autre de treize centimètres. Cette personne qui a séjourné dans différents services chirurgicaux de Lille et de Paris, en dernier lieu dans le service de M. le Professeur agrégé Wather, a été considérée par tous comme inopérable.

M. le Professeur Duret a consenti à l'opérer à cause de son bon état général, et l'opération, très laborieuse, a consisté à enlever la tumeur par morcellement ; lui-même a rapporté ce cas au dernier Congrès de chirurgie. Après l'opération, il restait une large surface que je fulgurai pendant un quart d'heure. On sutura ensuite les incisions libératrices et on laissa ouverte la loge parotidienne. Rapidement il se produisit un bourgeonnement de bonne nature, au milieu duquel je distinguai cependant quelques bourgeons blanchâtres qui paraissaient de mauvaise nature. Ces bourgeons furent fulgurés puis curés, et de nouveau je fulgurai la surface. La cicatrisation complète se produisit dans l'espace de un mois et demi. J'ai pu également présenter à la Ligue contre le cancer, le 18 janvier, cette malade présentée déjà au Congrès de chirurgie ; elle est complètement guérie un an après l'opération, et son état général est parfait.

Je passerai plus rapidement sur les autres observations de mon mémoire d'août 1908.

Observation III (N° XI). — Récidive de cancer du rectum, tumeur du volume d'une orange sur la paroi antérieure, éxérèse et fulguration. La malade reste guérie depuis un an.

Observation V (N° XII). — Myxosarcome des parties molles de la cuisse, du volume de deux poings, opéré pour la première fois en mars 1907 par M. le Professeur Delassus ; six mois après, cette tumeur qui avait été reconnue à l'examen histologique pour un myxosarcome, récidivait sur place après échec des rayons X, alors que la masse avait acquis le volume de trois poings et qu'il ne pouvait plus être question que de désarticulation. Je proposai à M. le Professeur Delassus de tenter une opération conservatrice avec fulguration, ce qui fut fait. Après excision de cette tumeur, avec le vaste interne qui la recouvrait, je fulgurai pendant une demi-heure, puis on draina largement. Dans ce cas, la lymphorrée fut si abondante qu'il fallut faire sauter quelques crins quand on vit la température vespérale monter jusqu'à 39°,5. La malade, qui fut opérée au début de février 1908, resta en parfait état jusqu'au début de décembre, époque à laquelle je trouvai une masse suspecte, peu volumineuse, sous la cicatrice.

D'accord avec M. le Professeur Delassus, nous avons opéré cette malade le 17 décembre dernier, et avons trouvé deux masses lobulées, grosses chacune comme un œuf de poule, entourées de quelques masses plus petites grosses comme des grains de raisin.

Il y a donc eu récidive dans ce cas, mais si l'on compare cette seconde récidive à la première, et si l'on se souvient qu'il n'était question de rien moins, un an plus tôt, que de pratiquer la désarticulation de la hanche, on peut défendre avec quelque apparence de raison, cette opinion, qu'ici encore la fulguration a rendu un signalé service.

Observation VI (N° XIII). — Cancer de la partie postérosupérieure de la cuisse, largement ulcéré, suintant un liquide roussâtre, adhérent aux muscles de la région postérieure de la cuisse. Exérèse dépassant de un centimètre le pourtour de la tumeur. La plaie opératoire qu'on est obligé de laisser, est large comme la main. L'opération eut lieu le 7 avril ; depuis lors, pas de récidive, la cicatrisation reste parfaite.

Observation VII (N° XIV). — Troisième récidive de cancer du sein, dans l'espace de un an, en des points d'ailleurs éloignés du foyer primitif. La dernière récidive eut lieu au niveau du creux de l'aisselle, derrière le biceps, au voisinage du paquet vasculonerveux. — Opération et fulguration le 20 février 1908. — Récidive, au mois d'octobre 1908, au niveau du creux de l'aisselle : elle nécessita une cinquième intervention.

Observation VIII (N° XV). — Cancer du col de l'utérus opéré en mai 1907 (Hystérectomie abdominale totale). Récidive, neuf mois après, sous forme de végétations sur le dôme vaginal. Fulguration et grattage le 5 février 1908. Reste guérie depuis cette époque.

Observation IX (N° XVI). — Cancer végétant de la paroi postérieure du rectum, extirpé au thermocantère, puis fulguré le 31 mars 1908. Le malade présente, paraît-il, depuis quelques semaines, un écoulement roussâtre par l'anus, qui me fait craindre une récidive. Je ne puis d'ailleurs pas obtenir qu'il revienne se faire examiner.

Observation X (N° XVII). — Végétations sarcomateuses de la muqueuse nasale. Grattage et fulguration le 23 avril 1908. Le malade a récidivé fin septembre, et l'on n'a pas pu le décider à se faire retoucher.

Observation XI (N° XVIII). — Je vous renvoie, pour l'analyse de ce cas, à mon mémoire, et me contente de vous rappeler qu'il s'agissait d'un épithélioma de l'orbite absolument inopérable, qui fut traité par tous les modes thérapeutiques possibles, y compris le sérum de Doyen, dont il reçut 120 injections.

Je vous présente sa photographie le 27 février, époque à laquelle il vint me trouver, et j'ajoute que depuis cette intervention le malade dont je vous présente une seconde photographie prise au mois de juillet, n'a présenté qu'une petite récidive locale sur le bord externe de l'orbite, dont vous voyez le début sur la photographie. Contre cette petite récidive, je me suis contenté de faire un grattage à la curette, suivi de fulguration. Mon malade continue d'aller bien, mais l'épidermisation est extrêmement lente. Malgré cela, malgré la petite récidive dont je viens de vous parler, je considère ce cas, comme particulièrement démonstratif en faveur de cet aphorisme, que « la fulguration étend le domaine de la chirurgie » car il ne fallait point ici songer à une opération, et d'autre part tous les efforts thérapeutiques tentés par des médecins distingués entre les mains desquels il s'est confié, avaient été tout à fait inutiles.

Donc, sur onze malades inopérables et qui tous me paraissaient avoir bénéficié de la fulguration, sept restent guéris après une période de neuf à treize mois, consécutive à l'opération, quatre ont récidivé, parmi lesquels deux ont pu être opérés dans des conditions plus favorables que précédemment, deux autres refusent même de se laisser examiner ; il est d'ailleurs probable, d'après ce que j'en sais, qu'ils pourraient encore bénéficier de la fulguration.

Je veux, pour terminer cette série, vous citer deux cas plus récents, opérés par M. le Professeur Duret et fulgurés.

Observation XII. — Le premier de ces cas a trait à une malade de 54 ans, atteinte d'une affection du maxillaire inférieur, qu'elle portait depuis huit ans, et qui, traitée par de nombreux chirurgiens et médecins de Toulouse, de Bordeaux, de Paris, de Berck, etc., fut tour à tour étiquetée tumeur kystique de la parotide, sarcome du maxillaire, actinomycose, tuberculose osseuse et opérée, puis radiothérapisée, traitée par l'iodure de potassium, par les injections modificatrices sans résultat. Au moment où elle vint nous trouver, la tumeur occupait la branche horizontale gauche du maxillaire inférieur, la branche montante ; l'os était plus que doublé de volume et les tissus environnants étaient indurés ; toutes les dents avaient été arrachées ou étaient tombées spontanément et la gencive était largement ulcérée et végétante tandis que la joue était tuméfiée et ulcérée sur trois points différents.

Au cours de l'opération, qui consista à réséquer le maxillaire inférieur gauche dans sa totalité, nous pûmes nous rendre compte que la tumeur avait envahi jusqu'à la fosse condylienne, et avait ulcéré le pilier antérieur gauche qu'il fallut enlever.

Bien entendu, on fut obligé de faire de grands sacrifices de peau, si bien qu'après l'opération faite, la perte de substance énorme ne pouvait guère être comblée. Cette malade est donc horriblement mutilée, mais il est intéressant de constater que six mois après cette intervention nous n'avons pas observé de récidive.

Le second cas n'a pas besoin de longue description et il me suffira de vous présenter tout à l'heure la photographie de la malade avant le traitement pour que vous vous rendiez compte de ce qu'était cet énorme épithélioma anovulvaire, inopérable incontestablement par les moyens ordinaires, et qui s'est pourtant cicatrisé après fulguration.

Il me paraît indéniable que les treize malades dont je viens de vous rapporter brièvement les observations, y compris les quatre qui ont récidivé six ou sept mois après la fulguration, ont réellement bénéficié de cette méthode, car on a obtenu chez eux une cicatrisation qu'on n'était guère en droit d'attendre avec les moyens chirurgicaux ordinaires. — Ces succès et même ces demi-succès, sont probants dans des cancers inopérables.

C'est le domaine qui paraît acquis à la fulguration ; mais il ne peut lui rester acquis qu'à une condition, et je m'excuse d'insister sur ce point, c'est que la méthode soit comprise comme elle doit l'être, et que l'étincelle n'empiète pas sur le rôle du bistouri. Il ne faut pas, sous prétexte de faire une chirurgie esthétique, laisser des tissus suspects, en comptant sur l'étincelle pour les détruire ; il n'est même pas souvent opportun, à mon avis, de faire la chirurgie la plus étroite possible, sous prétexte de mieux juger le rôle de l'étincelle. Notre devoir est, dans tous les cas, de donner au malade les plus grandes chances de guérison ; et l'expérience a bien appris, d'ailleurs, qu'une chirurgie, même large, est inutile dans les cas de cet ordre ; c'est la raison pour laquelle ils sont dits inopérables.

Je vous ai dit qu'il me paraissait impossible de répondre, dès maintenant, à la seconde question : La fulguration donne-t-elle au malade des chances de non récidive ou prolonge-t-elle la durée de la guérison apparente dans les cas opérables ?

C'est cette question qu'il sera le plus intéressant de résoudre dans l'avenir. Dans ce but, je collectionne un grand nombre d'observations, qui n'auront leur valeur que dans quelques années.

A cette pratique de la fulguration dans les cancers opérables, les chirurgiens font plusieurs objections, dont la principale est qu'une plaie fulgurée met plus de temps à se cicatriser qu'une plaie chirurgicale ordinaire, et que l'abondance de l'exsudation est une cause d'ennuis pour les malades comme pour eux-mêmes. Je vous citerai ici un passage du récent rapport de Keating-Hart à l'Association française pour l'étude du cancer, que je fais complètement mien : « La chirurgie offre-t-elle dans ses meilleurs cas de telles certitudes de guérison définitive, que l'on doive faire courir à un malade, pour lui épargner quelques jours d'impotence supplémentaire, un seul danger de récidive ? Ceux que les résultats obtenus par la fulguration n'ont pas convaincus, pourront répondre par l'affirmative. S'il s'agissait de moi ou de l'un des miens, je n'hésiterais pas à doubler les garanties apportées par l'exérèse, de l'espoir que me paraît donner la fulguration ».

Cette fulguration dans les cancers opérables ne sera d'ailleurs, dans la plupart des cas, qu'un complément de l'opération chirurgicale large, telle qu'on la pratique aujourd'hui ; dans d'autres cas, elle pourra indiquer au chirurgien de se montrer plus économe ; c'est ainsi qu'on pourra renoncer aux vastes exérèses qui ont été faites dans ces derniers temps pour les cancers du sein, et qui sont l'occasion de véritables infirmités.

Je n'insiste pas, me contentant d'avoir signalé à votre attention un chapitre nouveau dans l'étude de la fulguration, qui me paraît des plus intéressants et des plus importants.

Je n'ai point essayé, Messieurs, de vous démontrer que la fulguration guérit le cancer, j'ai voulu seulement vous apporter quelques éclaircissements sur la technique de cette méthode, et quelques documents de nature à vous permettre de la juger.

Il me suffira de vous dire, en terminant, que des recherches sont poursuivies de divers côtés sur le mode d'action de la fulguration. Parmi les travaux déjà parus sur ce sujet, je vous citerai ceux de De Nobele et Tytgat (*), vos compatriotes, de Bergonié et

---

(*) Archives d'Électricité Médicale, 10 novembre 1908.

Tribondeau (*), de Mauté (**). Ce dernier auteur reconnaît à l'étincelle « une action très intense sur le tissu conjonctif et c'est à cette action qu'il attribue les résultats obtenus. — Au bout de quinze jours, dit-il, la partie superficielle de la tumeur est constituée sur une couche d'environ 1 millimètre, par du tissu fibreux adulte très hypertrophié, par rapport à celui des couches profondes, qui n'ont pas été atteintes par l'étincelle. Au milieu de ce tissu fibreux, les cellules néoplasiques sont comme étouffées et en voie d'atrophie ».

Je vous rapporte, Messieurs, ces constatations, parce qu'elles me paraissent bien en harmonie avec ce que la clinique nous avait appris depuis longtemps, à savoir que la réaction des tissus sains avait plus d'importance, peut-être, que la destruction des éléments cancéreux, et n'est-il pas plus satisfaisant d'ailleurs d'admettre un processus de défense locale de l'organisme contre le cancer par sclérose, plutôt qu'une simple destruction mécanique dont on s'expliquerait peu la vertu curatrice, alors que le couteau ne peut plus rien ?

Je m'arrête, Messieurs, ne vous ayant pas tout dit, ne vous ayant point parlé en particulier des résultats obtenus par Keating-Hart et par d'autres expérimentateurs, mais je ne veux pas abuser davantage de votre patience et je suis obligé de me borner. Je vais d'ailleurs vous montrer quelques projections photographiques qui répareront quelques lacunes de ma conférence, et je conclurai avec Keating-Hart : « Les seuls et déjà assez nombreux succès, que compte la fulguration, ont été publiés par lui-même ou par ses élèves qui pratiquent sa méthode comme lui ». La plupart des insuccès notoires paraissent dus à des variantes de la fulguration, qui en sont de véritables transformations.

Et si l'on veut juger la méthode de Keating-Hart qu'il a dénommée fulguration, il faut, en bonne justice, ne pas déroger aux règles qu'il a établies et que j'ai cherché à vous faire connaître.

(*) Comptes Rendus de la Société de Biologie, 27 novembre 1908.

(**) Congrès international de Chirurgie, 7 septembre 1908.

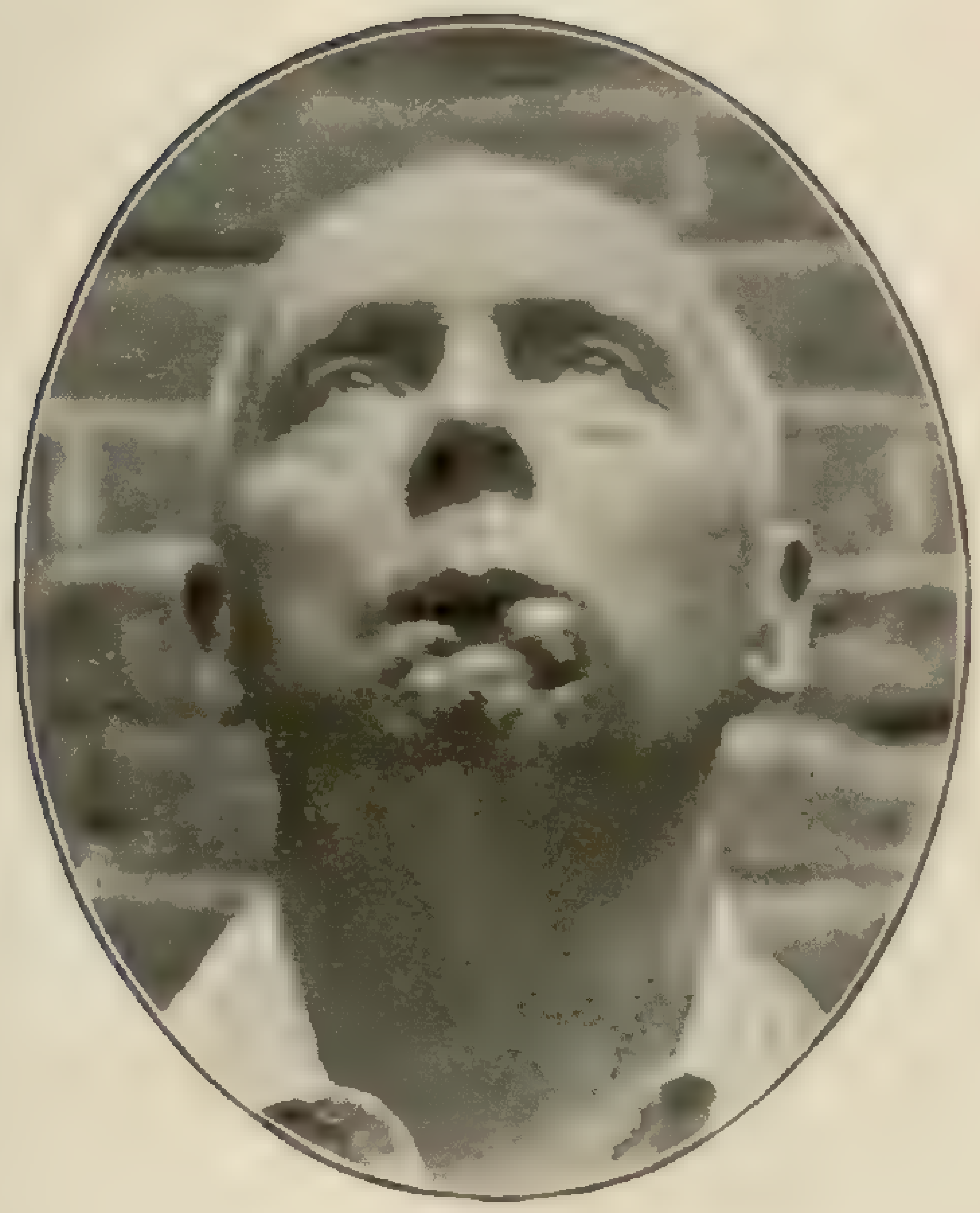


Fig. 4.

Malade atteint d'épithélioma de la lèvre inférieure étendu d'une commissure à l'autre et jusqu'au menton adhérent au maxillaire.

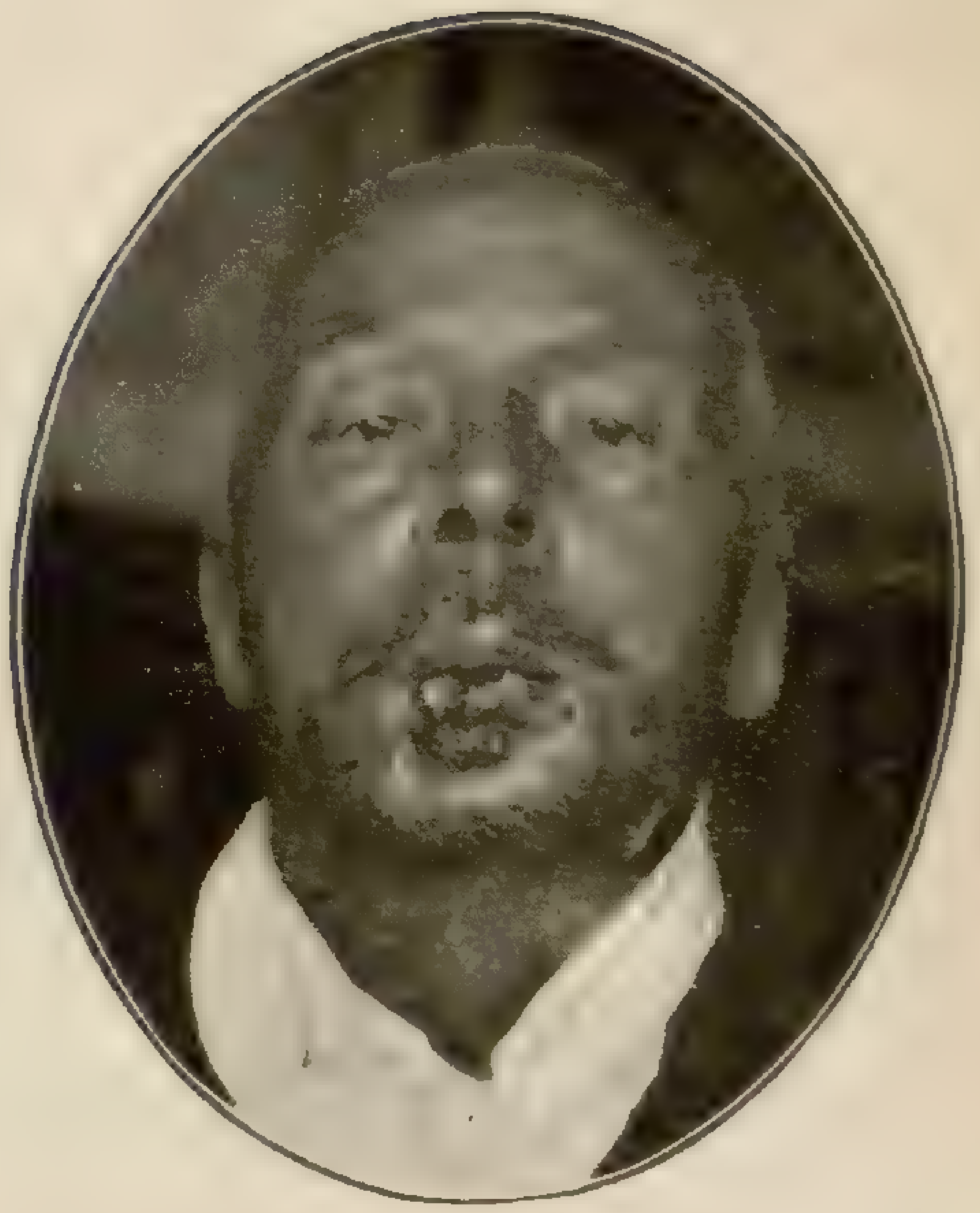


Fig. 5.

Même malade 3 semaines après une intervention, suivie de fulguration, qui a consisté à enlever la tumeur au plus près et à ruginer le maxillaire.

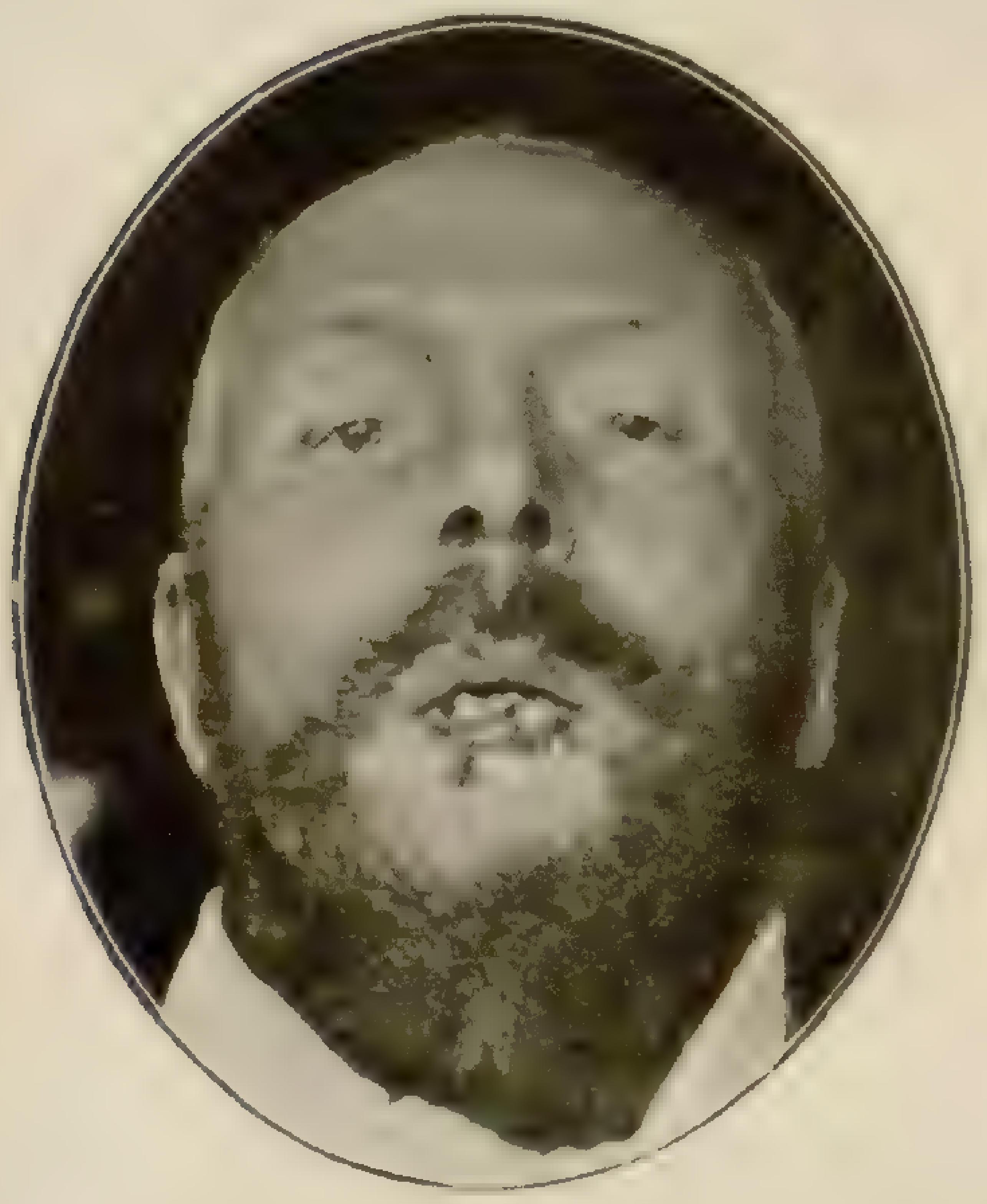


Fig. 6.

Même malade 7 semaines après l'intervention ; la cicatrisation est déjà presque complète.

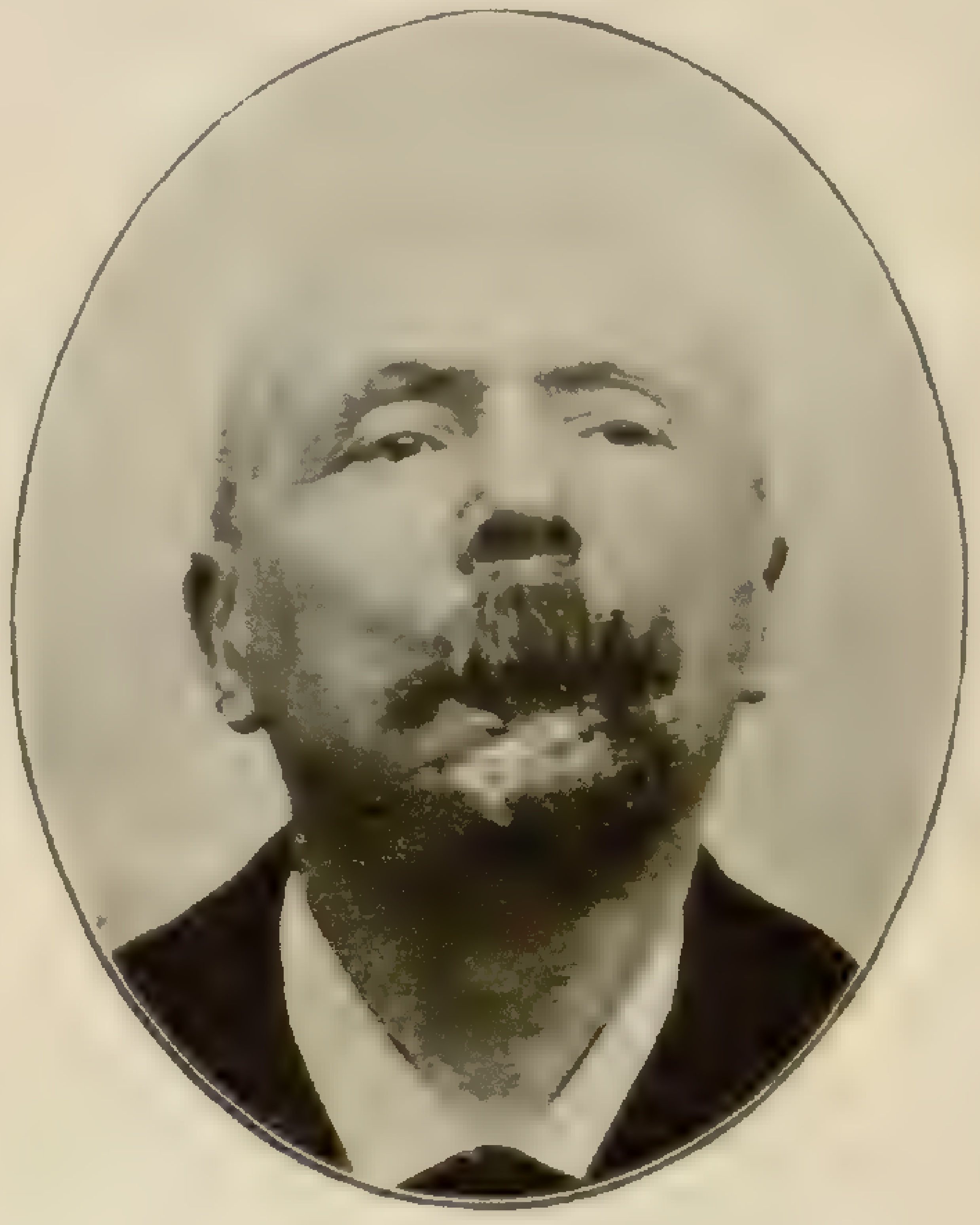


Fig. 7.

Même malade, complètement cicatrisé, bel exemple de cicatrisation obtenue malgré une opération qui semblait illusoire, et qui était la seule possible sans risque sérieux.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXII, 1875 à 1908. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages. fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Ed. Vandersmissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905) . . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : T. I. Introduction, Ed. Van der Smissen. — I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. — II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. — III. Barry, H. Laporte. — IV. Beira, Ch. Morisseaux. — V. Liverpool, P. de Rousiers. — VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. — VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. Prix : 4 francs. — T. II. — VIII. Londres, G. Eeckhout. — IX. Délos, A. Roersch. — X. Rotterdam, J. Charles. — XI. Gènes au Moyen âge, J. Hanquet. — XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. — T. III. — XIII. Le Port moderne de Gènes, M. Theunissen. — XIV. Ostende. L.-Th. Leger. — XV. Jaffa, P. Gendebien. — XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. — XVII. Le Havre, G. Blondel. — XVIII, Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. — XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. — XX. Han-Kow. A. Vanderstichel. Prix : 3 francs. — T. IV. — Sous presse.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le Dr X. Francotte. Brochure in-8 de 48 pages (1907). . . . . fr. **1 00**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le Dr Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) . . . . fr. **1 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901) ; la livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série**.

Elle paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Outre ces trois parties, chaque livraison contient ordinairement un ou plusieurs articles de **Variétés**.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la Revue des Questions scientifiques est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** % ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la Revue. Un vol. du format de la Revue de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. & R. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

L'HYDROLYSE CITRIQUE DU MALTOSE

par M. J. PIERAERTS
Professeur à l'Université de Louvain

L'hydrolyse du maltose, par les acides, a été peu étudiée. Les indications bibliographiques ayant trait à ce sujet sont, à notre connaissance du moins, relativement restreintes. Aucune de celles que nous avons consultées, ne démontre explicitement que l'hydrolyse *complète* du sucre de malt, c'est-à-dire, sa transformation *totale* en dextrose, a pu être réalisée.

Passons rapidement en revue les travaux auxquels nous faisons allusion : 1° Dans son mémoire intitulé *Étude du pouvoir réducteur de quelques sucres.* Nouvelle méthode de dosage pondéral de ces composés », Chapelle dit que le maltobiose est difficile à hydrolyser, mais ne l'est pas plus que le lactose. Le procédé employé par l'auteur cité, consiste à chauffer, pendant deux heures, à 110°, soit à l'autoclave, soit en tube scellé, 100 *cc.* de solution sucrée à 1 %, additionnés de vingt gouttes d'acide chlorhydrique. L'acidité de la solution équivaut donc, à peu près, à celle de l'acide décinormal.

Chapelle ne relate aucune expérience montrant à quel taux de transformation l'inversion s'arrête. Celle-ci est-elle complète ? S'accompagne-t-elle ou est-elle précédée de la destruction partielle du maltose ? Pas un mot, quant à ce point, qui était capital cependant, vu qu'il s'agissait, en l'occurrence, de recherches ayant pour but l'évaluation quantitative du maltose. Il y a lieu toutefois de remarquer qu'à propos du lactose, Chapelle s'exprime en ces termes : « Si la teneur en lactose est de 1 %, la proportion de ce sucre, qui est hydrolysé, est d'environ 80 % au bout d'une heure et 90 % au bout d'une heure et demie. » Cette indication nous paraît insuffisante, car elle ne nous rend guère compte de la marche de l'hydrolyse du sucre de malt, au cours du processus préconisé.

2° A la page 639 de l'ouvrage classique de Maquenne (¹) nous lisons : Le maltose se change, *à peu près intégralement*, en d.glucose, quand on le fait bouillir avec un acide minéral étendu ; sa vitesse d'hydrolyse est environ cinq fois plus faible que celle du saccharose (Meissl. Journal für praktische Chemie, II, 25, p. 114). Nous empruntons à la troisième édition du traité, universellement connu, *Die Chemie der Zuckerarten* de von Lippmann, les citations suivantes :

a) Le maltose subit l'hydrolyse sous l'influence prolongée des acides minéraux dilués et bouillants : cette inversion est beaucoup plus difficile que celle du saccharose, mais, en revanche, elle est plus aisée que celle du sucre de lait (²).

b) Si l'on observe les prescriptions de Nicol, on provoque l'hydrolyse du maltose en déans les trente minutes (³).

c) Si l'on fait bouillir au bain-marie, pendant trois heures, un gramme de maltose, 100 cc. d'eau, et 5 cc. d'acide chlorhydrique fumant ou d'acide sulfurique à 3 %, on obtient, en glucose, les 98,6 % du rendement théorique (⁴).

d) D'après Ost, la proportion intervertie atteint les 98 ou les 98,4 centièmes du rendement théorique si l'on chauffe pendant cinq heures, au bain-marie bouillant, un mélange d'un gramme de sucre de malt et de 100 cc. d'acide chlorhydrique à 1 ou 2 %. *(Chemiker Zeitung*, tome XIX, page 1502).

e) Selon Brown et Héron (⁵), on ne constate pas de changement, après cinquante-trois heures, quand on abandonne, au bain-marie entre 70° et 90°, une solution de maltose à 5 % et d'acide sulfurique à 1 %. Cette assertion est confirmée par Herzfeld (⁶).

(¹) L. Maquenne, *Les sucres et leurs principaux dérivés.* Paris, 1900.

(²) Meissl, Journal für praktische Chemie, II, 25, p. 114.

(³) Kjeldahl, *Neue Zeitschrift für Rübenzuckerindustrie.* 37, p. 26.

(⁴) Meissl, *Frésénius Zeitschrift für analytische Chemie*,

(⁵) Brown et Héron, Liebigs Annalen der Chemie, 119, p. 201.

(⁶) Herzfeld, Ibidem.

f) Bourquelot (¹) dit qu'on arrive au même résultat que le précédent, par l'emploi d'une solution de maltose de 0,5 à 1 °/₀ et de 0,2 °/₀ de HCl, portée à 38° durant trente-six heures.

g) Bourquelot (²) a constaté, en outre, que 0,2 °/₀ de HCl ou 1 °/₀ de $C_2H_2O_4$, agissant à 100° et à 110°, provoquent l'hydrolyse du maltose et donnent même lieu, dans ces conditions, à une destruction partielle du sucre.

h) Une quantité équivalente d'acide lactique n'agit pas, même à 110°. Le maltose n'est interverti qu'à moitié, si on le fait bouillir trois heures, en présence de 5 à 10 °/₀ d'acide tartrique.

i) D'après Pavy, une ébullition de courte durée (une demi à une heure), d'une solution de maltose, contenant 2 à 5 °/₀ d'acide acétique ou d'acide citrique, ne détermine guère d'inversion appréciable.

Il ressort des travaux cités que la transformation *intégrale* du maltose en dextrose n'est pas nettement établie. Nous avons tâché de résoudre la question, en nous basant sur les recherches circonstanciées ci-dessous.

Le maltose hydraté, dont nous nous sommes servis, nous a été fourni par la maison Merck de Darmstadt. Ce produit était sensiblement pur. Son pouvoir rotatoire spécifique était de $\alpha_{D,0}$: = + 130° ; il fournissait, par sa dissolution dans l'eau distillée à 55° — 60°, une solution incolore et *inodore* (dès lors, les cristaux n'avaient pas retenu d'alcool). De plus, il ne renfermait pas plus de 0,05 °/₀ de cendres et ne donnait lieu à aucune perte de poids, après avoir été soumis, pendant quatre heures, à l'action simultanée d'une température de 50° et d'un courant de gaz carbonique sec.

PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES

On prend 50 cc. d'une solution, *fraîchement préparée*, de maltose hydraté à 2,5 °/₀, on l'introduit dans un petit ballon à fond rond, d'une capacité d'un quart de litre et contenant 10 cc. d'une solution *récente* d'acide citrique à 20 °/₀.

(¹) Bourquelot, COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. Paris, 97, p. 1000.

(²) Bourquelot, IBIDEM.

On adapte à un reflux de Schiff, on chauffe sur toile métallique et l'on porte, *le plus rapidement possible*, à l'ébullition. Celle-ci est prolongée pendant le temps voulu (voir tableau I); après quoi, on refroidit énergiquement le contenu du ballon et on le transvase dans un matras jaugé. Finalement, on ajoute 2 cc. de crème d'alumine, on porte à 100 cc.; on agite, on filtre et on polarise dans le tube de 200 millimètres.

Les résultats acquis sont classés dans le tableau I.

Les taux de maltose fragmentés durant les divers essais ont été calculés au moyen de la formule :

$$Q = 0{,}647452\ (\alpha - \alpha')$$

Q = quantité de $C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O$ transformée sur 1,25 gr. de substance.

α = déviation, fournie à 20°, par une solution contenant 1,25 gr. de substance par 100 cc. La valeur de α, qui est constante, est égale à + 3°,25.

α' = lecture polarimétrique obtenue, après l'action de l'acide citrique, maintenue pendant le laps de temps spécifié dans le tableau.

Il n'a pas été tenu compte de la température lors de l'évaluation des pouvoirs rotatoires, déduits des diverses lectures; l'erreur commise de cette façon, est négligeable d'ailleurs.

Pour ne pas tabler nos conclusions ultérieures sur des lectures polarimétriques *seulement*, nous avons jugé opportun de vérifier un bon nombre des essais optiques précédents, par la détermination de leurs pouvoirs réducteurs.

Hormis la méthode Kjeldahl, dont le mode opératoire est très distinct du nôtre, il n'existe pas de données relatives à l'action des mélanges de maltose hydraté et de glucose sur les liqueurs cupro-alcalines. Or, il importait que nous fussions fixés à ce sujet, sans quoi nos essais de contrôle n'offraient pas grande valeur.

Les points à examiner étaient, dès lors, nous semblait-il, les suivants :

a) Pouvoir réducteur du maltose hydraté.

b) Pouvoir réducteur du glucose anhydre.

c) Pouvoir réducteur des mélanges, en proportions diverses, de dextrose et de maltose hydraté.

TABLEAU I

Numéros d'ordre	Durée d'ébullition du liquide citrique	Polarisation		Pouvoir rotatoire α_D déduit de la lecture polarimétrique	Taux de $C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O$ hydrolysé		Observations
		Lecture	Température		sur 1,25 gr. de substance	Proportion en p. c.	
1	7 minutes	3°,25	20°	130°	0	0	solut. hydrolisée absolum. incolore
2	7 »	3°,25	20°	130°	0	0	»
3	10 »	3°,25	19°,5	130°	0	0	»
4	10 »	3°,25	20°	130°	0	0	»
5	15 »	3°,21	20°	128°,5	0,025898	2,07	»
6	15 »	3°,20	20°	128°	0,032372	2,58	»
7	30 »	3°,16	18°,5	126°,4	0,058270	4,66	»
8	30 »	3°.17	19°	126°,8	0,05179	4,14	»
9	45 »	3°,10	19°	124°	0,09711	7.76	»
10	45 »	3°,12	20°	124°,8	0,08416	6,73	»
11	1 heure	3°,08	18°	123°,2	0,11006	8,80	»
12	1 »	3°,08	18°,5	123°,2	0,11006	8,80	»
13	1 1/4 »	3°,05	18°	122°	0,12949	10,35	»
14	1 1/4 »	3°,04	18°	121°,6	0,13596	10,87	»
15	1 1/2 »	3°,00	19°	120°	0,16186	12,94	»
16	1 1/2 »	3°,00	19°,5	120°	0,16186	12,94	»
17	1 3/4 »	2°,94	18°	117°,6	0,18776	15,01	»
18	1 3/4 »	2°,95	19°	118°	0,19423	15,53	»
19	2 heures	2°,88	20°	115°,2	0,23955	19,16	»
20	2 »	2°,87	20°	114°,8	0,24603	19,68	»
21	2 1/4 »	2°,85	17°,5	114°	0,25898	20,71	»
22	2 1/4 »	2°,84	17°	113°,6	0,26545	21,13	»
23	2 1/2 »	2°,84	18°	113°,6	0,26545	21,13	»
24	2 1/2 »	2°.83	19°	113°,2	0,27192	21,75	»
25	3 »	2°,78	19°	111°,2	0,30420	24,33	»
26	3 »	2°.77	19°	110°,8	0,31077	24,86	»
27	3 1/2 »	2°,74	18°	109°,6	0,33020	26,41	»
28	3 1/2 »	2°,73	18°	109°,2	0,33667	26,93	»
29	4 »	2°,64	18°,5	105°,6	0,39494	31,59	»
30	4 »	2°,64	18°,5	105°,6	0,39494	31,59	»
31	5 »	2°,50	20°	100°	0,48563	38,85	»
32	5 »	2°,48	18°	99°,2	0,49858	39,90	»
33	5 »	2°,49	18°	99°,6	0,49210	39,36	»
34	6 »	2°,44	19°	97°,6	0,52443	41,95	»
35	6 »	2°,43	19°	97°,2	0,53091	42,47	»

Numéros d'ordre	Durée d'ébullition du liquide citrique	Polarisation		Pouvoir rotatoire α_D déduit de la lecture polarimétrique	Taux de $C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O$ hydrolysé		Observations
		Lecture	Température		sur 1,25 gr. de substance	Proportion en p c.	
36	7 heures	2°,39	17°,5	95°.2	0,55680	44,54	solut. hydrolisée absolum. incolore
37	7 »	2°,40	17°,5	96°	0,55033	44,02	»
38	8 »	2°,20	18°	88°	0,67982	54,38	»
39	8 »	2°,21	18°	88°,4	0,67335	53,86	»
40	9 »	2°,08	19°	83°,2	0,75751	60,60	»
41	9 »	2°,09	19°	83°,6	0,75004	60,00	»
42	10 »	1°,97	19°	78°,8	0,82873	66,29	»
43	10 »	1°,96	19°	78°,4	0,83521	66,81	»
44	11 »	1°,90	18°,5	76°	0,87406	69,92	»
45	11 »	1°,89	19°	75°,6	0,88053	70,44	»
46	13 »	1°,78	20°	71°,2	0,95175	76,14	»
47	13 »	1°,76	18°,5	70°,4	0,96470	77,17	»
48	15 »	1°,68	17°,5	67°,2	1,01649	81,31	»
49	15 »	1°,67	17°,5	66°,8	1,02297	81,83	»
50	17 »	1°,49	17°,5	59°,6	1,13956	91,16	»
51	17 »	1°,48	17°,5	59°,2	1,14599	91,67	»
52	19 »	1°,44	18°	57°,6	1,17188	93,75	»
53	19 »	1°,43	19°	57°,2	1,17836	94,26	»
54	20 »	1°,44	17°,5	57°,6	1,17188	93,75	solut. hydrolisée à peine jaunâtre
55	20 »	1°,42	17°,5	56°,8	1,18433	94,78	»
56	21 »	1°,42	18°	56°,8	1,18433	94,78	solution nettement jaunâtre
57	21 »	1°,41	18°,5	56°,4	1,19131	95,30	»
58	22 »	1°,41	19°	56°,4	1,19131	95,30	»
59	22 »	1°,41	18°,5	56°,4	1,19131	95,30	»
60	24 »	1°,38	19°	55°,2	1,21073	96,85	solution ayant une teinte vin de Graves
61	24 »	1°,38	20°	55°,2	1,21073	96,85	»
62	26 »	1°,36	19°	54°,4	1,22368	97,89	solution légèrement jaunâtre
63	26 »	1°,36	19°	54°,4	1,22368	97,89	»
64	28 »	1°,34	20°	53°,6	1,23663	98,93	»
65	28 »	1°,34	20°	53°,6	1,23663	98,93	»
66	30 »	1°,32	19°	52°,8	1,24958	99,96	»
67	30 »	1°,32	18°,5	52°,8	1,24958	99,96	»
68	32 »	1°,30	19°	52°,0	1,26253	101,00	solution jaune ambré
69	32 »	1°,29	20°	51°,6	1,26900	101,52	»
70	33 »	1°,29	19°	51°,6	1,26900	101,52	»

Avant de commenter et de déterminer les valeurs de chacun de ces trois pouvoirs réducteurs, il s'agit d'indiquer, préalablement, la composition de la liqueur cupro-alcaline employée, les détails opératoires suivis et les corrections éventuelles à apporter aux résultats. La solution cuivrique dont nous nous sommes servis est la liqueur de Fehling-Soxhlet (1), préparée à l'aide de soude caustique et de sel de Seignette bien purs; cette liqueur fut renouvelée tous les dix jours et conservée à l'abri des rayons solaires.

Notre *modus operandi* fut *constamment* le même, quelle que fût la recherche à effectuer. Le voici une fois pour toutes : Dans une capsule en porcelaine, à émail intact, on fait chauffer 50 cc. de liqueur de Soxhlet ; dès que le liquide est en pleine ébullition, on y verse, hors d'une pipette, 10 cc. d'une solution sucrée, contenant de 0,0125 gr. à 0,1250 gr. de sucre (2), on remue à l'aide d'un agitateur et on pousse la masse, *le plus vite possible*, à l'ébullition. A partir de ce moment, le chauffage est prolongé *très exactement*, pendant QUATRE minutes ; puis le Cu_2O est jeté sur un filtre à cendres tarées et lavé à l'eau bouillante jusqu'à élimination de toute trace d'alcali. L'hydroxyde cuivrique fixé par les fibres du papier, est enlevé à son tour, par 100 cc. d'une solution chaude de sel de Seignette à 1 %. Finalement, on termine la purification de l'oxydule de cuivre par un nouveau lavage à l'eau bouillante, qui entraîne le tartrate sodico-potassique retenu.

Le dosage s'achève par l'incinération du filtre et de son contenu et par une calcination au moufle ; au bout de vingt à vingt-cinq minutes, la transformation du Cu_2O en CuO est complète. On pèse celui-ci, après refroidissement complet sous exsiccateur.

Notons que chacun des chiffres, indiqués dans les pages qui vont suivre et qui ont trait au pouvoir réducteur, représente la moyenne de trois essais, dont l'écart ne dépassait pas *deux* milligrammes.

---

(1) E. Wein, *Tabellen zur quantitativen Bestimmung der Zuckerarten*. page X.

(2) Nous avons, en effet, *toujours* travaillé sur 10 cc. de liqueur sucrée, provenant de la solution citrique hydrolysée, diluée de neuf volumes d'eau distillée.

Les seules corrections éventuelles à établir concernaient la stabilité et l'influence modificatrice possible de l'acide citrique. La stabilité de la liqueur de Soxhlet ne laissa rien à désirer, puisque quatre dosages *à blanc*, exécutés en présence de 10 cc. d'eau distillée, récemment bouillie, n'ont pas occasionné de dépôt appréciable de protoxyde de cuivre. L'action de l'acide citrique a été plus manifeste. La dose moyenne en CuO, fournie par quatre essais, effectués au moyen de 10 cc. d'acide citrique à 2 ‰, a été de 3,8 milligrammes.

Tous les chiffres, relatés plus bas, ont subi la correction exigée de ce chef.

Exposons à présent, de quelle manière nous avons procédé à la détermination des différentes valeurs des pouvoirs réducteurs, *dans les limites de concentration usitées*, du maltose hydraté, du dextrose et des mélanges de ces deux sucres.

a) *Pouvoir réducteur du maltose hydraté.* — *Dix* expériences, comportant respectivement 0,0125 gr. ; 0,0250 gr. ; 0,0375 gr. ; 0,0500 gr. ; 0,0625 gr. ; 0,0750 gr. ; 0,0875 gr. ; 0,1000 gr. ; 0,1125 gr. ; et 0,1250 gr. de maltose hydraté furent faites à cette fin.

Les quotités d'oxyde cuivrique obtenues ont été les suivantes :

CuO	MALTOSE HYDRATÉ
0,0157	0,0125
0,0327	0,0250
0,0497	0,0375
0,0666	0,0500
0,0834	0,0625
0,1001	0,0750
0,1168	0,0875
0,1334	0,1000
0,1500	0,1125
0,1665	0,1250

b) *Pouvoir réducteur du glucose anhydre.* — Nous avons opéré, ici, absolument de la même manière que pour les recherches concernant le pouvoir réducteur du maltose ; toutefois, comme le glucose anhydre, dont nous disposions, titrait 0,02 % de cendres et 0,68 % d'humidité, nous avons utilisé, en définitive, 0,0124 ;

0,0248 ; 0,0373 ; 0,0496 ; 0,0620 ; 0,0744 ; 0,0868 ; 0,0992 ; 0,1116 ou 0,1240 de produit actif.

Les poids correspondants d'oxyde cuivrique et de dextrose ont été les suivants :

CuO	DEXTROSE ANHYDRE
0,0322	0,0124
0,0634	0,0248
0,0945	0,0372
0,1250	0,0496
0,1554	0,0620
0,1856	0,0744
0,2155	0,0868
0,2452	0,0992
0,2747	0,1116
0,3041	0,1240

c) *Pouvoir réducteur des mélanges de glucose anhydre et de maltose hydraté.* — Une question préalable se posait ici tout naturellement : Était-il bien indispensable de contrôler le pouvoir réducteur des mélanges, en quantités variables, des deux sucres expérimentés ? Nous répondons affirmativement. Il importait que pareille vérification fût faite, vu qu'il n'y avait, *a priori*, rien d'impossible à ce que la présence du dextrose ne modifiât le pouvoir réducteur du maltose, c'est-à-dire, agît d'une manière analogue à celle que le glucose et le sucre interverti manifestent vis-à-vis du saccharose ; fait connu et qui a nécessité le calcul de tables spéciales, réservées exclusivement aux mélanges de sucre de canne et de sucre interverti.

Telles sont notamment les tables de Meissl-Wein (¹) et de Herzfeld (²) auxquelles on a recours pour le dosage du sucre réducteur dans les sucres bruts et dans la betterave.

Les quelques essais libellés ci-dessous, prouvent que, pour les

---

(¹) E. Wein, *Tabellen zur quantitativen Bestimmung der Zuckerarten.* page 17.

(²) A. Herzfeld, ZEISCHRIFT D. VER. FÜR RÜBENZUCKERINDUSTRIE. 1885, p. 985.

conditions opératoires exposées, les pouvoirs réducteurs des deux sucres mélangés restent, *à peu de chose près*, proportionnellement les mêmes que ceux fournis par chaque sucre, *pris isolément.*

		CuO	
		calculé	obtenu
Mélange I	dextrose 0,0124 maltose hydraté 0,1125	0,1822 gr.	0,1804 gr.
Mélange II	dextrose 0,0992 maltose hydraté 0,0250	0,2779 »	0,2758 »
Mélange III	dextrose 0,0496 maltose hydraté 0,0750	0,2251 »	0,2240 »
Mélange IV	dextrose 0,0868 maltose hydraté 0,0375	0,2652 »	0,2634 »
Mélange V	dextrose 0,0248 maltose hydraté 0,1000	0,1968 »	0,1948 »

Il nous reste pour terminer l'exposé de cette première série d'essais, à montrer comment, en nous basant sur les données expérimentales fournies par les essais à la liqueur Soxhlet, nous avons vérifié la signification attribuée aux déviations dues aux liqueurs citriques hydrolysées.

Le tableau II indique les quantités d'oxyde cuivrique laissées par les sucres contenus dans 10 cc. de solution, provenant elle-même du mélange de 10 cc. de liqueur intervertie et de 90 cc. d'eau distillée *bien pure.*

Les chiffres du tableau montrent, à première vue, que le polarimètre et la liqueur de Soxhlet conduisent à des résultats concordants.

TABLEAU II

Numéros correspondants du tableau I	Durée d'ébullition du liquide critique	Quantité du Cu*O*	
		à obtenir pour 10 cc. de liquide citrique *dilué*	*obtenue* pour 10 cc. de liquide citrique *dilué*
13	$1\,^1/_4$ heure	0,1830 gr.	0,1823 gr.
14	$1\,^1/_4$ »	0,1837 »	0,1826 »
15	$1\,^1/_2$ »	0,1867 »	0,1850 »
16	$1\,^1/_2$ »	0,1867 »	0,1847 »
17	$1\,^3/_4$ »	0,1898 »	0,1880 »
18	$1\,^3/_4$ »	0,1906 »	0,1878 »
19	2 heures	0,1961 »	0,1956 »
20	2 »	0,1968 »	0,1944 »
21	$2\,^1/_4$ »	0,1984 »	0,1972 »
22	$2\,^1/_4$ »	0,1991 »	0,1972 »
24	$2\,^1/_2$ »	0,1997 »	0,1972 »
25	3 heures	0,2036 »	0,2040 »
29	4 »	0,2143 »	0,2134 »
33	5 »	0,2253 »	0,2230 »
35	6 »	0,2296 »	0,2285 »
36	7 »	0,2325 »	0,2330 »
39	8 »	0,2450 »	0,2430 »
40	9 »	0,2544 »	0,2531 »
43	10 »	0,2586 »	0,2565 »
44	11 »	0,2667 »	0,2674 »
47	13 »	0,2760 »	0,2751 »
49	15 »	0,2822 »	0,2809 »
50	17 »	0,2940 »	0,2928 »
52	19 »	0,2983 »	0,2960 »
54	20 »	0,2983 »	0,2974 »
57	21 »	0,3003 »	0,2987 »
58	22 »	0,3003 »	0,2990 »
61	24 »	0,3023 »	0,3008 »
63	26 »	0,3043 »	0,3037 »
64	28 »	0,3051 »	0,3050 »
66	30 »	0,3061 »	0,3069 »
69	32 »	0,3061 »	0,3028 »

TABLEAU III

Numéros d'ordre	Durée de chauffage du liquide citrique	Polarisation		Pouvoir rotatoire α_D déduit de la lecture polarimétrique	Taux de $C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O$ hydrolysé		Observations
		Lecture	Température		sur 1,25 gr. de substance	Proportion en p. c.	
1	7 minutes	3°,09	20°	123°,6	0,10359	8,28	Solut. hydrolysée absolum. incolore
2	7 »	3°,10	20°	124°,0	0,09711	7,76	»
3	15 »	3°,01	19°	120°,4	0,15538	12,43	»
4	15 »	3°,02	19°,5	120°,8	0,14891	11,91	»
5	30 »	2°,89	19°	115°,6	0,23308	18,64	»
6	30 »	2°,89	18°,5	115°,6	0,23308	18,64	»
7	45 »	2°,76	19°	110°,4	0,31725	25,38	»
8	45 »	2°,75	19°	110°,0	0,32372	25,89	»
9	1 heure	2°,64	20°	105°,6	0,39494	31,59	»
10	1 »	2°,63	20°	105°,2	0,40142	32,11	»
11	1 $^1/_2$ »	2°,54	19°	101°,6	0,45969	36,77	»
12	1 $^1/_2$ »	2°,53	17°,5	101°,2	0,46616	37,29	»
13	2 heures	2°,29	18°	91°,6	0,62155	49,72	»
14	2 »	2°,28	18°	91°,2	0,62802	50,24	»
15	2 $^1/_2$ »	2°,20	20°	88°,0	0,67982	54,38	»
16	2 $^1/_2$ »	2°,19	20°	87°,6	0,68629	54,90	»
17	3 heures	2°,00	17°	80°,0	0,80931	64,74	»
18	3 »	2°,01	17°	80°,4	0,80384	64,30	»
19	3 $^1/_2$ »	1°,88	18°	75°,2	0,88700	70,95	»
20	3 $^1/_2$ »	1°,87	18°	74°,8	0,89348	71,47	»
21	4 heures	1°,81	18°	72°,4	0,93223	74,57	»
22	4 »	1°,83	18°	73°,2	0,91938	73,55	»
23	5 »	1°,60	17°,5	64°,0	1,06829	85,46	»
24	5 »	1°,59	17°,5	63°,6	1,07477	85,98	»
25	6 »	1°,50	20°	60°,0	1,11304	90,64	»
26	6 »	1°.49	18°,5	59°,0	1,13956	91,16	»
27	7 »	1°,44	18°	57°,6	1,17188	93,75	»
28	7 »	1°,45	17°	58°,0	1,16541	93,23	»
29	8 »	1°,44	17°	57°,6	1,17188	93,75	»
30	8 »	1°,42	17°	56°,8	1,18483	94,78	solut. hydrolysée à peine jaunâtre
31	8 $^1/_2$ »	1°,43	17°,5	57°,2	1,17836	94,26	»
32	8 $^1/_2$ »	1°,42	17°,5	56°,8	1,18483	94,78	»
33	9 »	1°,41	18°	56°,4	1,19131	95,30	solution nettem. jaunâtre
34	9 »	1°,41	18°	56°,4	1,19131	95,30	»
35	10 »	1°,38	19°	55°,2	1,21073	96,85	»
36	10 »	1°,38	18°,5	55°,2	1,21073	96,85	»
37	11 »	1°,36	20°	54°,4	1,22368	97,89	solution ayant une teinte vin de Graves
38	11 »	1°,35	18°,5	54°,0	1,23015	98,51	»
39	12 »	1°,34	20°	53°,6	1,23663	98,93	solut. légèrement jaune ambré
40	12 »	1°,32	19°	52°,8	1,24958	99,96	»
41	13 »	1°,30	18°	52°,0	1,26253	101,00	»
42	13 »	1°,29	18°	51°,6	1,26900	101,52	»

DEUXIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES

Les essais optiques, ainsi que les essais chimiques que cette série comporte, ont été réalisés, en tous points, *semblablement* à ceux de la première série. La seule manipulation distincte est celle de l'hydrolyse, qui a eu lieu, à l'autoclave, sous une pression de 3/4 d'atmosphère. Les résultats constatés sont collationnés dans les tableaux III et IV.

TABLEAU IV

Numéros correspondants du tableau III	Durée du chauffage (à 3/4 d'atmosphère) du liquide citrique	Quantité de CuO	
		à obtenir pour 10 cc. de liquide citrique *dilué*	*obtenue* pour 10 cc. de liquide citrique *dilué*
4	15 minutes	0,1852 gr.	0,1831 gr.
7	45 »	0,2052 »	0,2048 »
11	1 $^1/_2$ heure	0,2216 »	0,2220 »
16	2 $^1/_2$ heures	0,2465 »	0,2451 »
17	3 heures	0,2604 »	0,2590 »
20	3 $^1/_2$ heures	0,2684 »	0,2669 »
21	4 heures	0,2726 »	0,2720 »
23	5 »	0,2866 »	0,2854 »
25	6 »	0,2932 »	0,2949 »
28	7 »	0,2967 »	0,2945 »
30	8 »	0,2987 »	0,2990 »
31	8 $^1/_2$ heures	0,2990 »	0,2985 »
33	9 heures	0,3003 »	0,3009 »
35	10 »	0,3023 »	0,3011 »
38	11 »	0,3043 »	0,3018 »
40	12 »	0,3061 »	0,3064 »
41	13 »	0,3061 »	0,3040 »

TROISIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES

Les essais de cette série sont absolument *similaires* à ceux de la deuxième ; la seule différence réside dans l'emploi d'une pression de 1 $^1/_2$ atmosphère durant l'hydrolyse.

Les tableaux V et VI mentionnent les résultats obtenus au cours de cette troisième série d'expériences.

TABLEAU V

Numéros d'ordre	Durée de chauffage du liquide citrique	Polarisation		Pouvoir rotatoire α_D déduit de la lecture polarimétrique	Taux de $C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O$ hydrolysé		Observations
		Lecture	Température		sur 1,25 gr. de substance	Proportion en p. c.	
1	7 minutes	2,°74	17°,5	109°,6	0,33020	26,41	solut. hydrolysée absolum. incolore
2	7 »	2°,74	17°,5	109°,6	0,33020	26,41	»
3	15 »	2°,54	18°	101°,6	0,45969	36,77	»
4	15 »	2°,53	19°	104°,2	0,46616	37,29	»
5	30 »	2°,52	17°,5	92°,8	0,60213	48,17	»
6	30 »	2°,31	17°,5	92°,4	0,61860	48,68	»
7	45 »	2°,09	20°	83°,6	0,75104	60,08	»
8	45 »	2°,08	20°	83°,2	0,75751	60,60	»
9	1 heure	1°,90	19°	76°,0	0,87406	69,92	»
10	1 »	1°,89	19°,5	75°,6	0,88053	70,44	»
11	1 1/4 »	1°,80	19°,5	72°,0	0,93880	75,10	»
12	1 1/4 »	1°,78	19°,5	71°,2	0,95175	76,14	»
13	1 1/2 »	1°,64	18°,5	65°,6	1,06182	84,94	»
14	1 1/2 »	1°,65	19°	66°,0	1,03592	82,87	»
15	1 3/4 »	1°,52	18°,5	60°,8	1,12009	89,60	»
16	1 3/4 »	1°,53	18°,5	61°,2	1,11361	89,08	»
17	2 heures	1°,44	17°,5	57°,6	1,17188	93,75	»
18	2 »	1°,43	19°	57°,2	1,17836	94,26	»
19	2 1/4 »	1°,39	17°,5	55°,6	1,20426	96,34	»
20	2 1/4 »	1°,38	17°,5	55°,2	1,21073	96,85	»
21	2 1/2 »	1°,32	19°	52°,8	1,24958	99,96	solut. hydrolysée à peine jaunâtre
22	2 1/2 »	1°,32	19°	52°,8	1,24958	99,96	»
23	2 1/2 »	1°,32	18°	52°,8	1,24958	99,96	»
24	2 1/2 »	1°,31	18°,5	52°,4	1,25605	100,48	»
25	2 3/4 »	1°,27	20°	50°,8	1,28195	102,55	solution nettement jaunâtre
26	2 3/4 »	1°,26	20°	50°,4	1,28842	103,07	»
27	2 3/4 »	1°,27	19°,5	50°,8	1,28195	102,55	»
28	2 3/4 »	1°,27	19°	50°,8	1,28195	102,55	»
29	3 »	1°,25	18°,5	50°,0	1,29490	103,99	solution légèrem. jaune ambré
30	3 »	1°,23	18°,5	49°,2	1,31785	105,42	»
31	3 »	1°,23	18°,5	49°,2	1,31785	105,42	»
32	3 »	1°,24	20°	49°,6	1,30137	104,10	»

TABLEAU VI

Numéros correspondants du tableau V	Durée de chauffage (à $1\ ^{1}/_{2}$ atmosphère) du liquide citrique	Quantité de CuO	
		à obtenir pour 100 cc. de liquide citrique *dilué*	*obtenue* pour 100 cc. de liquide citrique *dilué*
2	7 minutes	0,2068 gr.	0,2060 gr.
3	15 »	0,2216 »	0,2214 »
6	30 »	0,2394 »	0,2376 »
8	45 »	0,2544 »	0,2550 »
9	1 heure	0,2667 »	0,2648 »
11	$1\ ^{1}/_{4}$ »	0,2693 »	0,2681 »
13	$1\ ^{1}/_{2}$ »	0,2859 »	0,2862 »
16	$1\ ^{1}/_{3}$ »	0,2914 »	0,2905 »
17	2 heures	0,2983 »	0,2972 »
20	$2\ ^{1}/_{4}$ »	0,3024 »	0,3019 »
23	$2\ ^{1}/_{2}$ »	0,3041 »	0,3050 »
24	$2\ ^{1}/_{2}$ »	0,3061 »	0,3046 »
27	$2\ ^{3}/_{4}$ »	0,3061 »	0,3020 »
32	3 heures	0,3061 »	0,3006 »

CONCLUSIONS

Des recherches décrites, découlent les conclusions suivantes :

1) L'hydrolyse citrique conduit au dédoublement *total* d'une molécule de maltose hydraté en deux molécules de dextrose.

2) On peut arriver à cette fragmentation *intégrale* soit par l'ébullition prolongée, soit par le chauffage sous pression.

3) Il est préférable d'opérer sous une pression de $1\ ^{1}/_{2}$ atmosphère, maintenue durant $2\ ^{1}/_{2}$ heures. En agissant de la sorte, l'inversion *complète* du maltobiose précède l'apparition d'une teinte jaune plus ou moins marquée.

4) Il semble résulter aussi des recherches exposées que la production des matières noires dépend plus de la longue durée du chauffage que de l'influence *humigène* de l'acide.

SUR LA GÉOMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE

par **J. NEUBERG**

Bibliographie. — Geiser, Zur Theorie der Flächen zweiten und dritten Grades (J. DE CRELLE, LXIX, p. 197).

Thieme, Zur Geometrie des Tetraeders (ZEITSCHRIFT DE SCHLÖMILCH, XXVII, p. 56).

Neuberg, Mémoire sur le Tétraèdre (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, XXXVII).

Ueber drei Sätze von Dr P. Zeeman (ARCHIV DER MATH. U. PHYS., (3) XI, p. 225).

Ueber die Schrötersche Raumkurve vierter Ordnung (IBID., (3) XIV, p. 212).

Ueber orthologische Tetraeder (MONATSHEFTE FÜR MATH. U. PHYS. XVIII, p. 212).

Sur la Géométrie du triangle et du tétraèdre (dans le *Traité de Géométrie* par Rouché et de Comberousse, 7e édition).

Fr. W. Meyer, Ueber die einem Tetraeder einbeschriebenen Rotationsflächen zweiter Ordnung (ARCH. DER MATH. U. PHYS., (3) IV, p. 168).

Ueber die Höhen des Tetraeders (IBID., (3) VIII, S. 135).

Zu der Abhandlung des Herrn Neuberg Ueber drei Sätze von Dr P. Zeeman (IBID., (3) XII, p. 1).

WISKUNDIGE OPGAVEN (Amsterdam). Deel II, p. 342 (Neuberg) ; Deel V, p. 155 (Neuberg, Wind) ; Deel VIII, p. 397 (Zeeman, Mantel, Stolp) ; Deel IX, p. 189 (Neuberg, Allersma).

Duporcq, Sur une extension à l'espace du théorème de Simson (BULLETIN DE LA SOC. MATH., DE FRANCE, déc. 1900).

Un chapitre intéressant de la Géométrie du triangle traite des triangles podaires. La présente note a pour objet principal le chapitre correspondant de la Géométrie du tétraèdre ; elle résume des résultats connus et renferme quelques nouvelles propositions. L'extension à l'espace de certaines propriétés du triangle est souvent trop compliquée ou même impossible.

1. Soient : $A_1 A_2 A_3 A_4 \equiv T$ un tétraèdre donné, V son volume, a_{rs} la longueur de l'arête $A_r A_s$, f_r l'aire de la face opposée à A_r,

h_r la hauteur issue de A_r. Désignons par α_1, α_2, α_3, α_4 les coordonnées normales d'un point quelconque B par rapport à T, et par B_1, B_2, B_3, B_4 les projections de B sur les faces de T. Une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3, 4 sera représentée par r, s, u, v.

Cela posé, si par chaque arète $A_r A_s$ on mène le symétrique du plan $A_r A_s$ B par rapport au plan bissecteur du dièdre $A_r A_s$ de T, c'est-à-dire le *conjugué isogonal* du plan $A_r A_s$ B, les six plans ainsi obtenus concourent en un même point C, appelé l'*inverse* ou l'*isogonal* de B et ayant pour coordonnées $\frac{1}{\alpha_1}$, $\frac{1}{\alpha_2}$, $\frac{1}{\alpha_3}$, $\frac{1}{\alpha_4}$. Une arète quelconque $B_r B_s$ du tétraèdre podaire $B_1 B_2 B_3 B_4$ T' est perpendiculaire au plan $A_u A_v C$ et une face $B_r B_s B_u$ est perpendiculaire à la droite $A_v C$.

Il est évident que le tétraèdre podaire de C jouit de propriétés analogues par rapport au point B.

Les points B et C sont les foyers d'une quadrique de révolution inscrite au tétraèdre T ; leurs projections sur les faces de T appartiennent à une même sphère.

Enfin, les coordonnées barycentriques de B par rapport à T' sont égales à celles de C par rapport à T.

2. Considérons maintenant cinq points quelconques A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, et désignons par A'_5 l'inverse de A_5 dans le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, par A'_4 l'inverse de A_4 dans le tétraèdre $A_1A_2A_3A_5$, etc. Les dièdres $A_5A_1A_2A_4$, $A'_5A_1A_2A_3$ étant égaux, ainsi que les dièdres $A_4A_1A_2A_5$, $A'_4A_1A_2A_3$, les plans $A_1A_2A'_4$, $A_1A_2A'_5$ sont symétriques par rapport à la face $A_1A_2A_3$. Comme il en est de même des plans $A_2A_3A'_4$, $A_2A_3A'_5$ et des plans $A_3A_1A'_4$, $A_3A_1A'_5$, les points A'_4, A'_5 sont symétriques par rapport au plan $A_1A_2A_3$. En général, si *rsuvw* est une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, 5, le plan $A_rA_sA_u$ est perpendiculaire au milieu de la droite $A'_vA'_w$.

Il résulte de là que A_w est le centre de la sphère $A'_rA'_sA'_uA'_v$.

Soient D_1, D_2, D_3, D_4 les projections de A'_5 sur les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$; ces points sont les milieux des droites $A'_5A'_1$, $A'_5A'_2$, $A'_5A'_3$, $A'_5A'_4$. Par suite, les coordonnées barycentriques de A_5 par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sont égales à celles de A'_5 par rapport au tétraèdre $A'_1A'_2A'_3A'_4$ homothétique au tétraèdre $D_1D_2D_3D_4$. Semblablement, les points A_1, A'_1 ont les mêmes coordonnées barycentriques respectivement par rapport aux tétraèdres $A_2A_3A_4A_5$, $A'_2A'_3A'_4A'_5$; et ainsi de suite.

Ce résultat peut s'énoncer ainsi : *Si cinq forces parallèles se font équilibre, elles se feront encore équilibre après qu'on les aura transportées parallèlement chacune au centre de la sphère circonscrite au tétraèdre des points d'application des quatre autres forces.*

Les deux pentagones complets $A_1A_2A_3A_4A_5$, $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$ peuvent être dits *orthologiques :* une arète A_rA_s du premier est perpendiculaire à la face opposée $A_uA_vA_w$ du second, et une arête $A'_rA'_s$ du second est perpendiculaire à la face opposée $A_uA_vA_w$ du premier.

3. Cherchons le volume V′ du tétraèdre podaire $B_1B_2B_3B_4 \equiv T'$ du point B par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4 \equiv T$.

Soient (x_r, y_r, z_r), (x_5, y_5, z_5) les coordonnées rectangulaires des points A_r, B, et désignons par X_r, Y_r, Z_r, U_r les mineurs du déterminant

$$\Delta = \mid x_1 \; y_1 \; z_1 \; 1 \mid$$

relatifs aux éléments de la r^e ligne. Nous n'écrivons que la première ligne d'un déterminant lorsque les autres ont une composition analogue.

Le plan de f_r ayant pour équation

$$\delta_r \equiv xX_r + yY_r + zZ_r + U_r = 0, \tag{1}$$

les coordonnées de B_r sont de la forme $x_5 + \lambda_r X_r$, $y_5 + \lambda_r Y_r$, $z_5 + \lambda_r Z_r$; en les substituant dans l'équation (1) on obtient

$$\lambda_r \left(X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2\right) + \delta_r = 0, \text{ d'où } \lambda_r = -\frac{\delta_r}{4f_r^2},$$

δ_r désignant maintenant la quantité $x_5X_r + y_5Y_r + z_5Z_r + U_r$.

De là on conclut

$$\begin{aligned} 6V' &= \mid x_5 + \lambda_1 X_1 \quad y_5 + \lambda_1 Y_1 \quad z_5 + \lambda_1 Z_1 \quad 1 \mid \\ &= \mid \lambda_1 X_1 \quad \lambda_1 Y_1 \quad \lambda_1 Z_1 \quad 1 \mid. \end{aligned}$$

Développons le dernier déterminant suivant la quatrième colonne et appliquons la propriété des mineurs des déterminants adjoints ; comme $\Delta = 6V$, nous aurons

$$V' = -6V^2 \sum \lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \frac{3}{32} V^2 \sum \frac{\delta_2\delta_3\delta_4}{f_2^2 f_3^2 f_4^2}.$$

Or δ_r représente six fois le volume $BA_sA_uA_v$; par conséquent, $\delta_r = 2\, f_r\alpha_r$ et

$$V' = \frac{3}{4} V^2 \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{f_1f_2f_3f_4} \sum \frac{f_1}{\alpha_1}, \qquad (2)$$

$$\frac{4V'}{9V^3} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{f_1f_2f_3f_4} \sum \frac{1}{\alpha_1 h_1}.$$

Soient α'_1, α'_2, α'_3, α'_4 les coordonnées normales absolues de C, de sorte que

$$\sum \alpha'_1 f_1 = 3V, \quad \alpha_1\alpha'_1 = \alpha_2\alpha'_2 = \alpha_3\alpha_3' = \alpha_4\alpha_4',$$

$$V'_1 = \frac{3}{4} V^2 \frac{\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4}{f_1f_2f_3f_4} \sum \frac{f_1}{\alpha'_1},$$

V_1' désignant le volume du tétraèdre podaire de C.

De $\sum \alpha'_1 f_1 = \sum \alpha_1 f_1$ et $\alpha_1\alpha'_1 = \alpha_2\alpha'_2 \ldots$ on conclut facilement

$$\sum \frac{f_1}{\alpha_1} = \sum \frac{f_1}{\alpha'_1};$$

par suite

$$\frac{V'}{V_1'} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4}.$$

L'équation (2) montre que le lieu des points dont les tétraèdres podaires ont un volume donné, est une surface du troisième ordre.

En particulier, le lieu des points dont les projections sur les faces du tétraèdre T sont coplanaires, est la surface cubique

$$\frac{f_1}{\alpha_1} + \frac{f_2}{\alpha_2} + \frac{f_3}{\alpha_3} + \frac{f_4}{\alpha_4} = 0, \qquad (3)$$

que nous appellerons la *surface de Simson*. Le plan des projections d'un point de cette surface est un *plan de Simson*.

On aurait pu écrire directement l'équation (3) en considérant la surface de Simson comme le lieu des inverses des points à l'infini.

La surface de Simson est le lieu des foyers des paraboloïdes de révolution inscrits au tétraèdre T. C'est aussi le lieu des centres des hyperboloïdes orthogonaux autopolaires par rapport à T.

4. Les plans de Simson enveloppent une surface de la quatrième classe.

En effet, soit, en coordonnées normales,

$$\alpha_5 \equiv u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3 + u_4\alpha_4 = 0$$

l'équation d'un tel plan, et soient

$$u_1'\alpha_1 - \alpha_5 = 0, \quad u_2'\alpha_2 - \alpha_5 = 0, \ldots \tag{4}$$

les équations des plans menés perpendiculairement aux faces de T par leur intersection avec le plan de Simson. En appliquant la condition de perpendicularité de deux plans (u_1, u_2, u_3, u_4), $(v_1, \ldots)$, à savoir

$$\sum u_1 v_1 - \sum (u_1 v_2 + u_2 v_1)\, c_{12} = 0,$$

où c_{rs} représente le cosinus du dièdre $A_u A_v$ de T, on trouve

$$u_1' = u_1 - u_2 c_{12} - u_3 c_{13} - u_4 c_{14}, \ldots$$

Les plans (4) doivent concourir en un même point B ; on en conclut d'abord que ce point a pour coordonnées normales $\frac{1}{u'_1}, \frac{1}{u'_2}, \frac{1}{u'_3}, \frac{1}{u'_4}$. Pour éliminer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ entre les équations (4), nous ajoutons celles-ci après les avoir multipliées respectivement par $\frac{u_1}{u'_1}, \frac{u_2}{u'_2}, \ldots$. Nous aurons ainsi

$$\sum \frac{u_1}{u_1 - u_2 c_{12} - u_3 c_{13} - u_4 c_{14}} = 1.$$

5. Il y a lieu de mentionner ici un théorème très curieux dû au Dr Zeeman (et à Duporcq ?), à savoir :

Si cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *jouissent de la propriété que les projections de* A_5 *sur les faces du tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$ *soient copla-*

naires, chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4 jouit de la même propriété par rapport au tétraèdre des quatre autres points.

La démonstration suivante est due à M. Mantel. Les notations étant celles du n° 2, le point A'_5 est à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan de Simson de A_5 ; par suite, le point A'_4 est à l'infini dans la direction symétrique de celle de A_5' par rapport au plan $A_1A_2A_3$. Il en résulte que les projections de A_4 sur les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_5$ sont situées dans un même plan qui est parallèle au symétrique du plan de Simson de A_5 par rapport au plan $A_1A_2A_3$.

Appelons μ_1, μ_2, ... les cinq plans de Simson des points A_1, A_2, ... et ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 les plans symétriques de μ_5 par rapport aux faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$; les plans μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 passent chacun par le pied d'une hauteur de ce tétraèdre et sont parallèles à l'un des plans ν_1, ν_2, ν_3, ν_4. On trouve une disposition analogue en partant de l'un des plans μ_1, μ_2, μ_3, μ.

6. Le tétraèdre podaire $B_1B_2B_3B_4 = T'$ d'un point B par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4 = T$ ne peut affecter une forme quelconque ; car les faces de l'un de ces tétraèdres (T' ou T) sont perpendiculaires aux droites joignant les sommets de l'autre à un même point. Par suite, outre la relation entre les six dièdres d'un tétraèdre, on a encore deux équations de condition entre T et T'. En désignant par ρ_r la distance CA_r, on obtient ces équations en éliminant les α entre les six égalités

$$b^2_{rs} = \alpha^2_r + \alpha^2_s + 2\alpha_r\alpha_s c_{rs},$$

ou les ρ entre les six égalités

$$a^2_{rs} = \rho^2_r + \rho^2_s - 2\rho_r\rho_s \cos(\rho_r\rho_s).$$

Les calculs sont assez compliqués, même dans le cas où l'un des tétraèdres T, T' est régulier.

7. Il existe un point L qui est le centre de gravité de son tétraèdre podaire ; c'est l'inverse du centre de gravité G de T. Il a pour coordonnées normales f_1, f_2, f_3, f_4 et pour coordonnées barycentriques f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2. Le plan A_rA_sL rencontre donc A_uA_v en un point L_{uv} tel que $A_uL_{uv} : A_vL_{uv} = -f^2_v : f^2_u$.

L est le point dont la somme des carrés des distances aux faces de T est un minimum. Nous l'appellerons *point de Lhuilier*, du nom du géomètre qui l'a étudié le premier ; le nom de *point de Lemoine* convient mieux au point d'intersection des droites joignant les sommets d'un tétraèdre *isodynamique* ($a_{12}\, a_{34} = a_{13}\, a_{24} = a_{14}\, a_{23}$) aux pôles des faces opposées par rapport à la sphère circonscrite.

Les points G *et* L *sont les foyers d'une quadrique de révolution qui touche les faces du tétraèdre* T *aux pieds des hauteurs* (F. W. Meyer).

8. Nous allons maintenant chercher les lieux des points B et C lorsque les projections de B sur les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ satisfont à certaines conditions.

Pour que les droites B_1B_2, B_3B_4 soient parallèles, les plans A_3A_4C, A_1A_2C doivent l'être également. Le lieu de C est donc l'intersection du plan λ_{12} mené par A_3A_4 parallèlement à A_1A_2 avec le plan λ_{34} mené par A_1A_2 parallèlement à A_3A_4. Les conjugués isogonaux λ'_{34}, λ'_{12} des plans λ_{34}, λ_{12} se coupent suivant une droite l_2, qui est le lieu cherché de B.

Appelons ϵ_{uv}, ϵ'_{uv} les plans bissecteurs du dièdre A_rA_s de T et F_{uv}, F'_{uv} leurs intersections avec l'arête A_uA_v. Les plans ϵ_{12} et ϵ'_{12} étant également les plans bissecteurs du dièdre $\lambda_{12}\lambda'_{12}$ et A_1A_2 étant parallèle à λ_{12}, le segment $F_{12}F'_{12}$ est divisé en deux parties égales par le plan λ'_{12}. Donc l_2 joint les milieux des segments $F_{12}F'_{12}$, $F_{34}F'_{34}$. Ces milieux sont aussi les conjugués harmoniques des points L_{12}, L_{34} par rapport aux couples de points A_1A_2, A_3A_4.

Le plan de l'infini ayant pour équation $\Sigma\alpha_1 f_1 = 0$, les équations des plans λ_{12}, λ_{34} sont

$$f_1\alpha_1 + f_2\sigma_2 = 0, \quad f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4 = 0 ;$$

il en résulte que celles de la droite l_2 sont

$$\frac{\alpha_1}{f_1} + \frac{\alpha_2}{f_2} = 0, \quad \frac{\alpha_3}{f_3} + \frac{\alpha_4}{f_4} = 0.$$

De même, les lieux des points B tels que les droites B_1B_3 et B_2B_4 ou que les droites B_1B_4 et B_2B_3 soient parallèles, sont les droites l_3, l_4 joignant les milieux des segments $F_{13}F'_{13}$ et $F_{24}F'_{24}$ ou ceux des segments $F_{14}F'_{14}$ et $F_{23}F'_{23}$; les équations de l_3 et l_4 sont respectivement

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{f_1} + \dfrac{\alpha_3}{f_3} = 0, \\ \dfrac{\alpha_2}{f_2} + \dfrac{\alpha_4}{f_4} = 0 ; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{f_1} + \dfrac{\alpha_4}{f_4} = 0, \\ \dfrac{\alpha_2}{f_2} + \dfrac{\alpha_3}{f_3} = 0. \end{cases}$$

Les droites l_2, l_3, l_4 appartiennent évidemment à la surface de Simson ; ce sont les diagonales du quadrilatère complet suivant lequel le tétraèdre T est coupé par le plan polaire de L (plan de Lhuilier) :

$$\frac{\alpha_1}{f_1} + \frac{\alpha_2}{f_2} + \frac{\alpha_3}{f_3} + \frac{\alpha_4}{f_4} = 0.$$

Elles se coupent deux à deux en trois points ayant pour coordonnées

$$(f_1, -f_2, -f_3, f_4), (f_1, f_2, -f_3, -f_4), (f_1, -f_2, f_3, -f_4) ;$$

les projections de ces points sur les faces de T sont les sommets de trois parallélogrammes dont les côtés sont parallèles aux perpendiculaires communes aux couples d'arêtes opposées de T.

9. Supposons ensuite les droites B_1B_2, B_3B_4 perpendiculaires.

Les plans A_3A_4C, A_1A_2C étant également perpendiculaires, le lieu de C est un hyperboloïde orthogonal V_2. On obtient deux autres hyperboloïdes orthogonaux V_3, V_4 lorsque les droites B_1B_3 et B_2B_4 ou B_1B_4 et B_2B_3 sont perpendiculaires. Les trois hyperboloïdes V_2, V_3, V_4 se coupent suivant une même biquadratique gauche Γ *(biquadratique de Schröter)* ; car si un tétraèdre a deux couples d'arêtes opposées perpendiculaires, les arêtes restantes sont également perpendiculaires.

Les hyperboloïdes V_2, V_3, V_4 se transforment par inversion tétraédrique en trois hyperboloïdes V'_2, V'_3, V'_4 qui sont les lieux des points B dont les tétraèdres podaires ont deux arêtes opposées perpendiculaires. Ces nouveaux hyperboloïdes se coupent suivant une même biquadratique gauche Γ', qui est l'inverse de la courbe de Schröter.

Posons

$$C_2 = c_{12}\,\alpha_1\alpha_2 + c_{34}\alpha_3\alpha_4,\ C_3 = c_{13}\alpha_1\alpha_3 + c_{24}\alpha_2\alpha_4,\ \dots\ ;$$

les équations de V'_2, V'_3, V'_4 seront

$$C_3 - C_4 = 0,\ C_4 - C_2 = 0,\ C_2 - C_3 = 0\ ;$$

et celles de Γ',

$$C_2 = C_3 = C_4.$$

Pour trouver les équations de Γ', on peut partir des égalités

$$b_{12}^2 + b_{34}^2 = b_{13}^2 + b_{24}^2 = b_{14}^2 + b_{23}^2$$

et remplacer b_{rs}^2 par

$$\alpha_r^2 + \alpha_s^2 + 2\alpha_r\alpha_s c_{rs}.$$

Les points de rencontre de Γ' avec la surface de Simson sont les inverses des points à l'infini de Γ ; les projections de l'un de ces points sur les faces de T sont les sommets et l'orthocentre d'un même triangle.

D'après ce qui précède, *le tétraèdre podaire de* T *par rapport à une sphère qui a pour centre un point quelconque de la courbe de Schröter, est orthocentrique.*

Si le tétraèdre T lui-même est orthocentrique, la courbe de Schröter se compose des quatre hauteurs de T, et la courbe Γ' est également constituée par les quatre droites suivant lesquelles se coupent les plans hauteurs des trièdres de T. Ce cas particulier s'établit facilement soit par la géométrie, soit au moyen des équations de Γ ou Γ' en tenant compte de la relation

$$c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23}.$$

10. Le lieu des points B tels que

$$B_1B_2 : B_3B_4 = p : p'$$

est évidemment la quadrique

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2c_{12})p'^2 = (\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + 2\alpha_3\alpha_4c_{34})p^2.$$

Pour préciser cette surface, soient P, Q les intersections des plans BB_1B_2, BB_3B_4 respectivement avec les arêtes A_3A_4, A_1A_2 ; comme BP, BQ sont les diamètres des cercles PB_1B_2, QB_3B_4, on a

$$B_1B_2 = BP \sin A_1A_2, \quad B_3B_4 = BQ \sin A_3A_4$$

et par suite

$$BP : BQ = p \sin A_3A_4 : p' \sin A_1A_2 = q : q',$$

q et q' étant des constantes.

Menons par A_1A_2 deux plans rectangulaires quelconques coupant A_3A_4 en E_3, E_4, et par A_3A_4 deux plans rectangulaires coupant A_1A_2 en E_1, E_2. En désignant par ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ϵ_4 les coordonnées normales de B dans le tétraèdre $E_1E_2E_3E_4$, le lieu de B a pour équations

$$(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)q'^2 = (\epsilon_3^2 + \epsilon_4^2)q^2.$$

Ce lieu est donc en général une quadrique réglée, autopolaire par rapport à tout tétraèdre ayant pour faces deux couples de plans rectangulaires menés par A_1A_2, A_3A_4.

Pour obtenir son équation en coordonnées rectangulaires, prenons pour axe des z la perpendiculaire KK′ commune aux arêtes A_1A_2 et A_3A_4, pour origine un point quelconque O de KK′. Soient

$$\begin{cases} z = d, \\ x \cos \delta + y \sin \delta = 0 ; \end{cases} \quad \begin{cases} z = d', \\ x \cos \delta' + y \sin \delta' = 0, \end{cases}$$

les équations de A_1A_2 et A_3A_4. L'équation de la quadrique sera maintenant

$$\begin{aligned} &[(z-d)^2 + (x \cos \delta + y \sin \delta)^2]q'^2 \\ &= [(z-d')^2 + (x \cos \delta' + y \sin \delta')^2]q^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Si q est différent de q', on la ramène à la forme canonique

$$(q'^2 \cos^2 \delta - q^2 \cos^2 \delta')x^2 + (q'^2 \sin^2 \delta - q^2 \sin^2 \delta')y^2 + (q'^2 - q^2)z^2$$

$$= q^2d'^2 - q'^2d^2,$$

en choisissant les axes de manière que l'on ait

$$\frac{d}{d'} = \frac{q^2}{q'^2}, \quad \frac{\cos \delta}{\cos \delta'} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \delta'} = \frac{q^2}{q'^2}. \tag{6}$$

Le centre de la surface est le milieu de la distance des points qui divisent la distance KK′ harmoniquement dans le rapport $q : q'$. Menons par KK′ les plans δ, δ' dont les rapports de section relatifs aux plans zA_1A_2, zA_3A_4 sont égaux à $\pm \frac{q}{q'}$; les plans zx, zy sont les plans bissecteurs des dièdres formés par δ et δ', car leurs rapports de section relatifs aux plans zA_1A_2, zA_3A_4 sont égaux à $\pm \frac{\cos\delta}{\cos\delta'}, \frac{\sin\delta}{\sin\delta'}$, et l'équation (6) exprime que les plans forment avec les plans zA_1A_2, zA_3A_4 une involution ayant pour éléments doubles les plans δ et δ'.

Comme les coefficients de l'équation canonique satisfont à la relation

$$(q'^2 \cos^2 \delta - q^2 \cos^2 \delta') + (q'^2 \sin^2 \delta - q^2 \sin^2 \delta') - (q^2 - q'^2) = 0,$$

le lieu de B est un hyperboloïde orthogonal.

Supposons $q = q'$ et prenons pour origine le milieu de KK′, pour plans zx et zy les plans bissecteurs du dièdre $A_1KK'A_3$; l'équation du lieu de B sera le paraboloïde équilatère

$$(\cos^2 \delta - \cos^2 \delta')(x^2 - y^2) - 4dz = 0.$$

11. Si $B_1B_2 = B_3B_4$, le lieu de B est un hyperboloïde orthogonal ou un paraboloïde équilatère suivant que les dièdres A_1A_2, A_3A_4 ont des sinus inégaux ou égaux.

De même, aux égalités $B_1B_3 = B_2B_4$, $B_1B_4 = B_2B_3$ correspondent des quadriques réglées.

Le cas où le tétraèdre podaire a trois couples d'arêtes opposées égales, est particulièrement intéressant ; le point B est alors déterminé par l'intersection de trois quadriques.

Le tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$ est dit *isoscèle* ou *équifacial*. Comme il peut être superposé à lui-même en faisant coïncider avec la face $B_1B_2B_3$ successivement les faces $B_1B_3B_2$, $B_3B_2B_1$, $B_2B_1B_3$, on voit que le centre de gravité est en même temps le centre de la sphère circonscrite et celui de la sphère inscrite. Les milieux des six arêtes sont les sommets de trois losanges ; par conséquent, les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées sont les plus courtes distances de ces arêtes, sont perpendiculaires deux à deux et divisent en deux parties égales les angles sous lesquels on voit du centre de gravité les arêtes correspondantes.

Soit C l'inverse du point B dont le tétraèdre podaire par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ est équifacial. Les dièdres opposés d'un tétraèdre équifacial étant égaux, les angles A_1CA_2 et A_3CA_4, A_1CA_3 et A_2CA_4, A_1CA_4 et A_2CA_3 sont égaux ou supplémentaires. Portons sur CA_1, CA_2, CA_3, CA_4 ou sur leurs prolongements au delà de C quatre longueurs égales CD_1, CD_2, CD_3, CD_4, les sens étant choisis de manière que C soit intérieur au tétraèdre $D_1D_2D_3D_4$; ce solide étant équifacial, les droites menées par C et s'appuyant sur deux arêtes opposées de $A_1A_2A_3A_4$ sont deux à deux rectangulaires et sont des bissectrices des angles sous lesquels on voit de C les arêtes correspondantes.

Si le point C est intérieur au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, il résout le problème suivant : *Trouver un point* M *dont la somme des distances aux sommets d'un tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$ *soit minimum.* En effet, soient (x_r, y_r, z_r) les coordonnées rectangulaires de A_r, (x, y, z) celles de M, $(\lambda_r, \mu_r, \nu_r)$ les angles de CA_r avec les axes coordonnés, enfin ρ_r la distance CA_r. Le minimum de

$$\sum \rho_r = \sum \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1) + (z - z_1)^2}$$

exige

$$\sum \frac{x - x_1}{\rho_r} = 0, \quad \sum \frac{y - y_1}{\rho_1} = 0, \quad \sum \frac{z - z_1}{\rho_1}, \qquad (7)$$

relations équivalentes à celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda_1 + \cos\lambda_2 + \cos\lambda_3 + \cos\lambda_4 = 0, \\ \cos\mu_1 + \cos\mu_2 + \cos\mu_3 + \cos\mu_4 = 0, \\ \cos\nu_1 + \cos\nu_2 + \cos\nu_3 + \cos\nu_4 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

En mettant les équations (7) sous la forme

$$x = \sum \frac{x_1}{\rho_1} : \sum \frac{1}{\rho_1}, \quad y = \sum \frac{y_1}{\rho_1} : \frac{1}{\rho_1}, \dots$$

on voit que M est le centre de gravité des points A_1, A_2, A_3, A_4 pour des masses inversement proportionnelles aux distances MA_1, MA_2, MA_3, MA_4.

Les équations (8) admettent l'interprétation suivante : Si l'on porte sur MA_1, MA_2, MA_3, MA_4 quatre distances égales MD_1, MD_2, MD_3, MD_4, M est le centre de gravité des points D_1, D_2, D_3, D_4.

Transposons les deux derniers termes de chacune des équations (8) et faisons ensuite la somme des carrés de ces égalités ainsi modifiées ; nous aurons $\cos(\rho_1\rho_2) = \cos(\rho_3\rho_4)$. Par analogie, $\cos(\rho_1\rho_3) = \cos(\rho_2\rho_4)$, $\cos(\rho_1\rho_4) = \cos(\rho_2\rho_3)$.

Par conséquent, le point C résout le problème du minimum.

Remarquons encore la formule suivante qui résulte des égalités (8) :

$$\cos(\rho_2\rho_3) + \cos(\rho_3\rho_4) + \cos(\rho_4\rho_2) = -1.$$

La discussion complète de la question est assez délicate.

12. A tout point V du plan d'un triangle $A_1A_2A_3$ correspond un point V′ dont le triangle podaire est symétriquement semblable à celui de V ; les distances de V′ aux points A_1, A_2, A_3 sont proportionnelles à ceux de V à ces points. Soient N_1, N_2, N_3 les points où la circonférence $A_1A_2A_3$ recoupe les droites VA_1, VA_2, VA_3, et soient N'_1, N'_2, N'_3 ceux où elle recoupe $V'A_1$, $V'A_2$, $V'A_3$; les triangles $N_1N_2N_3$, $N_1'N_2'N_3'$ (triangles *métaharmoniques* de $A_1A_2A_3$ par rapport à V et V′) sont respectivement semblables aux triangles podaires de V et V′ ; par suite, ils sont inversement semblables. Cette dernière proposition seule peut se transporter au tétraèdre.

En effet, cherchons d'abord un point V dont les distances aux sommets du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4 = T$ soient proportionnelles à des nombres donnés ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4. Le lieu des points dont les distances aux points A_r, A_s sont dans le rapport $\rho_r : \rho_s$ est la sphère qui a pour diamètre la distance des points J_{rs}, J'_{rs} qui divisent l'arête A_rA_s additivement et soustractivement dans le rapport $\rho_r : \rho_s$; soit J''_{rs} le centre de cette sphère. Remarquons immédiatement que les six plans tels que $A_uA_vJ_{rs}$ passent par un même point J de coordonnées barycentriques ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 ; les six points J'_{rs} sont situés dans le plan polaire de J par rapport à T ; enfin, les six points J''_{rs} sont situés dans le plan polaire du point J′ de coordonnées barycentriques ρ_1^2, ρ_2^2, ρ_3^2, ρ_4^2.

Les six sphères J''_{rs} sont orthogonales à la sphère $A_1A_2A_3A_4$ dont le centre et le rayon seront désignés par les lettres O et R ; elles se coupent donc en deux points V, V′ qui divisent harmoniquement un même diamètre de la sphère O, et l'on a

$$VA_1 : VA_2 : VA_3 : VA_4 = V'A_1 : V'A_2 : V'A_3\ V'A_4$$
$$= \rho_1 : \rho_2 : \rho_3 : \rho_4.$$

Les droites VA_1, VA_2, VA_3, VA_4 rencontrent la sphère O en des points N_1, N_2, N_3, N_4, et les droites $V'A_1$, $V'A_2$, $V'A_3$, $V'A_4$ la coupent en des points N'_1, N'_2, N'_3, N'_4. Soient P, P′ les puissances de V, V′ par rapport à la sphère O, et $p : p'$ le rapport $VA_1 : V'A_1$. Des triangles semblables donnent

$$\frac{N_1N_2}{A_1A_2} = \frac{VN_1}{VA_2} = \frac{VN_1 \cdot VA_1}{VA_2 \cdot VA_1} = \frac{P}{VA_1 \cdot VA_2},$$
$$\frac{N'_1N'_2}{A_1A_2} = \frac{P'}{V'A_1 \cdot V'A_2};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{N_1N_2}{N'_1N'_2} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{V'A_1}{VA_1} \cdot \frac{V'A_2}{VA_2} = \frac{Pp'^2}{P'p^2}.$$

Par conséquent, les tétraèdres $N_1N_2N_3N_4$, $N'_1N'_2N'_3N'_4$ ont leurs arêtes homologues proportionnelles, et comme les points V, V′ sont l'un intérieur et l'autre extérieur à la sphère O, les deux tétraèdres sont symétriquement semblables.

13. Les plans bissecteurs du dièdre A_uA_v de T rencontrent l'arête A_rA_s en des points F_{rs}, F'_{rs} qui divisent A_rA_s harmoniquement dans le rapport des faces adjacentes f_r, f_s. Les bissecteurs intérieurs des six dièdres se coupent au centre I de la sphère inscrite à T, dont les coordonnées barycentriques sont f_1, f_2, f_3, f_4 ; les six points F'_{rs} sont situés dans le plan polaire de I. Les six sphères décrites sur les distances F_{rs}, F'_{rs} comme diamètres peuvent être appelées *sphères d'Apollonius* de T ; elles se coupent en deux points W, W′ qui vérifient les égalités

$$WA_1 \cdot f_1 = WA_2 \cdot f_2 = WA_3 \cdot f_3 = WA_4 \cdot f_4,$$
$$W'A_1 \cdot f_1 = W'A_2 \cdot f_2 = W'A_3 \cdot f_3 = WA_4 \cdot f_4.$$

Leurs centres F''_{rs} appartiennent au plan polaire du point de Lhuilier par rapport à T.

Il resterait à étudier les propriétés des tétraèdres podaires et des tétraèdres métaharmoniques des points W, W′.

DESCRIPTION

DE NOUVEAUX

Dryinides et Belytides d'Amérique

par l'Abbé J. J. KIEFFER
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR A BITCHE

I. DRYINIDAE

Prodryinus striaticeps n. sp.

♀ Noir ; clypeus, mandibules, dessous des deux premiers articles antennaires et trochanters blancs ; prothorax d'un blanc jaunâtre ; trois derniers articles antennaires, hanches et pattes rousses, tous les tarses, extrémité des fémurs postérieurs et tibias postérieurs plus sombres, dessus des tibias postérieurs blanchâtre dans la moitié basale ; tergites 3-6 bordés postérieurement de blanc sale ; une bande transversale de même couleur se voit sur ces mêmes segments près du bord postérieur ; en leur milieu, ces bandes sont rétrécies en lignes et courbées en arrière où elles touchent presque la fine bande qui forme le bord. Tête beaucoup plus large que le thorax, plus de deux fois aussi large que longue, découpée en arc postérieurement ; vertex plan, très enfoncé entre les yeux, parcouru par des stries denses, profondes, longitudinales et dépassant l'ocelle antérieur ; ocelles postérieurs se touchant presque, situés contre le bord occipital et aussi distants des yeux que de l'antérieur dont ils sont séparés par une distance égalant trois fois leur diamètre ; face lisse ; clypeus plan et semicirculaire ; joues lisses, séparées des tempes par un sillon ; bas des tempes trois fois aussi large que la partie supérieure, densément strié en travers, la partie supérieure lisse et luisante. Aux palpes maxillaires on voit quatre longs articles, dont trois après la flexion ; les labiaux non proéminents. Antennes atteignant les écaillettes, insérées contre le clypeus dans une large dépression qui occupe tout le devant de la face ; scape arqué, deux fois aussi long que le deuxième article, qui est un peu plus long que gros ; flagellum un peu épaissi au milieu, son premier article un peu plus long que les deux suivants réunis, le deuxième trois fois aussi long que gros ; les suivants graduellement raccourcis ; l'avant-dernier encore un peu plus long que gros. Prothorax beaucoup plus étroit que le mésothorax, un peu plus long que large, sa partie dorsale comprimée en une carène obtuse qui atteint sa plus grande hauteur un peu après le milieu ; angles postérieurs du pronotum prolongés et empiétant sur le mesonotum, mais n'atteignant pas les écaillettes ; surface du pronotum parcourue par des stries fines, transversales et obliques en arrière. Le mésothorax et le métathorax réunis sont de moitié plus longs que gros et d'égale largeur, grossièrement ridés-réticulés, sauf sur le sternum et sur une partie transversale et petite, située sur le devant du mesonotum entre les deux lobes du pronotum, laquelle est lisse et brillante. Mesonotum transversal, sans trace de sillons parapsidaux, mais avec trois arêtes longitudinales qui se distinguent peu des rides qui forment la réticulation. Scutellum sans fossette. Segment médian transversal, retombant perpendiculairement en arrière. Ailes hyalines ; moitié basale de la cellule médiane, une tache circulaire située à l'extrémité distale de la cellule sous-médiane, et une large bande transversale qui s'étend du milieu du stigma jusqu'à l'extrémité du radius, brunes ; bande transversale depuis l'extrémité des cellules basales jusqu'au milieu du stigma, blanche ; sans autres nervures que le radius et les nervures formant les cellules basales ; stigma lancéolé, trois fois aussi long que large, blanc dans sa moitié basale, dépassé de toute sa longueur par la nervure costale ; basale atteignant le stigma ; radius brisé en angle, sa partie distale un peu plus courte que la proximale ; une fausse nervure, visible par transparence, arquée par en haut et très longue, unit le radius au bord alaire assez près de l'extrémité. Hanches antérieures coniques, presque deux fois aussi longues que les postérieures ; leurs trochanters en massue, d'un tiers plus courts que les fémurs ; métatarse antérieur et quatrième article longs ; les autres très courts ; branche interne de la pince (prolongement basal du cinquième article tarsal) presque droite, arquée à l'extrémité où elle porte une petite dent ; tout le dessous muni de lamelles alignées et peu denses ; branche externe (ou crochet tarsal) à peine incurvée à l'extrémité, avec deux rangées de lamelles alignées. Segment anal de l'abdomen comprimé assez fortement. Taille : 6-7 mm. Patrie : Brésil : Para (Collection de M. Baker).

Trichogonatopus n. g. **rubriceps** n. sp.

♀ Noir ; tête, antennes sauf les articles 5-9, pattes antérieures sauf la base des hanches, le dessus de la massue des fémurs et une tache sur le dessous, tibias et tarses des quatre autres pattes d'un roux jaune ; thorax et massue des fémurs avec des poils longs et dressés, reste des pattes à pilosité plus courte ; abdomen à poils longs et appliqués. Tête très transversale, fortement découpée en arc en arrière, où elle a sa plus grande largeur, mate et chagrinée ; vertex excavé, avec une faible arête longitudinale et médiane. Yeux glabres, 3-4 fois aussi longs que les joues. Mandibules tridentées. Palpes maxillaires avec cinq articles proéminents (donc de six articles), les labiaux non proéminents, par conséquent très courts. Scape gros, presque trois fois aussi long que gros ; 2e article de moitié plus long que gros, 3e mince et un peu plus de deux fois aussi long que le 4e, celui-ci un peu plus long que le scape, graduellement épaissi jusqu'au sommet, où il est quatre fois aussi long que gros ; les suivants d'égale grosseur, graduellement raccourcis ; 9e deux fois aussi long que gros, un peu plus court que le 10e ; tous sans pubescence apparente. Thorax mat et chagriné ; nœud antérieur comprimé sur sa partie médiane, déprimé sur ses côtés, à peine plus long que large vu d'en haut, portant sur le dessous les pattes antérieures ; nœud postérieur piriforme, sans pétiole mais graduellement grossi d'avant en arrière, de moitié plus long que l'antérieur, sans trace de suture latérale, avec un stigmate de chaque côté un peu avant le milieu ; segment médian lisse et brillant, petit, perpendiculaire.

Trochanters antérieurs pas plus longs que les hanches, qui sont deux fois et demie aussi longues que grosses ; fémur antérieur presque deux fois aussi long que le trochanter ; articles tarsaux 1 et 4 longs ; 2, 3 et 5 courts ; pince atteignant la base du 2e article ; branche interne (ou prolongement basal du 5e article tarsal) fortement incurvée à l'extrémité, découpée en arc au côté interne dans sa moitié basale et sous l'extrémité, armée de rangées de lamelles ; branche externe (un des crochets tarsaux) un peu plus courte, élargie et presque droite dans le milieu ou les deux tiers proximaux, amincie, faiblement arquée et assombrie dans sa partie distale, la partie élargie est armée de lamelles au côté interne. Aux pattes postérieures, la partie amincie du fémur est aussi longue que la partie renflée, le tibia est beaucoup plus long que le fémur et très mince sauf à son quart distal, qui est un peu plus gros ; métatarse presque double du 2e article, qui est quatre fois aussi long que gros, 4e article de moitié plus long que gros, un peu cordiforme au bout, 5e égal au 3e mais plus gros ; crochets arqués, avec une dent à leur base. Abdomen long, lisse et brillant, un peu comprimé à l'extrémité. Taille : 6 mm.— Patrie : Colombie, Bogota (Lindig) ; type au Musée zoologique de Berlin.

Trichogonatopus bogotensis n. sp.

♀ Noir, mat et chagriné ; clypeus, mandibules, antennes sauf les articles 5-10, aux pattes antérieures les hanches et les trochanters en partie, les genoux, le côté interne des tibias et les quatre derniers articles tarsaux avec la pince, aux quatre autres pattes les trochanters et les tarses, d'un roux jaunâtre ou brunâtre. Tête, palpes, antennes comme chez le précédent, sauf que l'article 9 des antennes est seulement de moitié plus long que gros. Thorax, massue des fémurs, et tibias avec des poils longs et dressés ; thorax conformé comme chez le précédent, sauf que la partie déclive et postérieure du 2e nœud est striée en travers. Pattes et pince comme chez le précédent, sauf que le métatarse postérieur est plus de deux fois aussi long que le 2e article. Abdomen lisse et brillant. Taille : 5 mm. — Patrie : Colombie, Bogota (Lindig) ; type au Musée de Berlin.

II. BELYTIDES

Macrohynnis americanus n. sp.

♀ Noir ; trois premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes d'un jaune clair ; le reste des antennes d'un brun noir comme le thorax ; abdomen, sauf le pétiole, d'un roux marron. Tête vue de côté plus haute que longue, triangulaire ; yeux velus. Antennes grêles, plus longues que le corps ; scape égal au 3ᵉ article, mais un peu plus gros ; 2ᵉ à peine plus long que gros ; 3ᵉ plus long que le 4ᵉ, qui est quatre fois aussi long que gros ; les suivants graduellement raccourcis ; 14ᵉ encore presque deux fois aussi long que gros, plus court que le 15ᵉ. Pronotum perpendiculaire. Ailes hyalines ; basale oblique, plus longue que sa distance de la marginale ; celle-ci deux fois aussi longue que la cellule radiale, plus longue que la basale ; récurrente droite, dirigée vers le milieu de la basale ; cellule radiale petite, dépassée de toute sa longueur par la postmarginale. Pétiole deux fois aussi long que gros, coriacé, non strié ; 2ᵉ segment piriforme, faiblement comprimé ; les trois suivants formant un tube assez gros, pas distinctement séparés ; les tergites recouvrent presque en entier les sternites, leurs bords se touchant presque. Taille : 2,8 mm. — Patrie : Jeannette, Pensylvanie (H. G. Klages). Ce genre était inconnu pour l'Amérique. (Collection de Baker).

Tropidopsilus laticeps n. sp.

♀ Noir ; mandibules, palpes, deux premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes d'un jaune rougeâtre ; flagellum brun. Tête trois fois aussi large que longue, plus large que le thorax ; vue de côté, deux fois aussi haute que longue ; yeux très velus, deux fois aussi longs que larges, atteignant presque les mandibules, qui sont grêles et croisées. Palpes grêles. Antennes filiformes, insérées distinctement avant le milieu des yeux. Pronotum non visible d'en haut ; mesonotum très convexe, parcouru par quatre arêtes longeant quatre sillons ; les deux sillons médians ou parapsidaux convergents en arrière ; lobe médian plus élevé que les deux latéraux. Scutellum avec une fossette profonde à sa base ; disque plus court que la fossette, proéminent en tubercule. Épine plus longue que le segment médian, un peu arquée ; angles postérieurs du segment médian prolongés en dent. Ailes faiblement teintées ; basale droite, plus longue que sa distance de la marginale, qui est au moins égale à la basale et de moitié plus longue que la cellule radiale ; celle-ci fermée et petite ; stigmatique très oblique ; récurrente droite, dirigée vers le milieu de la basale, aussi longue que la marginale. Ailes inférieures avec les nervures fortes. Pétiole un peu arqué, au moins quatre fois aussi long que gros, sa partie dorsale avec trois arêtes, intervalles lisses et brillants ; abdomen à peine plus long que le pétiole, un peu déprimé, subfusiforme, plus convexe sur le dessous, à sept tergites et six sternites ; base du second tergite sans sillon ; tarière un peu proéminente. Taille : 3,5 mm. — Patrie : Brésil, Para (Baker).

Camptopsilus nigriceps n. sp.

♀ D'un jaune rougeâtre ; tête et tiers postérieur de l'abdomen noirs ; face d'un roux brun ; mandibules, palpes et deux premiers articles antennaires jaunes ; flagellum et pétiole bruns. Tête trois fois aussi large que longue ; vue de côté, plus haute que longue ; yeux très brièvement velus, guère plus longs que larges. Antennes insérées avant le milieu des yeux, minces et filiformes ; scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 2^e article pas plus long que gros ; 3^e presque quatre fois aussi long que gros ; les suivants graduellement raccourcis ; 10^e encore presque de moitié plus long que gros ; 14^e pas plus long que gros, un peu plus court que le 15^e. Pronotum visible d'en haut, tronqué en arrière. Mesonotum convexe, lobe médian pas plus élevé que les latéraux ; sillons parapsidaux convergents en arrière ; scutellum à disque aussi long que la fossette, convexe. Épine plus longue que le segment médian, droite, presque perpendiculaire ; angles sans dent. Ailes subhyalines ; basale à peine aussi longue que sa distance de la marginale, qui est plus courte que la basale ; cellule radiale fermée, deux fois aussi longue que large, plus longue que la marginale, dépassée de toute sa longueur par la postmarginale ; récurrente aussi bien marquée que les autres, subitement courbée par en bas dès son origine et dirigée vers la nervure discoïdale ; stigmatique très oblique, plus courte que la marginale. Ailes inférieures à nervures fortes. Pétiole aussi long que l'abdomen, au moins quatre fois aussi long que gros, avec trois arètes dorsales ; abdomen fusiforme, non comprimé ni déprimé, composé de 6 ou 7 tergites ; base du grand tergite sans sillon. Taille : 4 mm. — Patrie : Cuba, Cayamas (Baker).

Genre ACIDOPSILUS n. g.

Yeux velus. Mandibules longues et croisées comme chez *Xenotoma.* Bord supérieur des propleures avec une gouttière qui longe le mesonotum. *Scutellum prolongé en arrière en une épine horizontale.* Metanotum et segment médian avec une arête longitudinale et médiane. Cellule radiale fermée, beaucoup plus longue que la nervure marginale.

Acidopsilus longicornis n. sp.

♂. Noir ; 2e article antennaire, mandibules, hanches et pattes d'un roux brunâtre ; abdomen d'un brun noir. Tête très transversale vue d'en haut, un peu transversale vue de devant, beaucoup plus haute que longue vue de côté ; yeux gros, de moitié plus longs que les joues. Antennes grêles et filiformes ; scape plus court que le 3e article, qui est six fois aussi long que gros ; 4e plus court que le 3e ; 10e article encore quatre fois aussi long que gros ; poils dressés, un peu plus courts que l'épaisseur des articles. Sillons parapsidaux très profonds. Scutellum avec une fossette basale occupant presque tout le dessus ; spinule égalant la moitié de la longueur du scutellum ; poils du scutellum blancs, dressés, assez denses, plus longs que la spinule. Angles du segment médian à peine proéminents. Ailes brunes; basale très arquée, aussi longue que sa distance de la marginale ; stigmatique très oblique, égale à la moitié de lam arginale ; cellule radiale longue, deux fois et demie aussi longue que la nervure marginale, dépassée de moitié par la postmarginale ; récurrente oblique, dirigée vers la discoïdale, un peu plus longue que la marginale. Fémurs en massue ;

tibias postérieurs subcylindriques, ciliés, à poils assez longs en dehors. Pétiole trois fois aussi long que gros, avec quatre arêtes ; abdomen subfusiforme, déprimé, un peu recourbé par en haut au bout, composé de sept tergites. Taille : 4 mm. — Patrie : Bolivie, Mapiri. (Type au Musée zoologique de Berlin).

Genre ODONTOPSILUS n. g.

Yeux velus ; mandibules longues et croisées comme chez *Xenotoma*. Thorax plus haut que large ; propleures enfoncées ; leur bord supérieur, à partir de l'écaillette, creusé en une gouttière qui longe le mesonotum et qui est bordé des deux côtés par une arête ; de même, les sillons parapsidaux sont bordés par une arête le long de leur côté interne ; le petit sillon, situé sur les côtés du mesonotum, près de l'écaillette, est bordé également par une arête sur chacun de ses côtés. *Bord postérieur du scutellum avec deux courtes dents dressées* et situées l'une près de l'autre ; en dessous de ces dents, le scutellum retombe presque perpendiculairement sur le metanotum ; ce dernier, ainsi que le segment médian, avec une arête longitudinale et médiane. Ailes inférieures avec une cellule fermée (les supérieures arrachées). Abdomen avec 7 ou 8 tergites chez le mâle.

Odontopsilus tenuicornis n. sp.

♂. Noir ; mandibules, 2e article antennaire, écaillettes, hanches et pattes postérieures d'un roux brun, les quatre autres pattes d'un roux clair. Tête vue d'en haut, deux fois aussi large que longue ; vue de devant, un peu transversale ; vue de côté, plus haute que longue. Yeux presque deux fois aussi longs que les joues. Antennes filiformes et grêles ; scape cylindrique, beaucoup plus court que le 3e article ; 2e article pas plus long que gros ; 3e plus long que le 4e, qui est cinq fois aussi long que gros ; 6e encore quatre fois ; les suivants brisés ; 3e et 4e sans trace d'échancrure ; poils dressés, aussi longs que l'épaisseur des articles. Fémurs en massue ; subglabres ; tibias postérieurs graduellement et très faiblement grossis, ciliés en dedans, pubescents comme les tarses. Pétiole quatre fois aussi long que gros, traversé par quatre arêtes ; abdomen un peu déprimé, graduellement aminci en avant, la base du grand tergite est brièvement striée ; tergites 3-7 ou 3-8 très courts. Taille : 3,8 mm. -- Patrie : Pérou, environs du fleuve Pachitée. (Type au Musée zoologique de Berlin).

Genre DISSOXYLABIS n. g.

Yeux glabres. Antennes du mâle avec le *4e article découpé.* Thorax plus haut que large ; pronotum non visible d'en haut ; sillons parapsidaux convergents en arrière ; disque du scutellum très convexe ; *metanotum avec deux spinules* courtes et droites, situées l'une à côté de l'autre ; segment médian avec une arête médiane. Cellule radiale ouverte au bord ; nervure marginale pas plus longue que la stigmatique ; ailes inférieures avec une cellule fermée. Abdomen à six tergites distincts.

Dissoxylabis hirtipes n. sp.

♂. Noir ; trochanters et aux pattes antérieures, les tibias et les tarses d'un roux brun ; parfois l'extrémité des hanches et les pattes sont rousses, avec la partie renflée des fémurs et des tibias noire. Corps lisse et brillant, parsemé de longs poils dressés. Tête vue d'en haut, deux fois aussi large que longue ; vue de côté, plus haute que longue ; yeux gros, très proéminents, 2-3 fois aussi longs que les joues ; clypeus en verrue aiguë ; face avec une arête qui s'étend du clypeus jusqu'entre les antennes ; palpes blancs, très longs, les maxillaires de 5, les labiaux de 3 articles. Antennes filiformes ; scape plus long que les articles 2 et 3 réunis, cylindrique et longuement poilu ; 2e article pas plus long que gros ; 4e un peu plus court que le 3e, trois fois plus long que gros, proéminent sous forme de dent au milieu, de là jusqu'à la base faiblement découpé ; 5e article deux fois aussi long que gros ; 9e à peine plus long que gros (les autres brisés). Ailes brunâtres avec une petite tache plus sombre sous la nervure marginale ; costale et sous-costale bien marquées ; basale oblique, d'un tiers plus longue que sa distance de la marginale ; marginale en forme de stigma gros et carré ; stigmatique oblique, aussi longue que la marginale ; radius faiblement marqué, un peu arqué, triple de la basale, atteignant le bord alaire ; discoïdale et anale faiblement marquées. Fémurs en massue ; tibias postérieurs graduellement et très faiblement grossis de la base à l'extrémité, leur côté externe ainsi que celui du métatarse avec des poils dressés, deux fois aussi longs que leur épaisseur, leur côté interne avec des poils courts et alignés, métatarse égalant presque la moitié du tibia. Pétiole 3-4 fois aussi long que gros, avec quatre arêtes ; abdomen déprimé, graduellement aminci en avant, où le grand tergite a, de chaque côté, une légère impression allongée ; tergites 3 et 4 très petits ; 5e presque égal aux 3e et 4e réunis ; 6e en forme de minime lobe. Taille : 3,5 mm. — Patrie : Bolivie. Mapiri ; Pérou, Marcapata. (Types au Musée zoologique de Berlin).

Genre ANOXYLABIS n. g.

Yeux velus : *Mandibules longues et croisées* comme chez *Xenotoma*. Thorax plus haut que large ; mesonotum et disque du scutellum très convexes, ce dernier arrondi en arrière ; *metanotum avec une petite dent ;* segment médian à arête simple. Cellule radiale fermée, plus longue que la nervure marginale. Pétiole court.

Anoxylabis laticeps, n. sp.

♂. Noir et pubescent ; mandibules, hanches et pattes d'un roux clair ; 2e article antennaire, hanches postérieures sauf l'extrémité, pattes postérieures sauf les trochanters, d'un roux brun. Tête très transversale, trois fois aussi large que longue, vue d'en haut ; transversale, vue de devant ; yeux trois fois aussi longs que les joues. Antennes filiformes, à poils dressés et plus courts que l'épaisseur des articles ; scape cylindrique, aussi long que le 3e article ; 2e article globuleux ; 3e non échancré à sa base, au moins quatre fois aussi long que gros ; 4e au moins trois fois ; 10e encore deux fois et demie. Ailes brunâtres ; basale oblique, aussi longue que sa distance de la marginale ; cellule radiale au moins de moitié plus longue que la nervure marginale, à peine dépassée par la postmarginale ; stigmatique oblique, égalant la moitié de la marginale, qui est égale à la basale ; récurrente continuant la direction du radius, égale à la marginale, dirigée vers la basale. Pattes comme chez *Oxylabis*. Pétiole strié, deux fois aussi long que gros ; abdomen déprimé, ellipsoïdal ; tergites 3-6 très courts ; 7e plus long que le 6e ; les derniers segments non incurvés, mais un peu recourbés par en haut. Taille : 3,5 mm. — Bolivie : Mapiri. (Type au Musée zoologique de Berlin).

Genre PROSOXYLABIS n. g.

Yeux à poils longs et denses ; mandibules longues et croisées comme chez *Xenotoma*, avec une grosse dent obtuse, au milieu, moitié distale falciforme. Thorax plus haut que large ; mesonotum très convexe ; sillons parapsidaux bordés par une arête le long de leur côté interne, le petit sillon situé près des écaillettes est bordé de la même façon ; deux autres arêtes moins proéminentes et parallèles se trouvent en avant, entre les sillons parapsidaux ; extrémité *du scutellum, vue de côté, en dent obtuse ; metanotum avec une dent obtuse* ; arête du segment médian simple ; bord supérieur des propleures avec un sillon, qui longe le mesonotum depuis les écaillettes. Cellule radiale fermée, à peine plus longue que la moitié de la nervure marginale.

Prosoxylabis maculipennis n. sp.

♀. Noir et pubescent ; mandibules rousses ; antennes d'un brun noir ; 2e article, hanches et pattes d'un roux brun, articulations et tarses jaunes. Tête plus large que le thorax, trois fois aussi large que longue, vue d'en haut ; clypeus en coussinet ; yeux très grands et gros, atteignant le bord occipital et presque les mandibules, front moins large que les yeux, grêles, minces, non épaissies distalement, composées de quinze articles ; scape un peu arqué, cylindrique, égal aux articles 2 et 3 réunis ; 2e article pas plus long que gros ; 3e égal aux 4e et 5e réunis ; 4e trois fois aussi long que gros ; 5e 2 1/2 fois ; 8e encore de moitié plus long que gros ; 9-14 pas plus longs que gros ; 15e un peu plus long que le 14e. Ailes hyalines ou blanchâtres, tachetées de brun ; quart apical brun ; une tache triangulaire brune a son origine à la nervure stigmatique et s'étend, en s'élargissant, jusqu'au bord postérieur de l'aile ; nervure basale un peu plus longue que sa distance de la marginale ; celle-ci très longue ; cellule radiale dépassée de sa longueur par la postmarginale ; stigmatique oblique, égalant la moitié du radius ; récurrente oblique, plus longue que le radius, dont elle continue la direction, dirigée vers la basale. Pattes à fémurs en massue ; tibias postérieurs graduellement et très faiblement grossis. Pétiole aussi long que l'abdomen, au moins six fois aussi long que gros, avec quatre arètes ; abdomen subfusiforme, un peu déprimé, fortement convexe ventralement ; tergites 3-6 également courts ; 7^e (ou 7^e soudé au 8^e) assez fortement comprimé, aussi long que les trois précédents réunis. Taille : 4 mm. — Bolivie : Mapiri. (Type au Musée zoologique de Berlin).

Genre MONOXYLABIS n. g.

Yeux velus. Mandibules petites. Thorax plus haut que large ; *scutellum vu d'en haut, triangulaire*, aigu, avec une fossette occupant presque tout le dessus ; vu de côté, proéminent en forme de dent oblique ; *metanotum avec une spinule longue et un peu arquée* ; segment médian avec une arète médiane. Cellule radiale fermée, un peu plus courte que la nervure marginale ; ailes inférieures avec une cellule fermée. Abdomen composé de 8 tergites et de 8 sternites ; pétiole très long.

Monoxylabis flavimanus n. sp.

♂. Noir ; palpes blanchâtres et longs ; écaillettes, hanches et pattes postérieures d'un roux brun, les quatre pattes antérieures d'un roux clair, tarses antérieurs jaunes. Tête trois fois aussi large que longue ; vue de côté, beaucoup plus haute que longue ; vue de devant, transversale ; yeux gros, 2-3 fois aussi longs que les joues. Antennes grêles, filiformes et pubescentes ; scape aussi long que le 3^e article, mais plus gros ; 2^e article globuleux ; 3^e 4-5 fois aussi long que gros, distinctement échancré au tiers basal ; 11^e encore 2 1/2 fois aussi long que gros (les autres brisés). Sillons parapsidaux profonds. Angles postérieurs du segment médian avec une dent très petite. Ailes brunâtres ; basale oblique, aussi longue que sa distance de la marginale ; nervure marginale un peu plus longue que la basale ; stigmatique un peu oblique ;

cellule radiale un peu plus courte que la marginale, dépassée de presque toute sa longueur par la postmarginale ; récurrente peu marquée, dirigée obliquement vers la base de la basale ; discoïdale et anale percurrentes. Fémurs en massue ; tibias postérieurs subcylindriques, sans longs poils. Pétiole cinq fois aussi long que gros, avec quatre arêtes ; abdomen ovoïdal, déprimé. Taille : 3,8 mm. — Bolivie : Mapiri. (Type au Musée zoologique de Berlin).

Genre Oxylabis Först

1. Marginale 3-4 fois aussi longue que la stigmatique ; cellule radiale fermée . . . . 1. *O. neotropica* n. sp. ♀.
— Marginale au maximum deux fois aussi longue que la stigmatique . . . . 2.
2. Cellule radiale fermée . . . . *O. californica* Kieff. ♀.
— Cellule radiale ouverte. . . . 3.
3. Segment médian avec un tubercule ; front avec une arête longitudinale ; stries du grand tergite très courtes . . . . 2. *O. carinifrons* n. sp. ♂.
— Segment médian armé d'une épine ; front coriacé, sans arête ; stries du grand tergite fortes, égalant la moitié de la longueur du pétiole . . . . 4.
4. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3e article découpé très faiblement et non en arc, dans sa moitié basale ; spinule forte. (Six exemplaires mâles ; même localité que les exemplaires typiques) . . . . *O. klagesi* Kieff. ♂.
— Scape à peine égal au 3e article, qui est fortement découpé en arc dans sa moitié basale ; spinule très petite . . . . 3. *O. arcuata* n. sp. ♂.

1. **Oxylabis neotropica** n. sp.

♀. Noir ; mandibules, hanches et pattes d'un roux jaune, antennes et hanches postérieures d'un roux brunâtre. Tête plus haute que longue, vue de côté ; un peu plus haute que large, vue de devant ; yeux velus, un peu plus courts que les joues ; mandibules petites. Scape cylindrique, aussi long que les trois articles suivants réunis ; 3e article presque trois fois aussi long que gros ; 2e et 4e de moitié plus longs que gros ; 5e et 14e subglobuleux ou un peu transversaux ; 15e en ovoïde court. Thorax plus haut que large ; metanotum avec une petite dent pointue. Ailes brunâtres ; basale arquée; marginale 3-4 fois aussi longue que la stigmatique, qui est presque perpendiculaire ; cellule radiale fermée, un peu dépassée par la postmarginale, un peu plus courte que la nervure marginale ; récurrente oblique, dirigée vers la discoïdale. Pétiole ridé en long, de moitié plus long que gros ; abdomen ellipsoïdal, déprimé, composé de huit tergites. Taille : 3,5 mm. — Patrie : Bolivie, Mapiri. (Type au Musée zoologique de Berlin).

2. **Oxylabis carinifrons** n. sp.

♂. Noir ; mandibules et deux premiers articles antennaires roux ; flagellum bruni, écaillettes d'un brun marron ; hanches et pattes jaunes. Front avec une arête qui s'étend du clypeus jusqu'entre les antennes. Scape à peine aussi long que le 3e article, qui est trois fois aussi long que gros et faiblement échancré dans moins de sa moitié basale ; 13e encore deux fois aussi long que gros. Segment médian avec un tubercule aminci supérieurement ; angles postérieurs non prolongés en dent. Marginale égale à la basale, double de la stigmatique, qui est oblique ; postmarginale égale au radius, celui-ci est bien marqué, double de la basale, et atteint le bord alaire ou bien s'arrête très près du bord alaire ; récurrente bien marquée, dirigée vers la basale, un peu plus longue que la marginale. Pétiole pas plus long que gros, avec cinq arêtes ; grand tergite avec un sillon égal au pétiole et des stries très courtes ; grand sternite avec des stries fortes et plus longues que le pétiole. Taille : 3,5 mm. — Wisconsin : Polk. (Baker).

3. **Oxylabis arcuata** n. sp.

♂. Noir ; deux premiers articles antennaires et base du 3ᵉ, écaillettes, hanches et pattes jaunes, reste des antennes graduellement bruni ; moitié antérieure de l'abdomen d'un roux marron sombre. Front coriacé. Scape à peine aussi long que le 3ᵉ article, qui est fortement découpé en arc dans sa moitié basale puis ressortant sous forme de dent ; 4ᵉ article plus court que le 3ᵉ, trois fois aussi long que gros ; 13ᵉ encore plus de deux fois aussi long que gros. Segment médian avec une spinule dressée et très petite. Marginale double de la stigmatique, qui est un peu oblique ; radius n'atteignant pas le bord, égal à la postmarginale, de moitié plus longue que la basale ; récurrente un peu plus longue que la marginale, dirigée vers la basale. Pétiole un peu plus long que gros, traversé par des arêtes ; stries du grand tergite fortes, égales à la moitié du pétiole. Taille : 2,8 mm. — Pensylvanie : Jeannette (Baker).

Genre Aclista Först.

1. Tibias antérieurs fortement découpés latéralement et proéminents en dent. *(Zygota)* . . . 2.
— Tibias antérieurs non découpés ni armés d'une dent . . . . 3.
2. Base du grand tergite non striée ; 3ᵉ article antennaire découpé en arc dans son tiers basal . . . 1. *A. (z.) arcuata* n. sp. ♂.
— Base du grand tergite avec des stries égalant les deux tiers du pétiole ; 3ᵉ article antennaire faiblement échancré dans le tiers basal . . . . 2. *A. (z.) emarginata* n. sp. ♂.
3. Pétiole lisse ; tête et thorax noirs, abdomen marron . . . . . 3. *A. levistylus* n. sp. ♂.
— Pétiole strié ; abdomen noir ou corps d'un roux marron . . . 4.
4. Corps d'un roux marron ; 3ᵉ ar-

ticle antennaire échancré dans sa moitié basale . . . . 4. *A. insignis* n. sp. ♂.
— Corps noir ; 3^e article antennaire du mâle échancré au tiers ou quart basal . . . . 5.
5. Radius très court, oblique, égal à la stigmatique. . . . . . 6.
— Radius long, au moins deux fois aussi long que la stigmatique. . 7.
6. Base du grand tergite non striée ; récurrente distincte. . . . . 5. *A. microneura* n. sp. ♂.
— Base du grand tergite striée ; récurrente non marquée . . . 6. *A. polyrhytis* n. sp. ♀.
7. Stigmatique oblique, égale à la moitié du radius qui est très mince . . . . 7. *A. dolichoneura* n. sp. ♂.
— Stigmatique perpendiculaire, égale au cinquième du radius qui est aussi gros que la stigmatique . . . . 8. *A. scleroneura* n. sp. ♂.

1. **Aclista (zygota) arcuata** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, moitié basale des antennes, hanches et pattes jaunes ; moitié apicale des antennes graduellement assombrie ; écaillettes brunes ; abdomen, sauf le pétiole, d'un roux marron, brun noir en arrière. Scape égal au 3^e article, qui est trois fois aussi long que gros et découpé en arc au tiers basal ; 13^e encore plus de deux fois aussi long que gros. Marginale épaissie, un peu plus longue que la stigmatique, qui est perpendiculaire ; postmarginale un peu plus longue que la marginale ; radius bien marqué, long, double de la basale ; récurrente faible, dirigée vers la base de la basale, un peu plus longue que la marginale. Tibias antérieurs fortement échancrés latéralement et proéminents en dent. Pétiole strié, à peine plus long que gros ; base du grand tergite non striée. Taille : 3 mm. — Jeannette. (Baker).

2. **Aclista (zygota) emarginata** n. sp.

♂. Noir ; scape, hanches et pattes jaunes ; antennes et écaillettes brunes. Scape égal au 3e article, qui est trois fois aussi long que gros, et faiblement échancré au tiers basal ; 13e deux fois aussi long que gros. Marginale épaissie, deux fois aussi grosse et de moitié plus longue que la stigmatique, qui est perpendiculaire ; postmarginale très mince et peu distincte, sauf à la base ; radius bien marqué, double de la basale ; récurrente peu marquée, égale à la marginale. Tibias antérieurs fortement échancrés latéralement, la proéminence avec des soies denses. Pétiole strié, de moitié plus long que gros ; base du grand tergite avec des stries égalant les deux tiers du pétiole. Taille : 3 mm. — Wisconsin : Polk. (Baker).

3. **Aclista levistylus** n. sp.

♂. Noir ; mandibules rousses ; trois premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes d'un jaune paille ; reste des antennes graduellement assombri ; abdomen d'un roux marron. Scape à peine plus long que le 3e article, qui est trois fois aussi long que gros et échancré au tiers basal ; 13e article 2 ½ fois. Marginale épaissie, à peine plus courte que la postmarginale ; stigmatique perpendiculaire, à peine plus courte que la marginale ; radius bien marqué, long, double de la basale ; récurrente faible, pas plus longue que la marginale. Pétiole lisse, brillant, un peu plus long que gros ; sillon du grand tergite un peu plus court que le pétiole. Taille : 2,5 mm. — Jeannette (Baker).

4. **Aclista insignis** n. sp.

♂. D'un roux marron ; mandibules et abdomen plus clairs ; scape, écaillettes, hanches et pattes jaunes ; reste des antennes brun. Antennes grêles ; scape plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3e article échancré dans sa moitié basale ; trois fois aussi long que gros ; 13e encore trois fois. Marginale double de la stigmatique, qui est perpendiculaire ; postmarginale égale à la stigmatique ; radius faiblement marqué, long, double de la basale ; récurrente faible, un peu plus longue que la marginale. Pétiole strié, presque deux fois aussi long que gros. — Taille : 2,5 mm. — Jeannette. (Baker).

5. **Aclista microneura** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, base du scape, écaillettes, hanches et genoux d'un roux sombre ; pattes d'un brun noir. Antennes minces ; scape plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article échancré au quart basal, quatre fois aussi long que gros ; 13ᵉ encore deux fois. Marginale égale à la postmarginale, à peine plus longue que la stigmatique, qui est oblique ; radius très court, pas plus long que la stigmatique, oblique ; récurrente dirigée vers la base de la basale, peu marquée, égale à la basale. Pétiole strié grossièrement, à peine plus long que gros, base du grand tergite sans stries, avec un sillon égalant presque le pétiole. Taille : 1,8 mm. — Californie : Claremont. (Baker).

6. **Aclista polyrhytis** n. sp.

♀. Noir, mandibules, palpes, 4 ou 5 premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes, et dernier sternite d'un roux jaune. Tête plus haute que longue. Scape cylindrique, égal aux articles 2-5 réunis ; 3ᵉ article presque deux fois aussi long que gros ; 4-14 distinctement transversaux ; 15ᵉ en ovoïde court. Ailes subhyalines ; basale plus courte que la 2ᵉ partie de la sous-costale ; marginale égale à la stigmatique, qui est oblique et pâle ; cellule radiale un peu plus longue que large, presque fermée, le radius guère plus long que la stigmatique, pâle et atteignant presque le bord ; récurrente et postmarginale nulles. Pétiole de moitié plus long que gros, cannelé ; base du grand tergite striée et avec un sillon ; tergites 3-6 d'égale longueur ; 7ᵉ un peu plus long que le 8ᵉ ; sternites 3-5 d'égale longueur ; 6ᵉ ou dernier plus long. Taille : 3,5 mm. — Nicaragua : Granada (Baker).

7. **Aclista dolichoneura** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, écaillettes, hanches et pattes testacées ; 3 ou 4 premiers articles antennaires d'un testacé brunâtre ; le reste brun ; abdomen d'un brun noir. Scape plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3^e article échancré au tiers basal, trois fois aussi long que gros ; 13^e de moitié plus long que gros. Marginale égale à la stigmatique, qui est oblique ; postmarginale double de la marginale, égale au radius, qui est beaucoup plus mince que les autres nervures ; récurrente égale au radius ; dirigée vers la base de la basale. Pétiole strié, à peine plus long que gros ; base du grand tergite non striée. Taille : 2 mm. — Nevada : Ormsby. (Baker).

8. **Aclista scleroneura** n. sp.

♂. Noir ; mandibules rousses ; scape, hanches et pattes jaunes ; reste des antennes graduellement assombri. Scape à peine plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3^e article échancré au tiers basal, trois fois aussi long que gros ; 13^e deux fois ; antennes robustes. Marginale un peu épaissie, de moitié plus longue que la stigmatique, qui est perpendiculaire ; postmarginale double de la marginale ; radius bien marqué, très long, 2 $^1/_2$ fois aussi long que la basale ; récurrente peu marquée, à peine plus longue que la marginale, à laquelle elle est parallèle. Pétiole strié, presque deux fois aussi long que gros. Taille : 2,5 mm. — Jeannette. (Baker).

Genre PANTOCLIS Först

1. Marginale pas plus longue que la stigmatique . . . . 2.
— Marginale deux fois aussi longue que la stigmatique . . . . . 11.
2. Pétiole 2 $^1/_2$ fois aussi long que gros ; tête du mâle aussi longue que haute ; marginale ponctiforme . . . . 1. *P. singularis* n. sp. ♂.
— Pétiole pas ou à peine plus long que gros ; tête du mâle plus haute que longue . . . . . 3.
3. Stigmatique égale au radius. . 2. *P. californicus* n. sp. ♀.

— Stigmatique égale à la moitié ou au quart du radius . . . . . 4.

4. Mâles . . . . 5.

— Femelles . . . . 7.

5. Marginale égale à la stigmatique. 3. *P. Bakeri* n. sp. ♂.

— Marginale ponctiforme . . . 6.

6. Article 3ᵉ des antennes faiblement échancré au tiers basal . 4. *P. microneurus* n. sp. ♂.

— Article 3ᵉ des antennes fortement échancré au tiers basal, puis ressortant. . . . . 5. *P. clinoneurus* n. sp. ♂.

7. Article 3ᵉ des antennes pas plus long que gros, plus court que le 2ᵉ . . . . 6. *P. subfuscus* n. sp. ♀.

— Article 3ᵉ des antennes deux fois aussi long que gros, distinctement plus long que le 2ᵉ . . . 8.

8. Articles antennaires 5-14 deux fois aussi gros que longs . . . 9.

— Articles antennaires pas plus gros ou à peine plus gros que longs. 10.

9. Tête plus haute que longue, antennes avec une massue de dix articles bruns . . . . . . 7. *P. integrifrons* n. sp. ♀.

— Tête plus haute que longue, antennes non en massue, les huit derniers articles bruns . . . 8. *P. aculeatus* n. sp. ♀.

10. Tergites 3-6 subégaux en longueur, 7 et 8 formant une pointe conique aussi longue que les articles 3-6 réunis . . . . . 9. *P. Bruesi* n. sp. ♀.

— Tergites 3-7 subégaux en longueur, 8ᵉ transversal . . . . 10. *P. subobtusus* n. sp. ♀.

11. Article 3ᵉ des antennes découpé profondément en arc dans sa moitié basale, puis ressortant sous forme de dent. . . . . 11. *P. Klagesi* n. sp. ♂.

— Article 3ᵉ des antennes pas distinctement échancré . . . . 12. *P. orthoneurus* n. sp. ♂.

1. **Pantoclis singularis** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, deux premiers articles antennaires et base du 3e, écaillettes, pattes et quatre hanches antérieures jaunes. Tête aussi longue que haute. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3e article profondément échancré en arc dans sa moitié basale, plus long que le 4e, qui est à peine deux fois aussi long que gros ; 13e de moitié plus long que gros. Marginale ponctiforme ; stigmatique très oblique, égalant la moitié du radius ; cellule radiale à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente non marquée. Pétiole strié, 2 $^{1}/_{2}$ fois aussi long que gros ; abdomen graduellement élargi jusqu'au milieu, strié à l'extrême base. Taille : 3,5 mm. — Pensylvanie : Jeannette (Baker).

2. **Pantoclis californicus** n. sp.

♀. Noir ; cinq premiers articles antennaires, pattes et quatre hanches antérieures d'un roux sombre. Scape un peu plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3e article presque trois fois aussi long que gros ; 4e à peine plus long que gros ; 5e pas plus long que gros ; 10-14 transversaux. Marginale grosse, plus courte que la stigmatique, qui est très oblique et égale au radius ; cellule radiale non dépassée par la postmarginale ; récurrente dirigée vers la base de la basale, petite et peu marquée. Pétiole strié, à peine aussi long que gros ; 2e tergite n'occupant pas les deux tiers antérieurs ; 3-6 subégaux en longueur ; 7 et 8 formant un cône pointu aussi long que les articles 3-6 réunis. Taille : 3,5 mm. — Californie : Claremont (Baker).

3. **Pantoclis Bakeri** n. sp.

♂. Noir ; mandibules et deux premiers articles antennaires roux ; flagellum d'un roux brun ; hanches et pattes jaunes ; abdomen d'un marron sombre, sauf le pétiole. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3e article très faiblement échancré au tiers basal ; 4e un peu plus de deux fois aussi long que gros, plus court que le 3e ; 13e encore deux fois. Marginale égale à la stigmatique qui est oblique ; cellule radiale 2 $^{1}/_{2}$ fois aussi longue que la marginale, à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente peu marquée, égale à la marginale. Pétiole strié, un peu plus long que gros ; base de l'abdomen sans strie, sillon occupant le tiers antérieur. Taille : 2 mm. — Jeannette (Baker).

4. **Pantoclis microneurus** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, antennes, écaillettes, hanches et pattes d'un roux jaune ; antennes graduellement plus assombries. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article plus long que le 4ᵉ, très faiblement émarginé au tiers basal ; 4ᵉ à peine deux fois aussi long que gros ; 13ᵉ un peu plus long que gros. Marginale ponctiforme ; stigmatique très oblique, longue, égale à la moitié du radius ; cellule radiale à peine dépassée par la postmarginale, double de la basale ; récurrente droite ; plus courte que la stigmatique. Pétiole un peu transversal, avec quelques rides longitudinales, intervalles rugueux ; sillon occupant le tiers antérieur de l'abdomen, stries égalant la moitié du pétiole. Taille : 2 mm. — Jeannette (Baker).

5. **Pantoclis clinoneurus** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, antennes, écaillettes, hanches et pattes rousses. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article plus long que le 4ᵉ, fortement échancré au tiers basal, puis ressortant sous forme de dent avant le milieu ; 4ᵉ trois fois aussi long que gros ; 13ᵉ plus de deux fois. Marginale ponctiforme ; stigmatique très oblique, longue ; cellule radicale triple de la stigmatique, dépassée de son tiers par la postmarginale ; récurrente peu marquée, égale à la stigmatique. Pétiole pas plus long que gros, ridé en long ; stries du grand tergite égales au pétiole, un peu plus courtes que le sillon. Taille : 2,5 mm. — Jeannette, (Klages). (Collection de Baker).

6. **Pantoclis subfuscus** n. sp.

♀. D'un brun roux très sombre ; mandibules, palpes, antennes, écaillettes, hanches et pattes jaunes. Tête, vue de côté, plus haute que longue ; articles 1 et 4 des palpes longs et minces, 2 et 3 courts et gros. Scape plus gros que les articles suivants, aussi long que les quatre suivants réunis ; 2ᵉ article de moitié plus long que gros ; 3ᵉ pas plus long que gros, plus court que le 2ᵉ ; 4-14 transversaux ; 15ᵉ ovoïdal ; flagellum pas distinctement grossi vers l'extrémité. Ailes subhyalines ; marginale à peine plus longue que la stigmatique, qui est oblique ; cellule radiale quatre fois aussi longue que la nervure marginale ; radius pâle ; basale plus courte que la 2ᵉ partie de la sous-costale ; récurrente nulle. Pétiole un peu plus long que gros, avec une arête dorsale ; grand tergite à peine strié à la base, avec un sillon ; tergites 3-6 d'égale longueur ; 7ᵉ plus long que le 8ᵉ ; segments 3-8 formant un cône plus large que long. Taille : 2,3 mm. — Pensylvanie, Jeannette, (Klages). (Collection de Baker).

7. **Pantoclis integrifons** n. sp.

♀. Noir ; mandibules, antennes sauf les dix articles de la massue qui sont bruns, hanches et pattes d'un roux jaune ; écaillettes et abdomen d'un brun roux, ce dernier plus sombre dessus. Tête vue de côté, aussi longue que haute ; front sans sillons, chagriné sous les antennes ; palpes longs et pâles ; 1ᵉʳ article grêle, égal aux deux suivants réunis ; 2ᵉ le plus court ; 3ᵉ triangulaire, double du 2ᵉ ; 4ᵉ mince, presque double du 3ᵉ. Scape cylindrique, égal aux quatre articles suivants réunis ; 2ᵉ un peu plus long que gros ; 3ᵉ deux fois aussi long que gros ; 4ᵉ et 5ᵉ pas plus longs que gros ; les dix suivants plus gros, formant une faible massue, deux fois aussi gros que longs, sauf le dernier qui est en ovoïde court. Segment médian rugueux, bidenté en arrière. Ailes faiblement teintées ; marginale plus petite que la moitié de sa distance de la basale, un peu plus courte que la stigmatique, qui est très oblique ; radius de moitié plus long que la stigmatique ; cellule radiale étroite, 2 1/2 fois aussi longue que la marginale, à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente égale à la stigmatique. Pétiole pas plus long que gros, strié ; abdomen fusiforme ; grand tergite dépassant un peu le milieu, strié à sa base et avec un court sillon ; 3-6 d'égale longueur ; 7 et 8 plus grands ; tarière proéminente ; six sternites, le 6ᵉ conique, double des 4ᵉ et 5ᵉ réunis. Taille : 4 mm. — Pensylvanie, Jeannette, (Klages). (Collection de Baker).

8. **Pantoclis aculeatus** n. sp.

♀. Noir ; mandibules, antennes sauf les huit derniers articles, écaillettes, hanches et pattes d'un roux jaune. Scape égal aux trois articles suivants réunis ; 3e article deux fois aussi long que gros ; 4e à peine aussi long que gros ; 5-14 transversaux, deux fois aussi larges que longs ; 15 ovoïdal. Marginale un peu plus courte que la stigmatique, qui est très oblique ; cellule radiale triple de la marginale, non dépassée par la postmarginale ; récurrente visible seulement par transparence, un peu plus longue que la stigmatique. Pétiole un peu transversal, ridé en long ; stries du grand tergite égalant la moitié du pétiole, sillon occupant le tiers antérieur de l'abdomen ; tiers postérieur de l'abdomen pubescent dessus ; tergites 7 et 8 formant un cône pointu aussi long que les articles 3-6 réunis ; tarière longuement proéminente. Taille : 3 mm. — Pensylvanie, Pittsburg. (Baker).

9. **Pantoclis Bruesi** n. sp.

♀. Noir ; cinq premiers articles antennaires, mandibules, écaillettes, hanches, pattes et segment anal d'un roux jaune ; reste des antennes brun ; abdomen brun noir. Scape égal aux trois articles suivants réunis ; 3e article presque deux fois aussi long que gros ; 4e et 5e pas plus longs que gros ; 6-14 plus gros, à peine transversaux ; 15e ovoïdal. Marginale égale à la stigmatique, qui est oblique ; cellule radiale double de la marginale, faiblement dépassée par la postmarginale ; récurrente peu marquée, dirigée vers la basale, comme d'ordinaire. Pétiole pas plus long que gros, ridé en long, intervalles rugueux ; sillon occupant le tiers antérieur de l'abdomen, stries très courtes ; moitié postérieure graduellement en pointe, velue latéralement mais pas sur le dessus ; tergites 3-6 subégaux en longueur, 7 et 8 aussi longs que les quatre précédents réunis. Taille : 3 mm. — Wisconsin, Polk ; Pensylvanie, Jeannette (var. à cellule radiale triple de la nervure marginale, pétiole grossièrement cannelé).

10. **Pantoclis subobtusus** n. sp.

♀. Noir ; mandibules, 4 ou 5 premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes d'un roux jaune ; reste des antennes d'un brun noir. Scape un peu plus long que les trois articles suivants réunis ; 3e article deux fois aussi long que gros ; 4-14 pas plus longs que gros. Marginale un peu plus courte que la stigmatique ; cellule à peine dépassée par la postmarginale, triple de la stigmatique ; récurrente peu marquée, droite, égale à la stigmatique. Pétiole pas plus long que gros, ridé en long ; sillon occupant le tiers antérieur de l'abdomen ; stries très courtes ; tergites 3-7 subégaux en longueur ; 8e transversal, triangulaire ; tarière proéminente. Taille : 2 mm. — Jeannette (Collection de Baker).

11. **Pantoclis Klagesi** n. sp.

♂. Noir ; trois premiers articles antennaires, mandibules, écaillettes, hanches et pattes d'un roux jaune ; reste des antennes d'un roux brun ; abdomen d'un marron sombre. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3e article fortement découpé en arc dans sa moitié basale, puis ressortant ; 4e deux fois aussi long que gros ; 13e encore deux fois. Marginale double de la stigmatique, qui est subperpendiculaire ; cellule radiale de moitié plus longue que la marginale, un peu dépassée par la postmarginale ; récurrente bien marquée, droite, un peu plus longue que la marginale. Pétiole strié, à peine deux fois aussi long que gros ; sillon du grand tergite assez long, stries à peine distinctes. Taille : 3 mm. — Jeannette (Klages) ; collection de Baker.

12. **Pantoclis orthoneurus** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, deux premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes d'un roux jaune ; reste des antennes d'un brun noir. Scape égal au 3e article, qui n'est pas distinctement échancré ; 4e plus court que le 3e, au moins deux fois aussi long que gros ; 13e encore un peu plus de deux fois. Marginale double de la stigmatique, qui est presque perpendiculaire ; cellule radiale longue, double de la stigmatique, un peu dépassée par la postmarginale ; radius moins marqué que les autres nervures ; récurrente droite, égale à la marginale. Pétiole strié, de moitié plus long que gros ; stries du grand tergite très courtes. Taille : 2,8 mm. — Wisconsin : Polk (Baker).

Genre Belyta.

1. Tête plus longue que haute, vue de côté ; antennes rousses . . 1. *B. bisulcata* n. sp. ♀.

— Tête de côté, plus haute que longue ou au moins aussi haute que longue . . . . 3.

2. Cellule radiale ouverte à l'extrémité, pattes brunes . . . . 2. *B. infuscata* n. sp. ♂.

— Cellule radiale fermée ; pattes rousses ou jaunes . . . . . 2.

3. Marginale plus courte que la stigmatique ; 13ᵉ article un peu plus long que gros. . . . . 3. *B. contempta* n. sp. ♂.

— Marginale au moins de moitié plus longue que la stigmatique ; 13ᵉ article 2 ou 2 1/2 fois aussi long que gros . . . . . . 4.

4. Cellule radiale au moins de moitié plus longue que la marginale, dépassée par la postmarginale, au maximum, de sa demi-longueur ; 3ᵉ article antennaire de 1/2 plus long que le 1ᵉʳ. 5.

— Cellule radiale pas ou à peine plus longue que la marginale, dépassée de plus de sa longueur par la postmarginale ; articles antennaires 3 ou 4 subégaux en longueur . . . . 7.

5. Base du grand tergite avec des stries aussi longues que la moitié du pétiole . . . . . . 4. *B. vera* n. sp. ♂.

— Base du grand stergite à stries très courtes, à peine visibles . 6.

6. Antennes, propleures et abdomen d'un roux sombre . . . 5. *B. Klagesi* n. sp. ♂.

— Antennes brunes, articles 1 et 2 roux ; propleures et abdomen noirs . . . . 6. *B. despecta* n. sp. ♂.

7. Pétiole lisse, deux fois aussi long que gros . . . . 7. *B. californica* n. sp. ♂.

— Pétiole strié, ou du moins avec une ride dorsale, au maximum, de moitié plus long que gros . 8.

8. Antennes et pattes rousses . . 8. *B. vilis* n. sp. ♂.

— Pattes jaunes . . . . 9.

9. Base du grand tergite avec des stries fortes, atteignant les deux tiers du pétiole, qui a quatre arêtes dorsales ; abdomen noir. 10.

— Base du grand tergite à stries subnulles, extrêmement courtes ; pétiole presque lisse, avec une ride dorsale ; abdomen roux marron . . . . 9. *B. xanthostoma* n. sp. ♂.

10. Antennes d'un brun noir, scape jaune ; arêtes médianes du pétiole un peu arquées, les intervalles lisses . . . . 10. *B. xanthopus* n. sp. ♂.

— Antennes jaunes, graduellement un peu assombries ; arêtes médianes du pétiole parallèles, intervalles rugueux . . . . *B. xanthopus* var. assimilis n. var. ♂.

1. **Belyta bisulcata** n. sp.

♀ ♂. Noir ; mandibules, antennes, écaillettes, hanches et pattes d'un roux jaune. Tête vue de côté, un peu plus longue que haute, avec deux sillons frontaux. Scape gros, cylindrique, égal aux quatre articles suivants réunis ; 3ᵉ article deux fois aussi long que gros ; 4-14 globuleux ; 16ᵉ ovoïdal. Thorax déprimé. Marginale plus longue que la stigmatique, qui est oblique ; cellule radiale fermée, petite, un peu plus longue que la nervure marginale ; récurrente visible seulement par transparence, oblique, dirigée vers la discoïdale. Pétiole strié, de moitié plus long que gros ; base du grand tergite avec un sillon égalant la demi-longueur du pétiole, stries très courtes. Le mâle a la tête plus haute que longue ; les antennes à flagellum d'un jaune brunâtre ; scape à peine égal au 3ᵉ article ; 3ᵉ faiblement échancré à la base, à peine plus long que le 4ᵉ ; 3-14 un peu plus de deux fois aussi longs que gros. Taille : 3-4 mm. — Pensylvanie : Pittsburg ; Jeannette (Baker).

2. **Belyta infuscata** n. sp.

♂. Noir ; mandibules rousses ; antennes d'un brun noir ; pattes brunes, hanches et articulations plus claires. Tête plus haute que longue comme chez les suivants. Scape égalant à peine les articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article découpé peu fortement dans sa moitié basale, plus long que le 4ᵉ, qui est un plus de deux fois aussi long que gros ; 13ᵉ encore plus de deux fois. Marginale de moitié plus longue que la stigmatique, qui est très oblique ; radius très oblique, pas plus long que la stigmatique, s'arrêtant près du bord ; récurrente dirigée vers la discoïdale, plus longue que la marginale, pâle comme le radius. Pétiole faiblement strié, de moitié plus long que gros. Taille : 2,3 mm. — Pensylvanie, Jeannette. (Klages).

3. **Belyta contempta** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, antennes, écaillettes, hanches et pattes rousses, antennes graduellement un peu assombries. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article assez fortement découpé dans sa moitié basale, plus long que le 4ᵉ, qui est deux fois aussi long que gros ; 13ᵉ un peu plus long que gros. Marginale grosse, plus courte que la stigmatique, qui est très oblique ; cellule radiale fermée, non dépassée par la postmarginale, presque triple de la nervure marginale ; récurrente oblique, plus longue que la marginale. Pétiole strié, presque deux fois aussi long que gros ; base du grand tergite sans stries, à sillon assez long. Taille : 3 mm. — Pittsburg. (Baker).

4. **Belyta vera** n. sp.

♂. Noir ; deux premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes d'un roux clair. Front avec deux sillons. Scape égal au 3ᵉ article, qui est de moitié plus long que le 4ᵉ, médiocrement découpé dans sa moitié basale ; 4ᵉ 2 1/2 fois aussi long que gros ; 13ᵉ deux fois. Marginale deux fois aussi longue que la stigmatique, qui est très oblique ; cellule radiale fermée, à peine dépassée par la postmarginale, d'un tiers plus longue que la marginale ; récurrente oblique, égale à la marginale. Pétiole strié, presque deux fois aussi long que gros ; base du grand tergite avec des stries égales à la moitié du pétiole, sillon égal au pétiole. Taille : 3 mm, — Wisconsin, Polk. (Baker).

5. **Belyta Klagesi** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, deux premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes roux ; flagellum brun. Scape égalant les articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article assez fortement découpé en arc dans sa moitié basale, de moitié plus long que le 4ᵉ, qui est presque trois fois aussi long que gros ; 13ᵉ presque deux fois. Marginale de moitié plus longue que la stigmatique, qui est fortement oblique ; cellule radiale fermée, double de la nervure marginale, dépassée de moitié par la postmarginale ; récurrente oblique, plus longue que la marginale. Pétiole strié, de moitié plus long que gros ; base du grand tergite à stries extrêmement courtes et à peine visibles, sillon égal au pétiole. Taille : 3 mm. — Pensylvanie, Jeannette. (Klages).

6. **Belyta despecta** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, deux premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes roux ; flagellum brun. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article découpé profondément en arc dans sa moitié basale, plus long que le 4ᵉ, qui est deux fois aussi long que gros ; 13e presque deux fois. Marginale double de la stigmatique, qui est fortement oblique ; cellule radiale fermée, de moitié plus longue que la marginale ; récurrente oblique, égale à la marginale. Pétiole finement strié, deux fois aussi long que gros ; sillon du grand tergite égal aux deux tiers du pétiole, stries très courtes et à peine visibles. Taille : 2,8 mm. — Wisconsin, Polk. (Baker).

7. **Belyta californica** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, écaillettes, hanches et pattes testacées ; antennes d'un brun noir ; abdomen d'un marron sombre, sauf le pétiole. Antennes grêles ; scape égal au 3e article, qui est à peine plus long que le 4e, faiblement échancré dans sa moitié basale ; 4e article trois fois aussi long que gros ; 13e 2 1/2 fois. Marginale double de la stigmatique, qui est très oblique et pâle comme le radius, les autres nervures noires ; cellule radiale égale à la marginale, dépassée de plus de sa longueur par la postmarginale ; récurrente oblique, pâle, plus longue que la marginale. Pétiole lisse, grêle, deux fois aussi long que gros ; sillon du grand tergite égal à la moitié du pétiole, stries très courtes ; tiers apical de l'abdomen pubescent sur le dessus. Taille : 2,5 mm. — Californie, Claremont. (Baker).

8. **Belyta vilis** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, antennes, écaillettes, hanches et pattes rousses. Antennes grosses ; scape à peine plus long que le 3e article, qui n'est pas plus long que le 4e, et médiocrement découpé en arc dans sa moitié basale ; 4e au moins deux fois aussi long que gros ; 13e deux fois. Marginale double de la stigmatique, qui est très oblique ; cellule radiale étroite, à peine plus longue que la marginale, dépassée de plus de sa longueur par la postmarginale ; récurrente oblique, plus longue que la marginale. Pétiole strié, un peu plus long que gros. Taille : 3,2 mm. — Pensylvanie, Pittsburg. (Baker).

9. **Belyta xanthostoma** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, antennes, écaillettes, hanches et pattes jaunes ; antennes grosses et graduellement un peu assombries ;

abdomen d'un marron sombre. Scape égal au 3e article, qui est fortement échancré en arc dans sa moitié basale, et à peine plus long que le 4e, celui-ci un peu plus de deux fois aussi long que gros ; 13e deux fois. Nervation du précédent. Tibias antérieurs avec six longues soies alignées sur le côté externe. Pétiole de moitié plus long que gros, presque lisse, avec une faible ride dorsale ; sillon du grand tergite égal à la moitié du pétiole, stries très courtes. Taille : 3 mm. — Pensylvanie : Jeannette (Klages).

10. **Belyta xanthopus** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, scape, écaillettes, hanches et pattes jaunes ; articles antennaires 2 et 3 un peu assombris, les suivants brun noir. Antennes peu grosses ; scape égal au 3e article, qui est aminci dans sa moitié basale, non découpé, à peine plus long que le 4e, qui est 2 1/2 fois aussi long que gros ; 13e 2 1/2 fois. Nervation et tibias antérieurs du précédent. Pétiole un peu plus long que gros, avec quatre arêtes dorsales, dont les deux médianes un peu arquées ; stries du grand tergite fortes, égalant les deux tiers du pétiole ; sillon égal au pétiole. Taille : 3 mm. — Wisconsin : Polk. (Baker).

Var. ASSIMILIS n. var. ♂. Couleur, nervures et antennes comme chez *xanthostoma*, sauf que l'abdomen est noir ; stries du grand tergite et pétiole comme chez le type, sauf que les arêtes médianes du pétiole sont parallèles, intervalles rugueux. Taille : 3 mm. — Jeannette et Polk.

Genre PROBELYTA n. g.

Yeux velus. Mandibules petites. Thorax pas plus haut que large ; pronotum visible d'en haut ; mesonotum convexe sur le lobe médian, déprimé sur les lobes latéraux ; segment médian avec une arête simple. *Ailes sans nervure médiane ; basale indiquée seulement par un court vestige* ou trait brunâtre ; marginale ponctiforme ; *stigmatique nulle ; radius sortant de la marginale et formant un trait parallèle au bord antérieur de l'aile* ; sans autres nervures. Voisin de *Belyta*.

Probelyta alticola n. sp.

♀. Noir ; mandibules, hanches et pattes rousses ; côtés et dessous du thorax d'un roux marron. Tête à peine plus large que longue, vue d'en haut ; un peu plus haute que longue, vue de côté ; un peu plus haute que large, vue de devant ; yeux aussi longs que les joues. Palpes longs et blanchâtres. Scape cylindrique, un peu plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 2ᵉ article un peu plus long que gros ; 3ᵉ presque quatre fois aussi long que gros ; 4ᵉ presque deux fois ; 5-14 pas plus longs que gros ; 15ᵉ ovoïdal ; tous finement pubescents. Ailes brunâtres ; radius égal à la moitié de la distance de la basale à la marginale. Pattes comme d'ordinaire chez les Belytides. Pétiole deux fois aussi long que gros, avec quatre arêtes ; abdomen ellipsoïdal, déprimé ; tergites 3-6 également courts, 7ᵉ plus long. Taille : 3,2 mm. — Pérou, Dép. Cuzco, vallée du Marcapata, affluent du Madre de Dios, à une altitude de 1000 mètres. (Type au Musée zoologique de Berlin).

Genre THERINOPSILUS n. g.

Yeux velus. Thorax à peine aussi haut que large ; *pronotum armé de chaque côté, près du bord postérieur, d'une petite dent triangulaire et aiguë*, cette dent plus distante de l'écaillette que de la ligne médiane et longitudinale du pronotum ; *scutellum à disque comprimé et caréné ;* segment médian avec une arête, angles postérieurs à peine proéminents. Cellule radiale fermée, aussi longue que la nervure marginale ; ailes inférieures avec une cellule fermée.

1. **Therinopsilus pubescens** n. sp.

♂. Noir ; mandibules petites et rousses ; palpes blanchâtres ; deux premiers articles antennaires, hanches et pattes d'un roux marron ; flagellum et, aux pattes postérieures, les fémurs, tibias et tarses d'un brun noir. Corps assez fortement pubescent de blanc, surtout la tête, les tibias et les tarses. Tête deux fois aussi large que longue, vue d'en haut ; aussi haute que large, vue de devant ; triangulaire et aussi haute que longue, vue de côté ; front chagriné, mat, avec un sillon médian ; palpes maxillaires très longs, de cinq articles, le 3ᵉ court et élargi en triangle ; les labiaux de trois articles ; yeux gros, deux fois aussi longs que les joues. Antennes filiformes, pubescentes ; scape égal au 3ᵉ article, mais plus gros ; 2ᵉ globuleux ; 3ᵉ quatre fois aussi long que gros, échancré au quart basal, puis ressortant en forme de dent ; les suivants à peine plus courts ; 13ᵉ encore trois fois aussi long que gros, plus court que le 14ᵉ. Sillons parapsidaux profonds. Fossette du scutellum grande. Propleures faiblement déprimées. Ailes brunes ; basale plus courte que sa distance de la marginale, qui est un peu plus longue que la basale ; stigmatique très oblique, cellule radiale très étroite, à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente continuant la direction du radius, aussi longue et aussi bien marquée que lui, dirigée vers la base de la basale ; discoïdale et anale percurrentes. Fémurs en massue ; tibias postérieurs subcylindriques, sans longs poils dressés. Pétiole deux fois aussi long que gros, avec quatre arêtes ; abdomen déprimé, ellipsoïdal, latéralement pubescent de blanc, brièvement strié en avant ; tergites 3-5 courts ; 6ᵉ plus long que le 5ᵉ ; 7ᵉ en petit lobe incurvé ; 8 sternites, 3-7 également petits, 8ᵉ en lobe court. Taille : 4,5 mm. — Brésil : Para. (Type au Musée zoologique de Berlin).

2. **Therinopsilus fuscicornis** n. sp.

♂. Ne diffère du précédent que par le scape d'un brun noir ; les dents du pronotum plus petites et peu distinctes ; les ailes légèrement brunies ; et le pétiole trois fois aussi long que gros. — Bolivie. (Type au Musée zoologique de Berlin).

Anectata Bakeri n. sp.

♀. Noir ; écaillettes, hanches et pattes jaunes ; antennes d'un brun sombre ; abdomen d'un brun noir. Scape plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article trois fois aussi long que gros ; les autres articles manquent. Marginale un peu plus longue que la stigmatique, qui est oblique ; cellule radiale deux fois aussi longue que la nervure marginale, dépassée par la postmarginale de presque sa moitié ; récurrente un peu plus longue que la marginale, dirigée vers la base de la basale. Pétiole fortement strié, deux fois aussi long que gros ; abdomen graduellement aminci aux deux bouts ; extrémité d'un roux brun, recourbée par en haut ; base du grand tergite avec des stries égalant la moitié du pétiole et un sillon plus long que les stries. Taille : 3 mm. — Nicaragua : Chinandega. (Collection de Baker).

Genre Prozelotypa n. g.

Yeux velus. Mandibules longues et croisées, comme chez *Xenotoma*. Antennes filiformes, articles du flagellum graduellement raccourcis, tous plus longs que gros. Cellule radiale fermée, beaucoup plus longue que la nervure marginale. Pétiole plus long que l'abdomen, qui n'a que deux tergites après le pétiole.

Prozelotypa longicornis n. sp.

♀. Noir et pubescent ; mandibules, tibias antérieurs, tarses antérieurs et intermédiaires d'un roux jaune, reste des pattes d'un brun roux. Tête très transversale vue d'en haut, un peu transversale vue de devant ; yeux de moitié plus longs que les joues ; palpes blanchâtres, longs, les maxillaires de 5 articles, les labiaux de 3. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis, cylindrique et faiblement arqué ; 3ᵉ article presque cinq fois aussi long que gros ; les suivants graduellement raccourcis ; 4-6 presque quatre fois aussi longs que gros ; 9ᵉ deux fois ; 14ᵉ à peine plus long que gros, plus court que le 15ᵉ. Thorax plus haut que large ; arête du segment médian simple. Ailes légèrement teintées ; basale oblique, plus courte que sa distance de la marginale ; cellule radiale presque trois fois aussi longue que la nervure marginale, dépassée de moitié par la postmarginale ; stigmatique très oblique, un peu plus courte que la marginale ; récurrente très courte, à peine plus longue que la stigmatique, dirigée vers la basale. Pattes comme chez *Xenotoma*. Pétiole très long, plus long que l'abdomen, plus de six fois aussi long que gros, avec quatre arêtes ; abdomen subellipsoïdal ; grand tergite occupant les 4/5 antérieurs de l'abdomen ; le suivant qui est le dernier, en cône déprimé. Taille : 3,5 mm. — Paraguay ; San Bernardino (Type au Musée zoologique de Berlin).

Genre Xenotoma Först.

1. Cellule radiale pas plus longue ou à peine plus longue que la nervure marginale	2.
— Cellule radiale au moins de moitié plus longue que la marginale	4.
2. Récurrente droite ; pétiole de moitié plus long que gros . .	1. *X. melanocera* n. sp. ♂.
— Récurrente arquée ; pétiole deux fois aussi long que gros . . .	3.
3. Cellule radiale dépassée de plus de sa longueur par la postmarginale ; récurrente peu marquée.	2. *X. coloradensis* n. sp. ♂.
— Cellule radiale non dépassée par la postmarginale ; récurrente noire	3. *X. parvicellula* n. sp. ♀.
4. Récurrente droite, sauf parfois l'extrême bout	5.
— Récurrente arquée depuis sa base	7.
5. Thorax d'un roux marron en majeure partie ; postmarginale très épaissie en arrière de la cellule radiale	4. *X. laeta* n. sp. ♂.
— Thorax noir en entier ; postmarginale non épaissie	6.
6. Article 3e des antennes du mâle profondément découpé en arc dans la moitié basale ; pattes jaune clair ; abdomen d'un roux marron	5. *X. xanthopus* n. sp. ♂.
— Article 3e du mâle faiblement échancré dans la moitié basale ; pattes d'un roux jaune ; abdomen noir ; récurrente dirigée vers la base de la basale . .	6. *X. clinoneura* n. sp. ♂.

— Abdomen noir ; récurrente dirigée vers le milieu de la basale . 7. *X. trisulcata* n. sp. ♀.

7. Thorax ou du moins la fossette du scutellum et le tiers postérieur du lobe médian du mesonotum d'un roux marron . . 8.

— Thorax noir, au moins sur le dessus . . . . 9.

8. Corps d'un roux marron, vertex noir ; antennes rousses, sauf les 4 derniers articles (Jeannette) . *X. castanea Kieff.*

— Corps noir ; fossette du scutellum et tiers postérieur du lobe médian du mesonotum d'un roux marron ; antennes noires, sauf les 2 premiers articles . . . 8. *X. rufosignata* n. sp. ♂.

9. Pétiole au maximum de moitié plus long que gros . . . . 9. *X. Bakeri* n. sp. ♂ ♀.

— Pétiole au minimum deux fois aussi long que gros . . . . 10.

10. Cellule radiale de moitié plus longue que la nervure marginale ; front et thorax sauf le dessus, d'un roux marron . . . 10. *X. Klagesi* n. sp. ♀.

— Cellule radiale au moins deux fois aussi longue que la nervure marginale ; front et thorax noirs. 11.

11. Antennes noires, sauf les articles 1 et 2 et la base du 3^{e}, ce dernier faiblement échancré . . . . 11. *X. Clarimontis* n. sp. ♀.

— Antennes jaunes, l'extrémité un peu plus sombre ; 3^{e} article du mâle fortement découpé en arc dans sa moitié basale . . . . 12.

12. Cellule radiale 2 1/2 fois aussi longue que la nervure marginale ; article 3^{e} des antennes de

la femelle 2 1/2, le 4e 2 fois aussi long que gros . . . . 12. X. *fuscinervis* n. sp. ♂.
— Cellule radiale presque 4 fois aussi longue que la marginale ; articles 3e et 4e des antennes de la femelle égaux, deux fois aussi longs que gros . . . . 13. X. *flavinervis* n. sp. ♂.

1. **Xenotoma melanocera** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, hanches sauf les postérieures, et pattes rousses ; 2e article antennaire brun. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3e faiblement découpé dans sa moitié basale, plus long que le 4e, qui est deux fois aussi long que gros ; 13e de moitié plus long que gros. Marginale double de la stigmatique, qui est perpendiculaire ; cellule radiale d'un tiers plus longue que la marginale, dépassée de moitié par la postmarginale ; récurrente droite, courte, dirigée vers la base de la basale. Pétiole faiblement strié, de moitié plus long que gros ; base du grand tergite avec un sillon égal au pétiole, et des stries très courtes ; extrémité non incurvée. Taille : 2,5 mm. — Californie, Claremont. (Baker).

2. **Xenotoma coloradensis** n. sp.

♂. Noir ; mandibules d'un roux brun ; antennes et hanches d'un brun noir ; pattes brunes. Scape un peu plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3e article non échancré, trois fois aussi long que gros ; 4e deux fois ; 13e de moitié plus long que gros. Cellule radiale dépassée de plus de sa longueur par la postmarginale, à peine plus longue que la marginale, qui est double de la stigmatique ; récurrente arquée depuis sa base, plus longue que le radius mais faiblement marquée. Pétiole grêle, 2 1/2 fois aussi long que gros, à peine strié ; grand tergite non strié à sa base, occupant à peine les trois-quarts antérieurs ; huit tergites distincts ; extrémité pas distinctement incurvée. Taille ; 1,8 mm. — Colorado. (Baker).

3. **Xenotoma parvicellula** n. sp.

♀. Noir ; mandibules, deux premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes d'un roux brunâtre, tarses postérieurs plus sombres. Scape égal aux quatre articles suivants réunis ; 3ᵉ article deux fois aussi long que gros ; 10-14 pas plus longs que gros. Cellule radiale pas plus longue que la nervure marginale, non dépassée par la postmarginale ; stigmatique perpendiculaire, très petite, égalant à peine la moitié de la marginale ; récurrente noire et arquée sur tout son parcours. Pétiole strié, deux fois aussi long que gros ; abdomen de sept tergites comme chez les autres femelles de ce genre, base du grand tergite sans stries, avec un sillon égalant les deux tiers du pétiole. Taille : 2,8 mm. — Californie, Claremont. (Baker).

4. **Xenotoma laeta** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, deux premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes roux ; thorax d'un roux marron, sauf les lobes latéraux du mesonotum et le tiers antérieur du lobe médian, le segment médian et les deux tiers inférieurs des pleures ; abdomen d'un roux marron, brun noir en arrière. Antennes grêles, aussi longues que le corps ; scape plus court que les articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article à peine visiblement échancré dans sa moitié basale, plus long que le 4ᵉ, qui est trois fois aussi long que gros ; 13ᵉ encore deux fois. Nervures noires ; marginale de moitié plus longue que la stigmatique, qui est subperpendiculaire ; cellule radiale longue, 2 1/2 fois aussi longue que la marginale, dépassée de moitié par la postmarginale, qui est très grosse ; récurrente bien marquée, droite, sauf l'extrême bout, plus longue que la marginale. Pétiole à peine strié, deux fois aussi long que gros ; extrême base de l'abdomen striée ; extrémité non incurvée. Taille : 2,8 mm. — Claremont. (Baker).

5. **Xenotoma xanthopus** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, deux premiers articles antennaires et base du 3ᵉ, écaillettes, hanches et pattes jaunes ; abdomen d'un roux marron sombre, sauf le pétiole. Scape égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article profondément découpé en arc dans sa moitié basale, plus long que le 4ᵉ, qui est trois fois aussi long que gros. Marginale un peu plus longue que la stigmatique, qui est un peu oblique ; cellule radiale un peu dépassée par la postmarginale, triple de la marginale ; récurrente droite, sauf l'extrême bout, plus longue que la marginale. Pétiole strié, presque deux fois aussi long que gros ; base de l'abdomen striée, extrémité non incurvée. Taille : 3 mm. — Pensylvanie, Jeannette. (Baker).

6. **Xenotoma clinoneura** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, deux premiers articles antennaires et base du 3ᵉ, écaillettes, hanches et pattes d'un jaune roux. Scape un peu plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article faiblement découpé dans sa moitié basale, plus long que le 4ᵉ, qui est 2 $^1/_2$ fois aussi long que gros ; 13ᵉ de moitié plus long que gros. Marginale un peu plus longue que la stigmatique, qui est presque perpendiculaire ; cellule radiale dépassée de moitié par la postmarginale, 2 $^1/_2$ fois aussi longue que la marginale ; récurrente non arquée, dirigée obliquement vers la base de la basale, plus longue que la marginale. Pétiole strié, deux fois aussi long que gros ; abdomen non incurvé. Taille : 2,5 mm. — Wisconsin : Polk (Baker).

7. **Xenotoma trisulcata** n. sp.

♀. Noir ; mandibules, palpes, antennes sauf les cinq derniers articles qui sont bruns, hanches et pattes d'un roux jaune. Tête vue de côté, aussi haute que longue, assez fortement velue. Scape un peu arqué, égal aux trois articles suivants réunis ; 3ᵉ article deux fois aussi long que gros ; 4-9 cylindriques et graduellement raccourcis, le 4ᵉ de moitié plus long que gros, le 9ᵉ à peine plus long que gros ; 10-14 subglobuleux ; 15ᵉ ovoïdal, à peine plus long que le 14ᵉ ; flagellum d'égale grosseur. Segment médian lisse, non bidenté en arrière. Ailes faiblement brunâtres ; basale droite, plus courte que la 2ᵉ partie de la sous-costale ; marginale à peine plus longue que la stigmatique, qui est oblique ; cellule radiale presque double de la marginale, non dépassée par la postmarginale ; récurrente droite, un peu plus longue que la marginale, dirigée vers le milieu de la basale. Pétiole deux fois aussi long que gros, avec quatre arêtes ; abdomen subfusiforme ; grand tergite strié à sa base, avec un court sillon ; 3-6 d'égale longueur ; 7^e aussi long que le 5^e et le 6^e réunis, courbé par en haut ; six sternites dont les quatre derniers sont graduellement plus longs. Taille : 4 mm. — Pensylvanie : Jeannette (Klages).

8. **Xenotoma rufosignata** n. sp.

♂ ♀. Noir ; mandibules, écaillettes, hanches et pattes rousses ; deux premiers articles antennaires d'un roux brunâtre ; fossette du scutellum et tiers postérieur du lobe médian du mesonotum d'un roux marron. Scape du mâle plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3^e article découpé en arc dans plus de sa moitié, plus long que le 4^e, qui est 2 $^1/_2$ fois aussi long que gros ; 13^e encore deux fois. Antennes de la femelle grêles ; scape plus long que les trois articles suivants réunis ; 3^e article de moitié plus long que gros ; 8-14 pas plus longs que gros. Nervures noires ; marginale égale à la stigmatique, qui est perpendiculaire ; cellule radiale petite, pas deux fois aussi longue que large, à peine dépassée par la postmarginale, 2 $^1/_2$ fois aussi longue que la marginale ; récurrente bien marquée, arquée sur tout son parcours, à peine plus courte que la basale. Pétiole grêle, sublisse, deux fois aussi long que gros chez la femelle, 2 $^1/_2$ fois chez le mâle ; base de l'abdomen sans sillon, mais à stries très courtes ; extrémité incurvée chez le mâle, avec un stylet chez la femelle. Taille : 2,8 mm. — Californie : Claremont (Baker).

9. **Xenotoma Bakeri** n. sp.

♀ ♂. Noir ; mandibules, écaillettes, hanches et pattes jaunes ; abdomen d'un marron très sombre ; antennes de la femelle jaunes à la base, brunâtres dans le reste ; celles du mâle brun noir, avec les trois premiers articles d'un roux jaune. Scape de la femelle un peu plus court que les quatre articles suivants réunis ; 3^e article 2 $^1/_2$ fois aussi long que gros ; 4^e deux fois ; 13^e et 14^e pas plus longs que gros. Scape du mâle à peine égal aux articles 2 et 3 réunis ; 3e article médiocrement découpé en arc dans la moitié basale, plus long que le 4e, qui est 2 ½ fois aussi long que gros ; 13e deux fois, nervures brunes ; marginale un peu plus longue que la stigmatique, qui est presque perpendiculaire ; cellule radiale dépassée de son tiers par la postmarginale, au moins trois fois aussi longue que la marginale ; récurrente arquée, un peu plus courte que la basale. Pétiole strié, un peu plus long que gros chez la femelle, de moitié plus long que gros chez le mâle ; base du grand tergite striée ; extrémité non en stylet chez la femelle, (plusieurs exemplaires), pas distinctement incurvée chez le mâle. Taille : 3 mm. — Wisconsin : Polk ; Pensylvanie : Jeannette (Baker).

10. **Xenotoma Klagesi** n. sp.

♂. Noir ; mandibules rousses ; deux premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes jaunes ; flagellum brun noir ; front, pleures, sternum et dessous du pétiole d'un marron sombre. Antennes grêles ; scape plus long que les trois articles suivants réunis ; 3e article deux fois aussi long que gros ; 4e à peine de moitié plus long que gros ; 6-12 un peu plus longs que gros ; 13e et 14 pas plus long que gros. Nervures jaunes ; marginale de moitié plus longue que la stigmatique, qui est presque perpendiculaire ; cellule radiale à peine dépassée par la postmarginale, de moitié plus longue que la marginale ; récurrente peu marquée, arquée, égale à la basale. Pétiole strié, deux fois aussi long que gros ; sillon égalant la moitié du pétiole ; stries très courtes, à peine visibles. Taille : 2 mm. — Jeannette. (Klages).

11. **Xenotoma Clarimontis** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, deux premiers articles antennaires et base du 3e, écaillettes, hanches et pattes roux. Scape plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3e article faiblement échancré dans sa moitié basale, plus long que gros ; 13e presque deux fois ; antennes plus courtes que le corps. Nervures noires ; marginale égale à la stigmatique, qui est presque perpendiculaire ; cellule radiale non dépassée par la postmarginale, triple de la marginale ; récurrente bien marquée, arquée, égale à la basale. Pétiole deux fois aussi long que gros, presque lisse ; abdomen à stries très courtes à sa base, non incurvé au bout. Taille : 2,8 mm. — Californie, Claremont, (Baker).

12. **Xenotoma fuscinervis** n. sp.

♀ ♂. Noir ; mandibules rousses ; antennes jaunes, graduellement assombries vers le haut ; écaillettes, hanches et pattes jaunes. Scape de la femelle plus long que les trois articles suivants réunis ; 3e 2 1/2 fois aussi long que gros ; 4e 2 fois ; 10e de moitié plus long que gros ; 14e encore un peu plus long que gros. Article 3e du mâle fortement découpé en arc dans sa moitié basale sauf à l'extrême base, plus long que le 4e, qui est deux fois aussi long que gros ; 13e de moitié plus long que gros. Nervures brun noir, marginale de moitié plus longue que la stigmatique, qui est subperpendiculaire ; cellule radiale 2 1/2 fois aussi longue que la marginale, à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente peu marquée, arquée, égale à la basale. Pétiole au moins deux fois aussi long que gros, aminci au tiers postérieur, strié, intervalles rugueux ; sillon du grand tergite un peu plus court que le pétiole, stries subnulles ; 7e segment en stylet. Taille ♂ : 2 mm. ; ♀ : 4 mm. — Pensylvanie, Jeannette. (Baker).

13. **Xenotoma flavinervis** n. sp.

♂ ♀. Noir ; mandibules, antennes, écaillettes, hanches et pattes jaunes, extrémité des antennes un peu plus sombre ; abdomen d'un marron très sombre. Scape de la femelle égalant les quatre articles suivants réunis ; 3e et 4e deux fois aussi longs que gros ; 5-14 graduellement raccourcis, tous plus longs que gros. Scape du mâle plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3e article profondément découpé en arc dans sa moitié basale, plus long que le 4e qui est trois fois aussi long que gros ; 13e presque trois fois. Nervures jaunes ; marginale égale à la stigmatique, qui est presque perpendiculaire ; cellule radiale presque quatre fois aussi longue que la marginale, à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente arquée, un peu plus courte que la basale. Pétiole strié, 2 1/2 fois aussi long que gros ; sillon du grand tergite égal à la moitié du pétiole, stries très courtes ; extrémité en stylet chez la femelle, incurvée chez le mâle. Taille : 3 mm. — Jeannette. (Baker).

Genre CINETUS Jur., Först., non Ashm.

1. Article 3ᵉ des antennes fortement échancré en arc dans sa moitié proximale	1. *C. pennsylvanicus* n. sp. ♂.
— Article 3ᵉ non échancré ; . .	2.
2. Antennes d'un brun noir, sauf les articles 1 et 2	2. *C. monticola* n. sp. ♂.
— Antennes jaunes.	3. *C. xanthocerus* n. sp. ♀.

1. **Cinetus pensylvanicus** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, antennes, écaillettes et pattes testacées, hanches jaunes ; antennes graduellement assombries, les derniers articles d'un brun noir. Scape à peine aussi long que les articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article fortement découpé en arc dans sa moitié proximale, sauf à l'extrême base, plus long que le 4ᵉ, qui est trois fois aussi long que gros ; 13ᵉ presque trois fois. Nervures d'un brun noir ; marginale égale à la cellule radiale, qui est à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente arquée, plus longue que la marginale. Pétiole strié, 2 1/2 fois aussi long que gros ; grand tergite à sillon court. Taille : 3 mm. — Pensylvanie, Pittsburg. (Baker).

2. **Cinetus monticola** n. sp.

♀. Noir ; mandibules, hanches et pattes testacées ; deux premiers articles antennaires d'un roux brun, flagellum et abdomen d'un brun noir. Scape très long, plus long que les articles 2 et 3 réunis ; 3ᵉ article cinq fois aussi long que gros, de moitié plus long que le 4ᵉ ; 14ᵉ encore deux fois aussi long que gros. Nervures brunes ; marginale grosse, un peu plus longue que la cellule radiale, qui est à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente arquée, de moitié plus longue que le radius. Pétiole strié, presque deux fois aussi long que gros ; abdomen long, déprimé, grand tergite graduellement aminci aux deux bouts, sillon basal égal au pétiole, stries courtes ; 3e tergite égal au tiers de l'abdomen, plus de deux fois aussi long que large, presque tubuleux ; 4e très court. Taille : 4,5 mm. — Californie : monts près de Claremont (Baker).

3. **Cinetus xanthocerus** n. sp.

♀. Noir ; mandibules rousses ; antennes, écaillettes, hanches et pattes jaunes. Article 3e des antennes à peine quatre fois aussi long que gros. Nervures jaunes. Tergite 3e graduellement aminci en arrière, deux fois aussi long que large ; 4e jaune, presque tubuleux, plus court que le 3e. Taille : 4 mm. Pour le reste, semblable au précédent. — Jeannette (Baker).

Genre LEPTORHAPTUS Först. non Ashm.

1. Pétiole lisse	2.
— Pétiole strié ou parcouru par des arêtes	3.
2. Nervure récurrente arquée . .	*L. longinervis* Kieff. ♀.
— Nervure récurrente non arquée .	1. *L. Ashmeadi* n. sp. ♂.
3. Marginale un peu plus courte que la cellule radiale; récurrente fortement arquée	2. *L. bisulcatus* n. sp. ♂.
— Marginale plus longue que la cellule radiale, récurrente non arquée ou à peine arquée . . .	4.
4. Abdomen d'un roux clair, sauf le pétiole	3. *L. Bakeri* n. sp. ♂.
— Abdomen noir, au moins en majeure partie	4. *L. Clarimontis* n. sp. ♀.

1. **Leptorhaptus Ashmeadi** n. sp.

♂. Noir ; mandibules, moitié proximale des antennes, hanches et pattes d'un roux brun ; moitié distale des antennes d'un brun noir. Scape à peine plus court que le 3e article, qui est plus long que le 4^e, et faiblement échancré au quart ou au cinquième proximal ; 4^e au moins trois fois aussi long que gros ; 13^e trois fois. Nervures noires ; marginale un peu plus longue que la cellule radiale, celle-ci à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente non arquée, continuant la direction de la radiale et dirigée vers la discoïdale, un peu plus longue que la marginale. Pétiole trois fois aussi long que gros, lisse. Taille : 3 mm. — Monts près de Claremont (Baker).

2. **Leptorhaptus bisulcatus** n. sp.

♂. Noir ; abdomen d'un roux marron sombre ; deux premiers articles antennaires et base du 3^e, mandibules, écaillettes, hanches et pattes d'un jaune clair. Scape égal au 3^e article, qui est plus long que le 4^e et faiblement échancré en arc dans sa moitié proximale, sauf à l'extrême base ; 4^e article trois fois aussi long que gros ; 13^e 2 1/2 fois. Nervures brunes ; marginale un peu plus courte que la cellule radiale, qui est dépassée de moitié par la postmarginale ; récurrente fortement arquée, plus longue que la marginale. Pétiole trois fois aussi long que gros, avec trois arêtes dorsales, intervalles lisses. Taille : 3 mm. — Pensylvanie : Jeannette (Baker).

3. **Leptorhaptus Bakeri** n. sp.

♂. Noir ; abdomen d'un roux clair, sauf le pétiole ; mandibules, antennes, écaillettes, hanches et pattes d'un jaune sale, hanches postérieures brunâtres ; moitié distale des antennes assombrie. Scape plus court que le 3^e article, qui est plus long que le 4^e, et faiblement échancré au quart basal ; 4^e article et 13^e trois fois aussi longs que gros. Nervures jaunes ; marginale de moitié plus longue que la cellule radiale, qui est à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente à peine arquée, continuant la direction du radius, dirigée vers la discoïdale. Pétiole strié, trois fois aussi long que gros. Taille : 3 mm. — Monts près de Claremont (Baker).

4. **Leptorhaptus Clarimontis** n. sp.

♀. Noir ; mandibules, premiers articles antennaires, écaillettes, hanches et pattes d'un roux brunâtre ; reste des antennes graduellement assombri, derniers articles d'un brun noir ; parfois une tache rousse à l'extrémité du 2ᵉ tergite ; 4ᵉ tergite roux. Scape égal au 3ᵉ article, qui est de moitié plus long que le 4ᵉ ; 5ᵉ deux fois aussi long que gros, un peu plus court que le 4ᵉ ; 11-14 pas plus longs que gros. Marginale un peu plus longue que la cellule radiale, qui est à peine dépassée par la postmarginale ; récurrente pas distinctement arquée, dirigée vers la discoïdale. Pétiole strié, 2 1/2 fois aussi long que gros ; abdomen comprimé, 3ᵉ tergite transversal, 4ᵉ en cône pointu et recourbé, plus long que le 3ᵉ. Taille : 3 mm. — Monts près de Claremont (Baker).

Genre MIOTELLA n. g.

Yeux à poils très courts et à peine distincts. Mandibules petites. Dernier article antennaire très allongé, aussi long que les trois précédents réunis. Thorax plus haut que large ; segment médian avec une arête simple. Cellule radiale fermée, beaucoup plus longue que la nervure marginale. Abdomen formé par un seul tergite après le pétiole, ce tergite atténué à l'extrémité, où il forme un tube mince et pas plus long que large.

Miotella tenuicornis n. sp.

♀. Noir et pubescent ; pattes d'un roux jaunâtre, hanches et pattes postérieures d'un roux brunâtre. Tête plus de deux fois aussi large que longue, vue d'en haut ; circulaire, vue de devant ; beaucoup plus haute que longue, vue de côté ; yeux deux fois aussi longs que les joues ; clypeus en coussinet. Antennes grêles ; scape plus gros, aussi long que les articles 2 et 3 réunis ; 2ᵉ article pas plus long que gros ; 3ᵉ quatre fois ; 3-14 graduellement raccourcis, 9ᵉ encore deux fois aussi long que gros, 13ᵉ et 14ᵉ à peine plus longs que gros ; 15ᵉ un peu grossi, très long, aussi long que les trois articles précédents réunis ; poils dressés, plus courts que l'épaisseur des articles. Sillons parapsidaux convergents en arrière.

Fossette basale du scutellum transversale ; disque très convexe. Ailes brunâtres et velues ; basale oblique, à peine égale à sa distance de la marginale ; cellule radiale 2 $^1/_2$ fois aussi longue que la nervure marginale, dépassée de moitié par la postmarginale ; stigmatique à peine oblique, égale à la moitié de la marginale ; récurrente arquée, noire comme les autres nervures, plus longue que la basale ; discoïdale et anale percurrentes. Pattes comme les autres Belytides. Pétiole presque lisse, 2 $^1/_2$ fois aussi long que gros, avec de longs poils sur le dessous ; abdomen fusiforme, sans impression à sa base, un peu déprimé, plus convexe sur le dessous que sur le dessus, ayant sa plus grande hauteur au milieu. Taille : 3 mm. — Bolivie : Mapiri. (Type au Musée zoologique de Berlin).

DESCRIPTION

DE NOUVEAUX

Diapriides et Belytides d'Europe

par l'abbé J.-J. KIEFFER
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR A BITCHE

Avec 6 figures dans le texte

Phaenopria halterata n. sp.

Tête globuleuse ; vue de côté, un peu plus haute que longue ; joues aussi longues que les yeux. Palpes très courtes. Antennes insérées un peu au-dessus de la base des yeux, plus longues que le corps ; scape subcylindrique, à peine aminci basalement, égal aux articles 2 et 3 réunis ; 2e article obconique, pas plus long que gros ; 3e trois fois aussi long que le 2e ; 4e à peine plus court que le 3e, faiblement échancré, ressortant en angle près de l'extrémité, au moins aussi long que les articles 5 et 6 réunis ; articles 5-13 moniliformes, un peu plus longs que gros ; 14e un peu plus long que le 13e ; tous avec une courte pubescence. Thorax plus étroit que la tête ; mesonotum plan, sans trace de sillons ; scutellum plan, sans fossette ; segment médian avec un feutrage gris. Ailes en balanciers, n'atteignant que l'extrémité du thorax. Tibias postérieurs non ciliés ; tiers apical subitement claviforme. Pétiole aussi gros que long, avec un feutrage grisâtre ; abdomen plus large que la tête, déprimé, ovalaire ; grand segment occupant les deux tiers antérieurs, sans stries à sa base. Noir brillant ; mandibules d'un roux sombre ; deux premiers articles antennaires, hanches et pattes d'un jaune vitellin. Taille ♂ : 1,8 mm. — Patrie : Écosse. (P. Camerou).

Phaenopria Cameroni n. sp.

Tète subglobuleuse. Scape graduellement aminci à la base, égal aux quatre articles suivants réunis ; 2e article obconique, un peu plus long que gros ; 3-9 également minces ; 3e un peu plus long que gros, les autres globuleux ; 10-12 formant une massue, dont les deux premiers articles sont à peine transversaux, et le 3e ovoïdal, plus gros, presque deux fois aussi long que le précédent. Prothorax avec un feutrage gris. Scutellum très convexe, sans trace de fossette, séparé du mesonotum par une suture arquée à peine visible. Segment médian velu, avec une carène en lamelle triangulaire. Ailes ciliées ; nervure marginale conformée comme chez *Diapria*, située au tiers antérieur de l'aile ; un vestige de basale aboutit à l'extrémité postérieure de la marginale. Tibias postérieurs également minces dans les deux tiers basaux, subitement grossis au tiers apical. Pétiole transversal ; abdomen déprimé ; 2e segment occupant les quatre cinquièmes ; les segments suivants forment une pointe conique. Noir ; pattes rousses, partie renflée des fémurs et des tibias d'un brun noir. Taille ♀ : 1,5 mm. — Patrie : Écosse. (P. Cameron).

Monelata rufipes n. sp.

Fig. 1, ♀.

Noir ; scape, hanches et pattes roux ; articles antennaires 2-12 bruns, 13e noir. Article 3e des antennes aussi long que gros, plus mince et de moitié aussi long que le 2e ; 4-10 subglobuleux et également minces ; 11e et 12e plus gros et transversaux ; 13e, en massue, très gros, presque deux fois aussi long que les deux précédents réunis. Basale, médiane et nervulus indiqués par des traits brunâtres. Taille ♀ : 1-1,2 mm. — France ; Hongrie.

CYATHOPRIA n. g.

Antennes de la femelle composées de 12 articles. Ailes antérieures avec une nervure basale, une marginale, une stigmatique, une récurrente, une radiale et une médiane. Ailes postérieures sans nervures. Pétiole transversal, seulement d'un tiers moins large que le bord antérieur du second segment, cyathiforme, c'est-à-dire, hémisphérique, la partie antérieure ou tronquée insérée à un pétiole transversal du segment médian, la partie convexe ou postérieure séparée du grand segment par un rétrécissement. L'unique espèce provient d'Autriche.

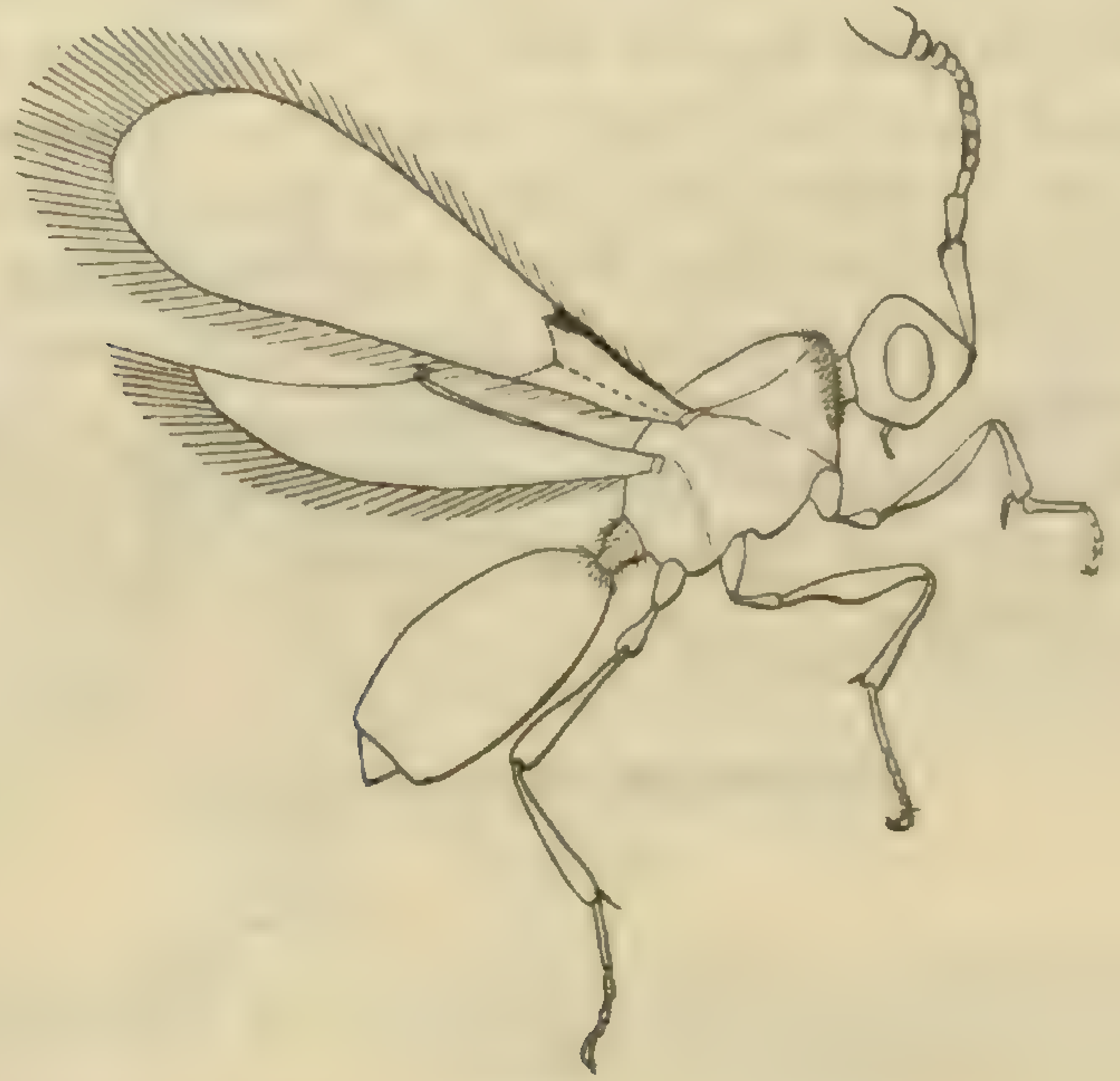


Fig. 1.

Cyathopria rufiventris n. sp.

Tête vue d'en haut, à peine transversale ; vue de côté, triangulaire, plus haute que longue ; clypeus ressortant en hémisphère ; yeux petits, glabres, circulaires, plus courts que leur distance des antennes ; joues presque deux fois aussi longues que les yeux ; mandibules petites. Antennes insérées sur une proéminence frontale ; scape égal aux quatre ou cinq articles suivants réunis, subcylindrique ; 2^e article de moitié plus long que gros, aussi long que le 3e ; 4-12 graduellement et faiblement épaissis, subglobuleux, sauf le 12e qui est plus long que les deux précédents réunis. Prothorax glabre, pas visible d'en haut. Mesonotum avec des vestiges de sillons parapsidaux. Scutellum ? Segment médian avec une arète médiane, sans lamelle. Ailes ciliées, dépassant l'abdomen ; stigmatique située un peu avant le milieu de l'aile, oblique et courte ; marginale longue, presque trois fois aussi longue que la stigmatique ; récurrente égale à la marginale, continuant la direction de la radiale qui n'est pas plus longue que la stigmatique ; basale droite, éloignée de la marginale de presque toute sa longueur ; médiane bien marquée. Tibias postérieurs assez fortement renflés dans leur moitié apicale, mais moins subitement que chez *Diapria*. Pétiole lisse et brillant ; ses côtés et la base du grand segment avec une pilosité blanchâtre ; abdomen un peu plus court que le thorax, non strié à sa base, subellipsoïdal, un peu comprimé, presque deux fois et demie aussi long que gros ; grand segment d'égale largeur, occupant les deux tiers antérieurs ; segments suivants formant une pointe conique ; tarière proéminente. D'un roux marron sombre ; abdomen un peu plus clair ; dessus de la tête et du thorax noir. Taille ♀ : 3,5 mm. — Patrie : Trieste (Dr. Graeffe).

Loxotropa Steueri Kieff.

Fig. 2, ♀.

Cet insecte myrmécophile a été décrit en 1905 ; j'en donne ici un dessin fait à la chambre claire.

Trichopria cilipes n. sp.

Tête globuleuse, au moins aussi grosse que le thorax. Antennes du mâle filiformes, aussi longues ou plus longues que le corps ; scape plus long que les articles 2 et 3 réunis, à peine plus mince à la base ; 2e article un peu plus long que gros ; 3e cylindrique, deux fois aussi long que le 2e, de moitié plus long que le 4e, qui est découpé dans les deux tiers basaux et élargi au tiers terminal ; 5e article plus court que le 4e, deux fois aussi long que gros ; 6-13 décroissant faiblement, le 13e encore de moitié plus long que gros, 14ᵉ aussi long que le 4ᵉ ; flagellum à poils sans ordre et aussi longs que son épaisseur. Scape de la femelle un peu plus long que les trois articles suivants réunis ; 2ᵉ article un peu plus gros que le 3ᵉ, et à peine aussi long, obconique comme les cinq suivants ; 3-7 également minces ; 3ᵉ deux fois aussi long que gros, 4-7 de moitié plus longs que gros ; 8-12 formant une grosse massue, dont le premier article est moins gros que les suivants et obconique, les trois suivants cylindriques, aussi gros que longs, le dernier ovoïdal. Mesonotum sans trace de sillons. Scutellum séparé du mesonotum par une suture très fine, arrondi à l'extrémité, chez la femelle avec deux fossettes bien séparées, chez le mâle avec une fossette unique ; segment médian avec une lamelle triangulaire, échancré en arc au bord postérieur. Tempes et propleures avec un feutrage blanc et peu dense ; segment médian à poils gris, assez longs et peu denses. Ailes hyalines, ciliées médiocrement, dépassant un peu l'abdomen ; nervure costale occupant le tiers basal ; marginale triangulaire comme chez *Tropidopria conica ;* basale indiquée par un trait brunâtre et arqué aboutissant à l'extrémité de la marginale. Tibias postérieurs

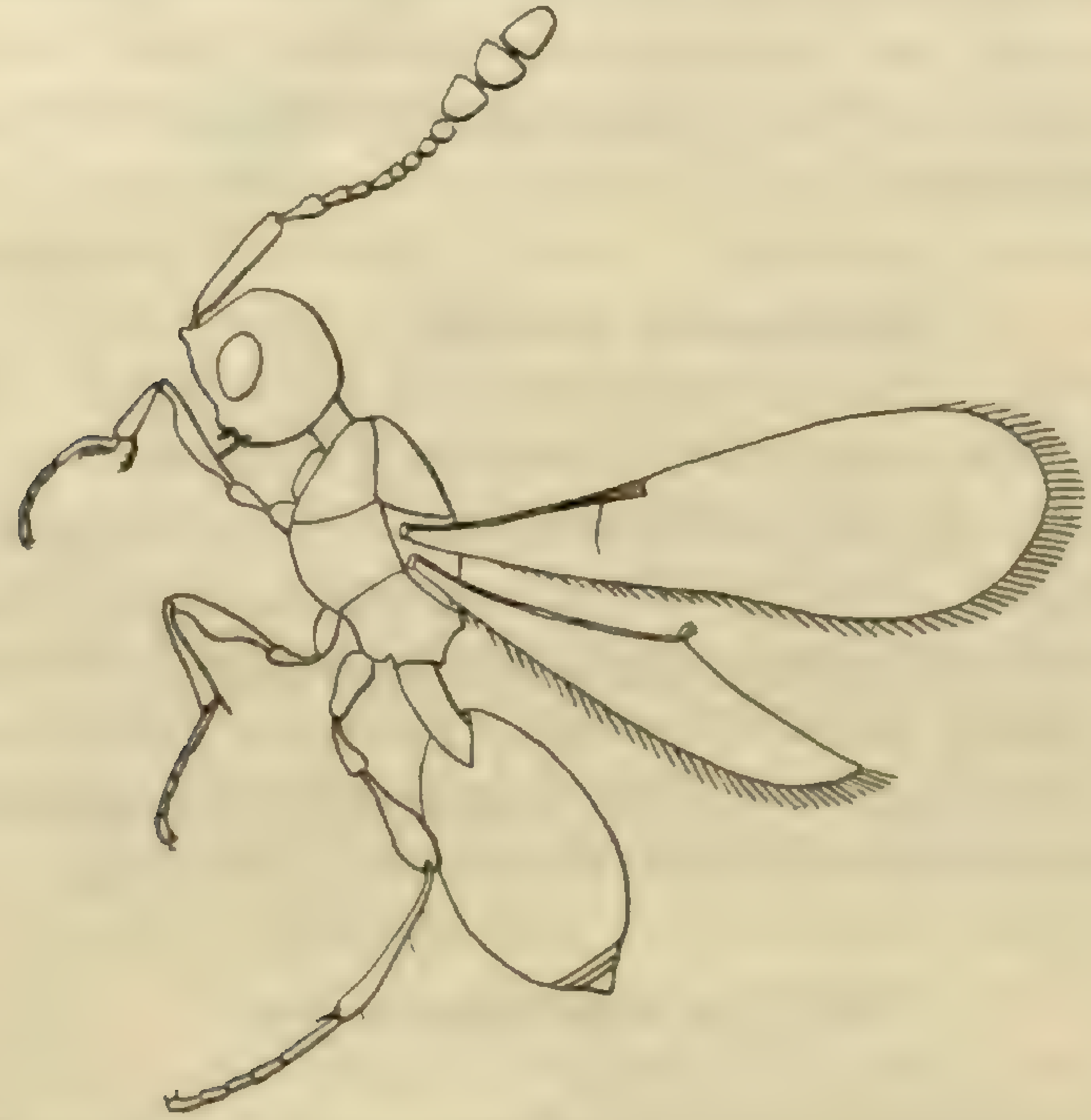


Fig. 2.

ayant au côté interne, outre les poils longs et épars, une rangée de poils ou écailles en lamelles qui sont 2-3 fois aussi longues que l'épaisseur de la partie basale du tibia ; 4^e article des tarses postérieurs deux fois aussi long que gros. Pétiole un peu plus long que gros chez le mâle, aussi long que gros chez la femelle, avec des poils gris et peu denses ; abdomen déprimé, un peu plus long que le thorax chez la femelle, un peu plus court chez le mâle ; 2^e segment lisse, avec un feutrage gris sur le dessous de sa base, occupant les 4/5 antérieurs. Noir brillant ; radicule antennaire et 2^e article roux brun chez la femelle ; trochanters, partie rétrécie des tibias, tarses sauf le dernier article roux. Taille 5 ♂ ♀ : 1,2-1,5 mm. — Patrie : Bitche, capturé en octobre sur les herbes des bois (2 ♂ et plusieurs ♀).

Trichopria inermis n. sp.

Noir ; radicule antennaire, 2^e article, pattes sauf les hanches d'un roux brun ; partie renflée des fémurs et des tibias brun noir. Segment médian sans lamelle triangulaire. Ailes longuement ciliées ; basale d'un jaune clair, aboutissant à l'extrémité de la marginale. Tibias postérieurs ciliés comme d'ordinaire. Pétiole à peine plus long que gros. Pour tout le reste, semblable au mâle de l'espèce précédente. Patrie : Écosse (P. Cameron).

Idiotypa nigriceps n. sp.

Tête transversale, à bords parallèles ; vue de côté, un peu plus haute que longue ; yeux glabres. Scape subcylindrique, égal aux quatre ou cinq articles suivants réunis ; 2^e article obconique, un peu plus long que gros ; 3-6 également minces ; le 3^e un peu plus gros que le 2^e et un peu plus court que lui, les suivants globuleux ; 7^e à peine plus gros que le 6^e, globuleux ; 8-12 formant une grosse massue, dont le premier article est deux fois aussi gros que l'article précédent, mais encore moins gros que les quatre suivants, transversal comme eux, sauf le 12^e qui est ovoïdal. Prothorax visible de dessus, mais seulement sur les côtés. Sillons parapsidaux percurrents. Base du scutellum avec une grande fossette. Segment médian avec une épine comprimée et triangulaire. Thorax sans feutrage. Ailes subhyalines, longuement ciliées ; nervure sous-costale distante du bord, qu'elle atteint au milieu de l'aile en y formant une nervure marginale guère plus longue que large ; nervure stigmatique pas plus longue que la largeur de la marginale, avec un trait brun aussi court et dirigé vers la basale ; radiale indiquée par une ligne visible par transparence atteignant le bord et formant une longue cellule pointue ; basale d'un brun noir, distante de la marginale de toute sa longueur ; médiane mieux marquée au delà de la basale qu'en deçà d'elle. Ailes inférieures sans nervures. Pétiole aussi long que gros, pubescent, strié ; abdomen en ovale oblong, déprimé ; grand segment atteignant presque l'extrémité, avec un sillon médian et plusieurs stries encore plus courtes. Tête et massue antennaire noires ; mandibules, face et thorax d'un marron sombre ; antennes sauf la massue, palpes, hanches, pattes et abdomen d'un jaune rougeâtre, extrémité de l'abdomen un peu plus sombre. Taille ♀ : 1,5 mm. — Écosse (P. Cameron). C'est à ce genre qu'appartient *Monopria maritima Hal.* qui n'a pas été décrit.

Idiotypa rufiventris Thoms.

Ne diffère du précédent que par le thorax d'un noir brillant ; antennes sauf les six derniers articles, hanches et pattes d'un jaune rougeâtre ; abdomen d'un roux marron. Segment médian avec une petite épine non triangulaire. Nervure marginale au moins deux fois aussi longue que large, un peu plus longue que la stigmatique ; radius nul ; autres nervures comme chez le précédent. Pétiole pas distinctement pubescent, à peine plus long que gros, fortement strié ; base du grand segment avec trois sillons courts, dont le médian est le plus long. Taille ♀ : 1,8 mm. — Patrie : Écosse (P. Cameron).

Hemilexis subtruncata Kieff.

Fig. 3, ♀.

Cet insecte, décrit antérieurement, a été obtenu parasite de Cécidomyies ; j'en donne un dessin fait à la chambre claire.

Entomacis Graeffei n. sp.

Tête vue d'en haut, subarrondie ; vue de côté, subtriangulaire. Antennes de 13 articles ; scape égal aux trois ou quatre articles suivants réunis ; 2ᵉ article obconique, un peu plus long que le 3ᵉ ; 3-6 minces, le 3ᵉ de moitié plus long que gros, 4-6 à peine plus longs que gros ; 7-13 un peu épaissis et subglobuleux, sauf le dernier qui est ovoïdal. Sillons parapsidaux percurrents. Base du scutellum avec une grande fossette subcirculaire. Segment médian avec une lamelle triangulaire. Ailes longues, largement tronquées à l'extrémité, longuement ciliées ; sous-costale atteignant la costale avant le milieu du bord, en y formant une marginale pas plus longue que large ; stigmatique oblique en arrière, grosse comme la marginale et deux fois aussi longue ; basale faiblement indiquée et distante de toute sa longueur de la marginale ; sans autres nervures. Tibias postérieurs ciliés en dedans. Pétiole aussi long que large. Abdomen déprimé. Noir brillant, mandibules, deux premiers articles antennaires, segment médian, hanches, pattes et pétiole d'un jaune clair. Taille ♀ : 1,3 mm. — Autriche, Trieste. (Dr Graeffe).

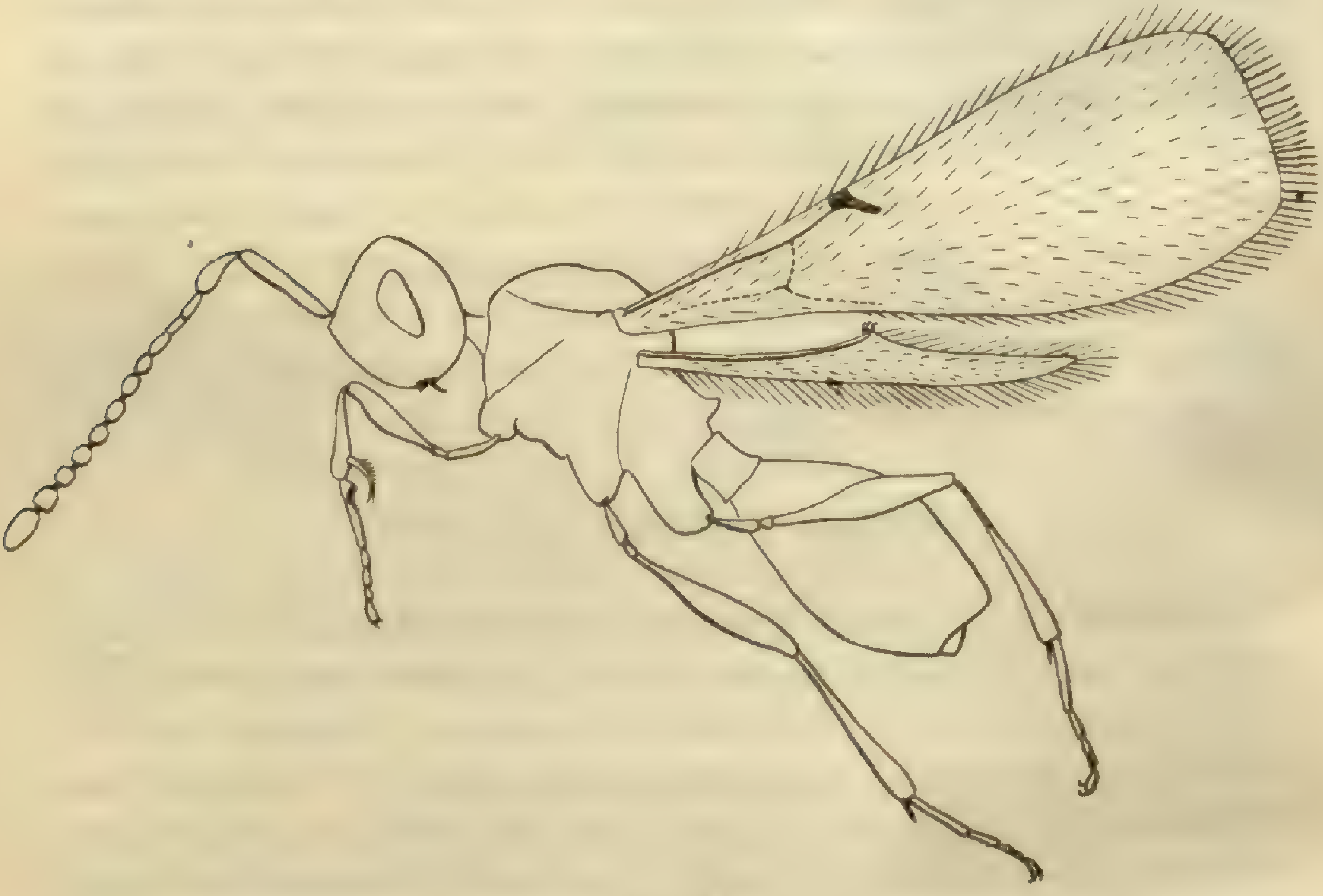


Fig. 3.

Pantolyta semirufa Kieff. et **pallida** Kieff.

Fig. 4, ♂ (semirufa) et fig. 5, ♀ (pallida).

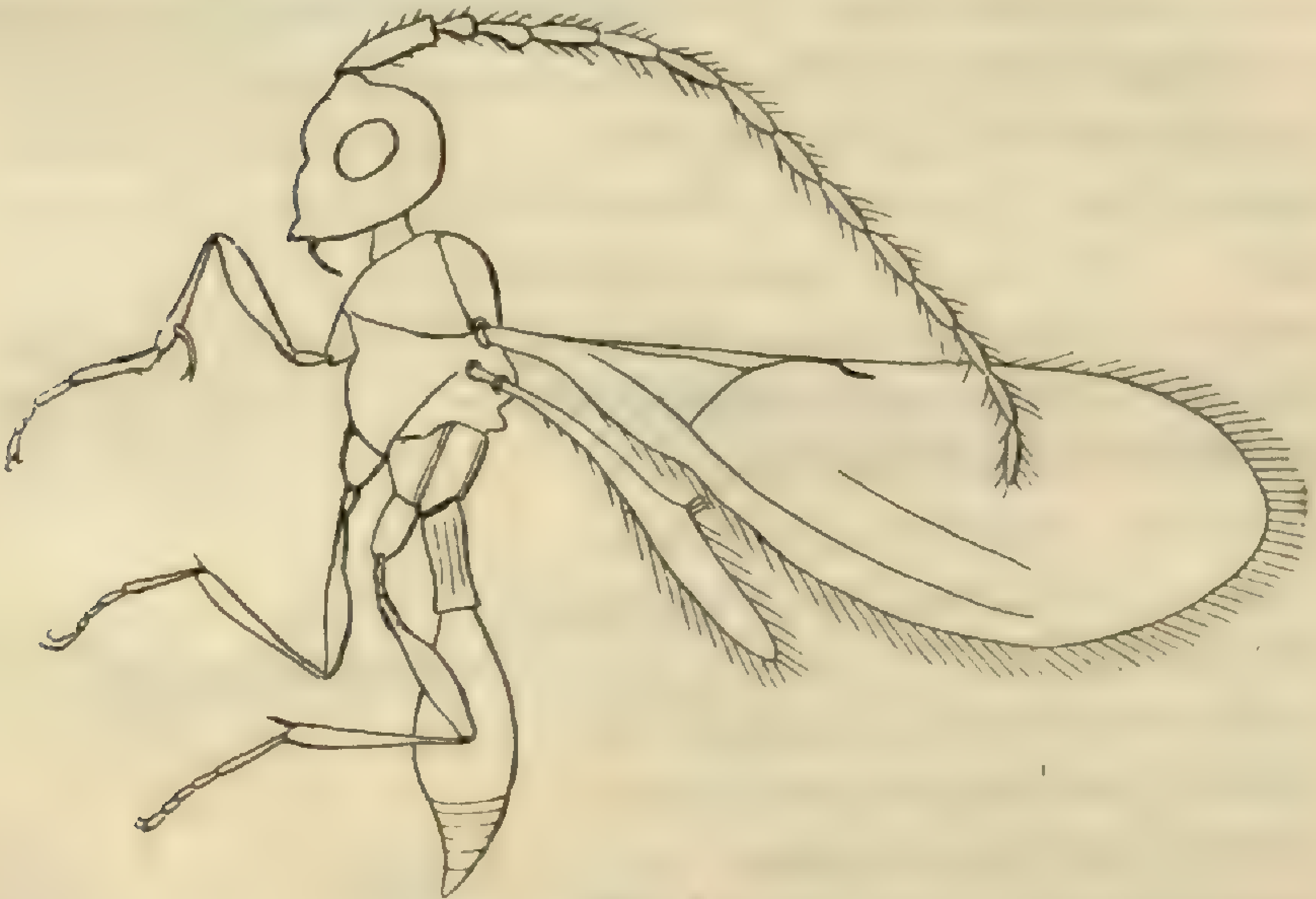


Fig. 4.

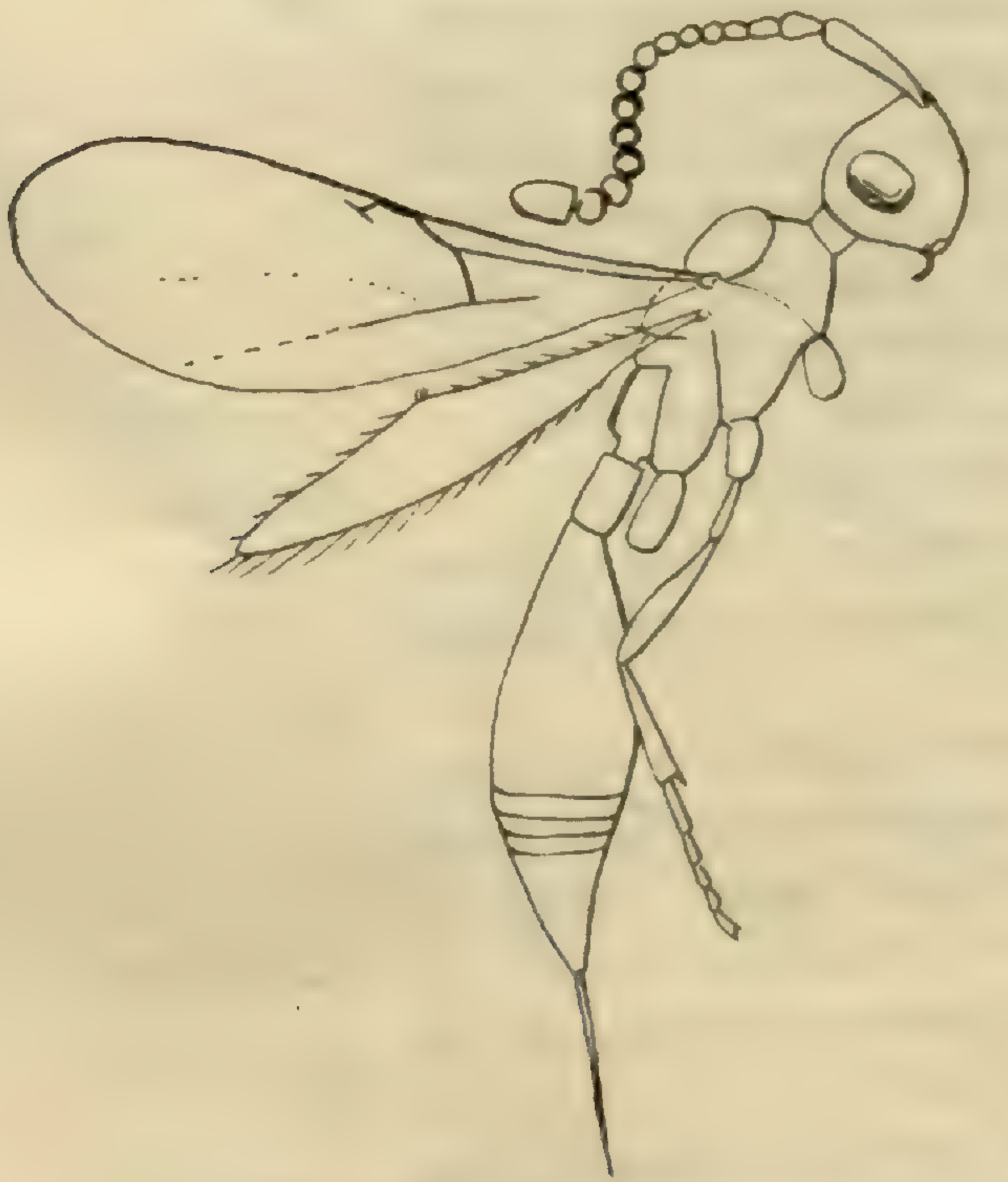


Fig. 5.

Les insectes de ce genre se distinguent de tous les autres genres de Bélytines par les ailes inférieures dépourvues de cellule, par la cellule radiale presque nulle et par la forme de l'abdomen.

Genre Paraclista Kieff.

Cinq espèces nouvelles, à cellule radiale fermée, sont à rapporter à ce genre ; elles se distinguent comme il suit :

1. Cellule radiale 2 1/2 fois aussi longue que la nervure marginale ; tête aussi longue que haute ; pronotum en ligne transversale. Noir ; mandibules, 3 premiers articles antennaires, pattes et segment anal roux. Taille : 3,5 mm. — France. (De Gaulle) . . . . *Carinifrons* n. sp.

— Cellule radiale au maximum de moitié plus longue que la marginale ; pronotum allongé . . 2.

2. Grand tergite avec un sillon large, profond, occupant les deux tiers antérieurs. Tête plus longue que haute. Cellule radiale égale à la marginale. Noir ; mandibules, antennes, et pattes jaunes ; abdomen sauf le pétiole, marron. Taille : 3,8 mm. — Italie (Musée de Gênes) . . . *Sulcigera* n. sp.

— Grand tergite avec un sillon court ; antennes brunes, sauf à la base . . . . 3.

3. Corps noir ; base des antennes et les pattes rousses. Tête aussi longue que haute. Taille : 4 mm. — Autriche, Trieste . . *Longifrons* n. sp.

— Abdomen roux ; pétiole, tête et thorax noirs . . . . 4.

4. Cellule radiale de moitié plus longue que la nervure marginale, qui est à peine plus longue que la stigmatique ; récurrente

égale à la marginale. Pattes testacées, parties renflées plus obscures. Taille : 2,8 mm. — France. (De Gaulle) . . . . *Producticeps* n. sp.

— Cellule radiale égale à la nervure marginale, qui est double de la stigmatique ; récurrente oblitérée. Pattes d'un jaune roux. Taille : 2,8 mm. — Hongrie. (Szepligeti) . . . . *Longicollis* n. sp.

MEUSELIA n. g.

Fig. 6, ♀.

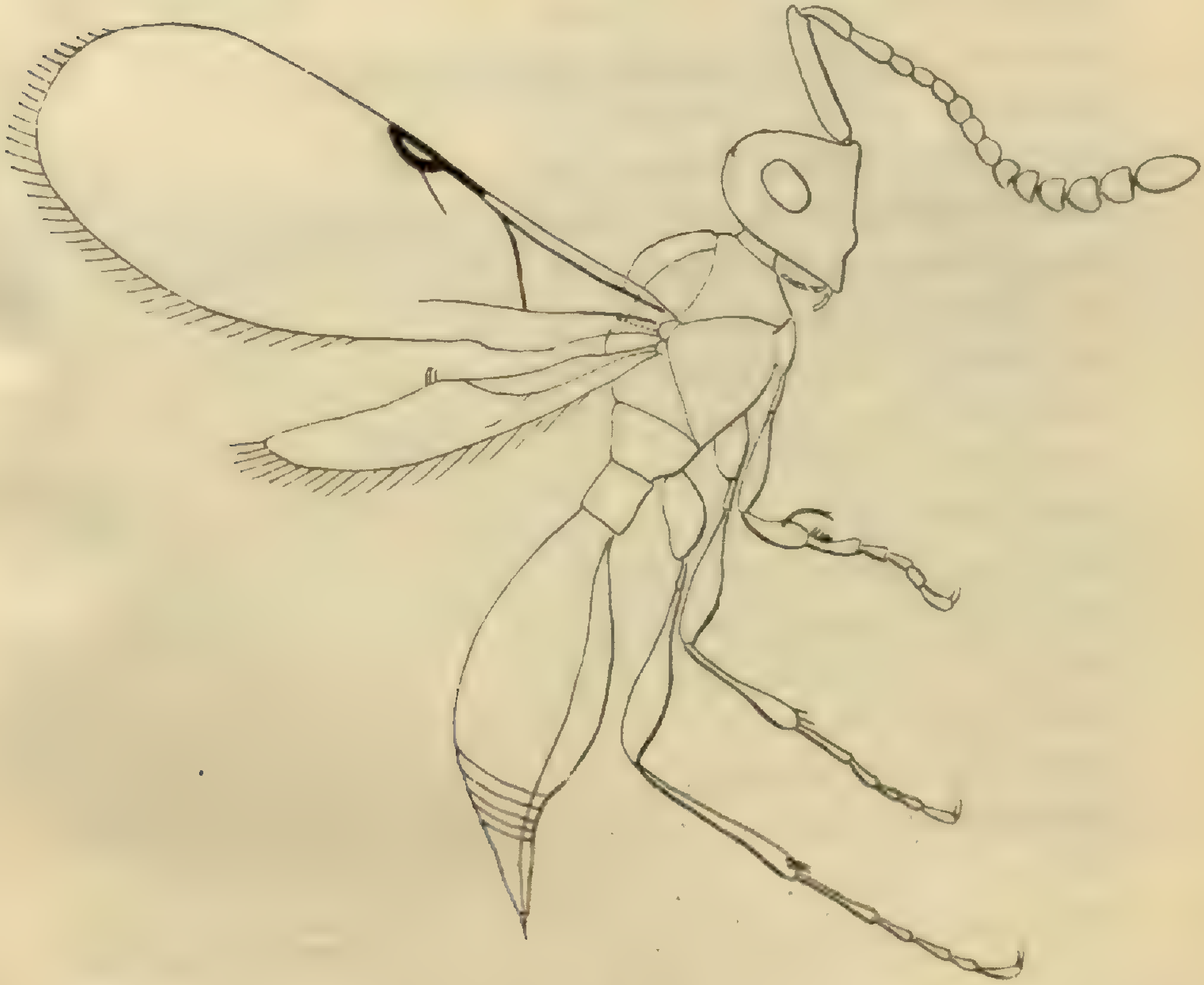


Fig. 6.

♀. Palpes maxillaires de 5 articles, les labiaux de 3. Yeux glabres. Mandibules non en bec, mais un peu proéminentes. Scape inerme ; flagellum grossi dans la moitié distale. Cellule radiale très petite, fermée, plus courte que la nervure marginale. Abdomen un peu comprimé au tiers apical, qui est conique et incurvé faiblement. Ce genre comprend deux espèces, dont *fuscicornis* est le type.

1. Cellule radiale dépassée de toute sa longueur par la postmarginale . . . . *Clausa* K.

— Cellule radiale non dépassée par la postmarginale ; radiale et stigmatique formant ensemble une ligne arquée ; récurrente faible, oblique, dirigée vers la discoïdale. Yeux plus courts que les joues. Scape égal aux quatre articles suivants réunis ; 3e article égal au 2e, 2 1/2 fois aussi long que gros : 4-6 plus minces, de moitié plus longs que gros, 7-9 subglobuleux et à peine plus gros ; 10-15 graduellement grossis, subglobuleux sauf le 15e qui est allongé. Pétiole à peine plus long que gros ; segment 7e plus long que les 4 précédents réunis ; oviducte proéminent, formé par une fine tarière entourée par deux valves munies de quelques soies à l'extrémité. Noir ; antennes, mandibules, hanches et pattes brunes, tarses et parties amincies des pattes testacés. Taille : 1,5 mm. — Hongrie, Kismaros. (R. Meusel) . . . *Fuscicornis* n. sp. fig. 7.

Cardiopsilus rufiventris n. sp.

Diffère de *productus* notamment par le grand tergite dont la base est striée dans les deux sexes. Taille ♂ ♀ : 2,8 mm. — Écosse (P. Cameron).

Acanopsilus brevinervis n. sp.

Tête subglobuleuse ; radius pas plus long que la basale ; récurrente nulle ; pétiole densément strié. Noir ; scape et pattes d'un jaune brunâtre ; abdomen roux brun. Taille ♂ : 2,8 mm. — Écosse (P. Cameron).

Acanopsilus arcuatus n. sp.

Tête très transversale ; radius plus de deux fois aussi long que la basale, parallèle au bord ; récurrente arquée depuis la base. Noir ; 2 ou 5 premiers articles antennaires et pattes d'un roux jaune, abdomen brun noir. Taille ♂ : 3 mm. — Italie (Solarie) ; Hongrie (Meusel).

Acanopsilus laticeps n. sp.

Tête et nervation comme chez le précédent, sauf que la récurrente est d'abord parallèle au bord, puis incurvée. Noir ; 2 premiers articles antennaires et pattes jaunes, abdomen roux. Taille ♂ : 2,8 mm. — Italie : Nava (Solari).

Acanosema Reitteri n. sp.

Diffère de *rufum* surtout par la couleur et par la marginale qui est aussi longue que sa distance de la basale. Tête et thorax noirs, abdomen d'un roux jaunâtre ; antennes testacées ; pattes jaunes. Taille ♀ : 3 mm. — Herzégovine (Reitter).

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES.
Statuts 5
Règlement arrêté par le Conseil pour l'encouragement des recherches scientifiques 9
Lettres de S. S. Léon XIII au Président et aux membres de la Société scientifique de Bruxelles 11
Lettre de S. É. le Card. R. Merry del Val, secrétaire d'État de sa S. S. le Pape Pie X au Président de la Société scientifique de Bruxelles en réponse à l'adresse au Saint-Père 15
Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles 17
  Liste des membres fondateurs 17
  — des membres honoraires 18
  — générale 20
  — géographique 46
  — des membres décédés 53
  — des membres inscrits dans les sections 54
  Membres du Conseil 1907-1908 61
  — — 1908-1909 62
  Bureaux des sections 1908-1909. 63
Sessions de 1908-1909 65
  Session du 29 octobre 1908 à Anvers 65
    Séances des sections : Première section 65
      Seconde section. 82
      Troisième section, excursion du 30 juin 1908. 86
      — — session du 29 oct. 1908 . 88
      — — séance extraordinaire du 19 nov. 1908 102

PAGES.
Quatrième section 103
Cinquième section 105
Sixième section 105
Assemblée générale. 106
Conférence de M. Éd. De Wildeman 106
Session du 28 janvier 1909, à Bruxelles. 107
Séances des sections : Première section 107
Seconde section 120
Troisième section 135
Quatrième section 147
Sixième section 149
Assemblée générale. 165
Conférence de M. le Dr Haibe 165
Session des 20, 21 et 22 avril 1909, à Bruxelles 169
Séances des sections : Première section 169
Seconde section 192
Troisième section 212
Quatrième section 222
Cinquième section 246
Sixième section 247
Assemblée générale du 20 avril 249
Rapport du Secrétaire général 249
Conférence de M. le Dr Vervaeck 256
Assemblée générale du 21 avril 256
Rapport sur la *Société bibliographique de Paris*, par M. le Cte Domet de Vorges. 256
Conférence de M. le Bon Greindl 259
Assemblée générale du 22 avril 259
Rapport du Trésorier 260
Remise de la médaille de la Société au R. P. Th. Wulf, S. J. . . 261
Résultat des élections pour le renouvellement du Conseil . . . 261
Conférence du R. P. Vermeersch 261
Liste des ouvrages offerts à la *Société scientifique de Bruxelles* du 1er mai 1908 au 1er mai 1909 262

COMMUNICATIONS DIVERSES

Potentiel du temps de parcours ; mémoire présenté par M. Haton de la Goupillière 65
Sur certains travaux de l'École d'Oppolzer relatifs aux éclipses et à la chronologie, par M. Ern. Pasquier 65
L'Équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et de Neumann : mémoire présenté par M. le Vte R. d'Adhémar 74
Sur les coefficients du binome, par M. le Bon G. de Béthune 74

PAGES.

Sur les papiers de l'astronome Wendelin conservés aux archives générales du Royaume à Bruxelles, par le R. P. H. Bosmans, S. J. . . . 74

Envoi d'un mémoire en réponse à la question de Concours de la seconde section. 82

L'influence du Magnétisme sur l'explosion de certains mélanges gazeux, par M. A. de Hemptinne. 82

Excursion de la troisième section à Gembloux. 86

Visite du Musée d'histoire naturelle de la Société royale de zoologie d'Anvers 88

Sur trois cas nouveaux de creusement glaciaire, par M. le ch^{ne} Bourgeat. 88

Les dégagements d'acide carbonique du Calcaire de Lovegnée, par M. X. Stainier. 90

Les *Phoridae* et les *Leptidae* de l'ambre de la Baltique, par M. F. Meunier. 97

Séance de la troisième section au Musée royal d'histoire naturelle à Bruxelles. 102

Visite, par la quatrième section, de la Fabrique des conserves alimentaires de l'armée et de la *Maison hydraulique*, à Anvers 103

Les Ports de Barcelone et de Bilbao, par le R. P. J. Charles, S. J. . . 105

Rôle du gouvernement Canadien dans la mise en valeur des territoires de l'Ouest, par M. P. Staes 105

Sur l'équation d'un espace à n dimensions en coordonnées-distances, par M. P. Mansion 107

Sur le nombre moyen de séries de r rouges consécutives dans une série de n épreuves à la roulette ; correction à la formule de Grünbaum, par le R. P. F. Willaert, S. J. 115

Sur le théorème de Holditch, par M. Ch. de la Vallée Poussin 119

Sur l'enseignement de la trigonométrie, au point de vue éducatif, par M. P. Mansion 119

Sur une nouvelle machine pneumatique à mercure du D^{r} Gaede, par M. Schmidt-Leybold 120

Procédés de recherche des corps opaques aux rayons X introduits dans l'organisme par effraction, par le D^{r} É. Henrard 121

Les pronostics sur la direction du vent par les ballonnets-sondes, par M. Van de Vyver 125

Rapports sur un mémoire envoyé en réponse à la question de concours de la seconde section : *On demande un électromètre perfectionné et l'étude par son moyen de phénomènes électriques de genres divers,* par MM. Tits et de Hemptinne 129

Sur quelques effets singuliers de l'élasticité des liquides, par M. G. Van der Mensbrugghe. 131

Sur une modification de la méthode au nitrate d'argent pour l'imprégnation des éléments nerveux du Lombric, par le R. P. L. Boule, S. J. . 135

Nouveaux Paléodictyoptères et Protorthoptères du Stéphanien de Commentry, M. F. Meunier 139

Un nouveau Protoblattinae, à ailes paléodictyoptériformes, des schistes houillers de Commentry, par M. F. Meunier. 140

PAGES.

Quelques considérations sur la faune d'insectes du copal fossile de Zanzibar, du copal récent d'Acra, de Zanzibar et de Madagascar, par M. F. Meunier . . . 141
Sur l'origine du charbon des Nodules à Goniatites (bullions), par M. A. Renier . . . 143
Carte manuscrite, au 1 : 2 000 000, du Congo belge, par M. A. Maes . . . 143
Les Rhaphides (Névroptères) du Musée de Paris, par le R. P. Longin Navàs, S. J. . . . 143
Les sciences biologiques et la colonisation, par M. É. De Wildeman . . . 146
L'enseignement au Japon, par M. Th. Gollier . . . 146
Démonstration de l'application d'un nouveau traitement des affections cancéreuses à l'Institut SS. Jean et Élisabeth, par le Dr Solé . . . 147
Traitement du cancer par la Fulguration, par le Dr R. Desplats . . . 147
Sur la survie de la tête isolée des mammifères, à l'aide de la circulation artificielle, par le Dr Heymans . . . 148
Sur l'emploi des marteaux pneumatiques pour l'abatage de la houille, par M. A. Renier . . . 149
Sur quelques constructions relatives aux coniques, par M. Casteels . . . 169
L'approximation minimum d'un système d'équations, par M. de la Vallée Poussin . . . 173
Sur une méthode de combinaison des équations de condition en usage dans les observations à la lunette méridienne, par le P. F. Willaert, S. J. 174
Sur le procédé de la Quadruple pesée, par M. P. Mansion . . . 178
Sur le Baccara, à propos d'une erreur et d'une lacune dans l'étude de Bertrand sur ce jeu, par M. P. Mansion . . . 180
« L'Arithmétique de Jean Trenchant », remarques du P. Bosmans, S. J. sur cet ouvrage . . . 184
Sur la correspondance des champs visuels des deux yeux dans la vision bi-oculaire, par M. Delemer . . . 193
L'ionisation dans la flamme d'éther, par M. le chanoine De Muynck . . . 196
Potentiel entre électrodes enveloppées, par M. le chanoine De Muynck 200
Réaction à la résorcine chlorhydrique, par M. Pieraerts . . . 207
Sur la charge initiale de la machine Wimshurst, par le R. P. Mulder . . . 209
Appareil de cours servant à montrer la différence de conductibilité calorifique des métaux, par M. Van de Vyver . . . 210
Sur la valeur de certaines plantes cultivées par les indigènes du Congo, par M. De Wildeman . . . 213
Deux hémérobides nouveaux, par le R. P. L. Navàs, S. J. . . . 215
Deux Mymarinae du copal récent, par M. F. Meunier . . . 220
Quelques diptères et un hyménoptère fouisseur des schistes miocéniques de Turnich, par M. F. Meunnier . . . 221
La responsabilité des hystériques et des hystéro-épileptiques, rapport présenté à la quatrième section, par le Dr Cuylits ; discussion . . . 222
Quelques considérations sur l'inhibition nerveuse, au point de vue de la responsabilité en matière criminelle, par le Dr Struelens ; discussion 242
Visite des installations maritimes de Bruges (cinquième section) . . . 246

PAGES.
Le Port de Rouen, par M. Blondel 246
Le Port de Brême, par le R. P. Charles 246
Le Port de Montréal, par M. Dewavrin 247
Le Port de Shanghaï, par M. A. Fauvel 247
Le Port de Pouzzoles, par M. A. Roersch 247
L'aviation, ses récents progrès, les problèmes à résoudre, par M. le Bon de Béthune 247

CONFÉRENCES

Le Caoutchouc : Histoire, plantes, production, commerce, par M. É. De Wildeman 106
Le Cancer, par M. le Dr Haibe 165
Les empreintes digitales. Les bases scientifiques de la dactyloscopie et ses applications judiciaires 256
Les Préalpes, par M. le Bon Greindl 259
La peur de l'enfant dans les classes dirigeantes, par le R.P. Vermeersch, S.J. 261

QUESTIONS DE CONCOURS

Première section 169
Seconde — 212
Troisième — 222
Sixième — 248

AUTEURS

R. d'Adhémar, 74. — de Béthune, 74, 247. — Blondel, 246. — Bosmans, 74, 184. — Boule, 135. — Bourgeat, 88. — Casteels, 169. — Charles, 105, 246. — Cuylits, 222. — Delemer, 193. — De Muynck, 196, 200. — R. Desplats, 147. — Dewavrin, 247. — De Wildeman, 106, 146, 213. — Fauvel, 247. — Gollier, 146. — Greindl, 259. — Haibe, 165. — Haton de la Goupillière, 65. — de Hemptinne, 82, 129. — É. Henrard, 121. — Heymans, 148. — Maes, 143. — Mansion, 107, 178, 180. — Meunier, 97, 119, 139, 140, 141, 221. — Mulder, 209. — Navàs, 143. — Pasquier, 65. — Pieraerts, 207. — Renier, 143. — Roersch, 247. — Schmidt-Leybold, 120. — Solé, 147. — Stainier, 90. — Staes, 105. — Struelens, 242. — Tits, 129. — de la Vallée Poussin, 119, 173. — Van der Mensbrugghe, 131. — Van de Vyver, 125, 210. — Vermeersch, 261. — Vervaeck, 256. — Willaert, 115, 174. — Wulf, 261.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

PAGES.
L'Électricité considérée comme forme de l'énergie. Électrostatique, par M. le Lieut-Colon. Ariès 1
Potentiel du temps de parcours, par M. Haton de la Goupillière . . . 108
L'équation de Fredholm et les Problèmes de Dirichlet et de Neumann, par M. le V^te^ Robert d'Adhémar 173
Contribution à l'étude de la Vaccination antituberculeuse, par M. le D^r^ A. Haibe 240
Sur une tentative d'édition des œuvres complètes de L. Euler, faite à Bruxelles en 1839, par le P. H. Bosmans, S. J.. 265
La Fulguration dans le traitement du Cancer. Étude basée sur quinze mois de pratique de cette méthode, par le D^r^ R. Desplats, de Lille. . 290
L'Hydrolyse citrique du Maltose, par M. J. Pieraerts 305
Sur la Géométrie du Tétraèdre, par M. J. Neuberg 320
Description de nouveaux Dryinides et Belytides d'Amérique, par M. l'abbé J. J. Kieffer. 334
Description de nouveaux Diapriides et Belytides d'Europe, par M. l'abbé J. J. Kieffer 381

AUTEURS

R. d'Adhémar, 173. — Ariès, 1. — Bosmans, 265. — R. Desplats, 290. — D^r^ Haibe, 240. — Haton de la Goupillière, 108. — Kieffer, 334, 381. — Neuberg, 520. — Pieraerts, 305.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXII, 1875 à 1908. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages. fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Ed. Vandersmissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905) . . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : T. I. Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. Prix : 4 francs. T. II. VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. T. III. XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Leger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichel. Prix : 3 francs. T. IV. XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. Tome V, sous presse.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le D^r X. Francotte. Brochure in-8 de 48 pages (1907). . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le D^r Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) . . . . fr. **0 75**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série**.

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés**.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** % ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la REVUE. Un vol. du format de la REVUE de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. & R. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.